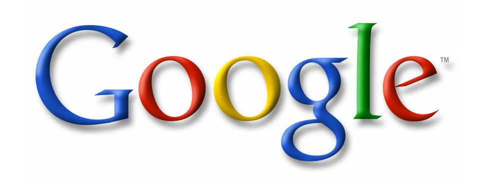
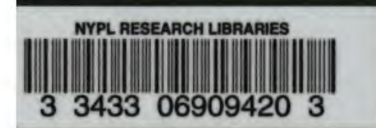




COURS

D'ANALYSE INFINITÉSIMALE

COURS D'ANALYSE

INFINITÉSIMALE

PAR

Philippe GILBERT

Docteur en sciences physiques et mathématiques
Professeur à la faculté des sciences de l'Université catholique de Louvain
Associé étranger de l'Académie Royale des Sciences, Lettres et Beaux-Arts de Belgique
Correspondant de la Société Philomathique de Paris

PARTIE ÉLÉMENTAIRE



LOUVAIN
CH. PEETERS, LIBRAIRE-ÉDITEUR

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, LIBRAIRE

BRUXELLES
A. DECQ, LIBRAIRE

1872

En publiant ces leçons sur l'analyse infinitésimale, je ne cède pas à l'ambition d'accroître la liste des ouvrages excellents que l'on possède sur ce sujet : mon but est simplement de faciliter la tâche des élèves qui suivent mes leçons, en mettant entre leurs mains un manuel rédigé d'après les meilleures sources, et approprié à leurs besoins.

Une difficulté particulière a influé sur la composition de cet écrit, qui s'adresse à deux catégories d'élèves assez inégalement préparés, et poursuivant des buts fort différents. Les uns, c'est le grand nombre, fréquentent les cours des Écoles spéciales attachées à l'Université, pour se préparer à la carrière d'ingénieur et en obtenir le diplôme; les autres, qui d'ordinaire se destinent à l'enseignement, ont à subir les épreuves plus élevées du doctorat en sciences physiques et mathématiques. Pour les premiers, l'analyse est avant tout un instrument, indispensable il est vrai, pour résoudre les problèmes que la mécanique pure ou appliquée, la construction, etc., vont leur offrir bientôt après : la durée très-limitée des études ne permet pas de s'écarter de ce point de vue spécial, et oblige à élaguer des

leçons tous les détails qui ne s'y rapportent pas. Quant aux élèves de la seconde catégorie, pour qui la science pure est le but, ils réclament un enseignement à la fois plus étendu, plus approfondi, et qui les initie davantage à l'art si difficile des transformations analytiques.

Cette difficulté, je ne me flatte pas de l'avoir surmontée, mais j'y ai employé tous mes efforts. J'ai condensé dans ce volume, formant la *partie élémentaire* du cours, les notions de calcul différentiel et de calcul intégral qui sont la base nécessaire de la science de l'ingénieur, en sorte que le cadre de cet ouvrage correspondît assez exactement à celui de nos Écoles spéciales; mais je n'ai pas cru pouvoir, sans manquer à la seconde destination de cet écrit, faciliter les abords de la science aux dépens de sa solidité, et, tout en restant élémentaire, j'ai fait ce que j'ai pu pour ne point sacrifier la rigueur dans l'exposition des principes fondamentaux. Quant aux théories analytiques plus élevées ou d'une application moins immédiate, telles que celles de la courbure des surfaces, des intégrales définies, des fonctions d'une variable imaginaire, j'espère en faire la matière d'un second volume où l'intégration des équations recevra les compléments nécessaires, et qui s'adressera exclusivement aux élèves du doctorat en sciences. Ce plan, semblable à celui qu'a adopté M. Schlömilch, offre un autre avantage : il permet d'utiliser dans l'étude de certaines théories, ordinairement rattachées au calcul différentiel, les ressources du calcul intégral, et d'arriver ainsi à plus de simplicité et à plus de rigueur. J'ai dû cependant donner place, dans ce premier volume, à certains développements, tels que ceux qui concernent les points singuliers, les courbes à double courbure, etc., quoiqu'ils ne fissent pas partie de l'enseignement donné

aux élèves ingénieurs, parce qu'ils offraient une liaison trop étroite avec le texte, ou trop peu d'étendue pour former la matière d'un chapitre spécial dans le volume suivant.

Telle est l'explication, et au besoin l'excuse, d'un défaut de proportions que l'on ne peut manquer d'observer entre les diverses parties de cet écrit.

N'ayant pas en vue de produire une œuvre originale, j'ai mis largement à contribution les ouvrages didactiques et les mémoires publiés sur le sujet qui m'occupait. Je ne puis citer tous ceux que j'ai consultés, mais je signale comme m'ayant particulièrement guidé les immortels travaux de Cauchy, les excellents *Éléments de calcul infinitésimal* de M. Duhamel, le grand *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral* de M. Bertrand, le cours de M. Serret, le *Compendium der höheren Analysis* de M. Schlömilch, le *Treatise on differential equations* de M. Boole, les ouvrages de MM. Moigno, Catalan, A. de Morgan, Haton de la Goupillière.

Convaincu, par une expérience de tous les jours, que l'élève ne peut posséder une théorie s'il ne l'a appliquée, vérifiée, éclairée par des exemples multipliés, j'ai terminé chaque chapitre par des questions nombreuses et choisies, dont les solutions ont été indiquées. J'ai puisé principalement, pour cette partie importante de mon travail, dans les recueils spéciaux de MM. Frenet, Schlömilch, Sohncke, Brahy, dans le *Cours complémentaire* de M. Vieille, dans les publications périodiques et dans mes propres notes.

Les Écoles spéciales de l'Université catholique doivent beaucoup à Monseigneur Laforêt, le chef aimé que Dieu vient de nous reprendre :

il en avait fait l'œuvre choisie de son rectorat. Sa haute intelligence, son active sollicitude, sa douce et prudente initiative, les ont rapidement amenées au degré de prospérité où nous les voyons aujourd'hui. Qu'il me soit permis de déposer mon humble travail, comme un hommage de ma filiale affection et de mes impérissables regrets, sur cette tombe prématurément ouverte, où viennent de s'abîmer tant de force, tant de lumières et tant d'espérances !

Louvain, le 4 février 1872.

Ph. Gilbert.

TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE DEUXIÈME. — Applications analytiques du calcul différentiel.

LIVRE TROISIÈME. — Applications géométriques du calcul différentiel.

DEUXIÈME PARTIE.

CALCUL INTÉGRAL.

LIVRE QUATRIÈME. — Intégration des différentielles.

ERRATA.

Page.	*Ligne.*	*Erreur.*	*Correction.*
14	13	$\frac{m(m-1)}{1-2}$	$\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}$
19	10	§ IV	§ 4.
25	1	§ V	§ 5.
75	24	$\cos y\,dx$	$\cos y\,dy$.
82	5	Le facteur $\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}$ manque au dénominateur.	

Page.	*Ligne.*	*Erreur.*	*Correction.*
101	3	$y\,(x^2 - ay)$	$y\,(x^2 - ay)^2$.
127	10	R^n	R_n.
143	10	11	12.
208	11	$\frac{(p^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{p^3}$	$\frac{(p^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}$.
»	25	$-\frac{b^4}{a^2y^2}$	$-\frac{b^4}{a^2y^3}$.
211	15	BD′	B′D′.
243	18	$Z(\eta - z)$	$Z(\zeta - z)$.
295	2	$-\frac{1}{5^2}$	$+\frac{1}{5^2}$.
297	dernière	$\int \frac{6z^2dz}{1+z}$	$\int \frac{6z^3dz}{1+z}$.
»	»	$\frac{x^{\frac{1}{3}}}{2} - x^{\frac{1}{6}} + \mathrm{l}.(1+x)^{\frac{1}{6}}$	$\frac{x^{\frac{1}{2}}}{3} - \frac{x^{\frac{1}{3}}}{2} + x^{\frac{1}{6}} - \mathrm{l}.(1+x)^{\frac{1}{6}}$.
300	4	$\int \frac{dx}{b+2z}$	$\int \frac{dz}{b+2z}$.
311	22	$\frac{b}{a^2b^2}$	$\frac{b}{a^2 - b^2}$.
»	»	$-\frac{\mathrm{l}.(1-\cos x)}{2(a+b)}$	$+\frac{\mathrm{l}.(1-\cos x)}{2(a+b)}$.
312	10	$\frac{(a+b)-(a-b)\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{(a+b)+(a-b)\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}$	$\frac{\sqrt{b+a}+\sqrt{b-a}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{\sqrt{b+a}-\sqrt{b-a}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}$.
313	8	$-\frac{m}{n}(\mathrm{l}.x)^{n-1}$	$-\frac{n}{m}(\mathrm{l}.x)^{n-1}$.
325	1	$(\mathrm{arc\ tg}\,x)^2$	$\frac{1}{2}(\mathrm{arc\ tg}\,x)^2$.
332	17	s	ps.
337	dernière	$\frac{a^2}{a^2+x^2} + \frac{a^2}{4(a^2-x^2)^2}$	$\frac{a^2}{a^2-x^2} + \frac{a^4}{4(a^2-x^2)^2}$.
370	»	$(by - y^2)$	$\left(by - \frac{y^2}{2}\right)$.
381	2	$b\left(1-\sqrt{\frac{x}{a}}\right)$	$b\left(1-\sqrt{\frac{x}{a}}\right)^2$.

COURS D'ANALYSE.

INTRODUCTION.

§ 1. PROPOSITIONS D'UN USAGE FRÉQUENT.

1. Soient a, b deux quantités positives ou négatives : nous disons que a est *plus grand* ou *plus petit* que b, suivant que la différence $a-b$ est positive ou négative, et nous écrivons, dans le premier cas,

$$a > b;$$

dans le second,

$$a < b.$$

Il suit de là que toute quantité positive est > 0, toute quantité négative < 0; de deux quantités positives, la plus grande est celle dont la valeur numérique est la plus considérable; le contraire a lieu pour deux quantités négatives.

On dit qu'une quantité k est *moyenne* entre plusieurs quantités données, lorsqu'elle est comprise entre la plus petite et la plus grande de celles-ci, ou *lorsque les différences*

$$g-k, \quad k-h,$$

sont de même signe, g et h désignant l'un la plus grande, l'autre la plus

petite des quantités données. La moyenne entre plusieurs quantités $a, a', a''....$, se désigne par la notation

$$\mathrm{M}(a, a', a''....).$$

Théorème I. — *Soient $a, a', a''....$, des quantités de signes quelconques; $b, b', b''....$ des quantités de même signe, en nombre égal aux précédentes. L'on aura*

$$\frac{a+a'+a''+\cdots}{b+b'+b''+\cdots}=\mathrm{M}\left(\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \cdots\right).$$

Soient, en effet, g le plus grand, h le plus petit des rapports $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, ...$ Les différences

$$g-\frac{a}{b},\quad g-\frac{a'}{b'},.....;\quad \frac{a}{b}-h,\quad \frac{a'}{b'}-h,......,$$

étant de même signe, si l'on multiplie les termes de chacune de ces deux suites respectivement par $b, b', b'', ...$, l'on aura encore les quantités de même signe

$$bg-a,\quad b'g-a',.....;$$

$$a-bh,\quad a'-b'h,......$$

Faisant la somme des termes de chaque suite, et la divisant par $b+b'+b''+....$, on verra que les quotients

$$g-\frac{a+a'+a''+\cdots}{b+b'+b''+\cdots},\quad \frac{a+a'+a''+\cdots}{b+b'+b''+\cdots}-h,$$

sont encore de même signe, ce qui démontre la proposition.

Corollaires. 1° Supposant $b=b'=b''=\cdots=1$, désignant par n le nombre des quantités $a, a', a'', ...$, on a

$$\frac{a+a'+a''+\cdots}{n}=\mathrm{M}(a, a', a'', ...).$$

2° Si dans le *Théorème I* l'on remplace $a, a', a'', ...$, respectivement par $ab, a'b', a''b'', ...$, ce qui est permis, on en tire

$$ab+a'b'+a''b''+\cdots=(b+b'+b''+\cdots)\,\mathrm{M}(a, a', a'', ...).$$

La somme des produits $ab, a'b', ...$ est donc égale à la somme des facteurs

de même signe $b, b', b'', \ldots$, multipliée par une moyenne entre les autres facteurs $a, a', a'', \ldots$.

2. Théorème II. — *Soient*

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{a'}{b'}, \quad \frac{a''}{b''}, \ldots\ldots$$

une suite de rapports égaux; $m, m', m'', \ldots$ des quantités quelconques. On aura les égalités

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\cdots=\frac{a+a'+a''+\cdots}{b+b'+b''+\cdots}=\frac{ma+m'a'+m''a''+\cdots}{mb+m'b'+m''b''+\cdots}$$
$$=\pm\frac{\sqrt{a^2+a'^2+a''^2+\cdots}}{\sqrt{b^2+b'^2+b''^2+\cdots}}.$$

Posons en effet

$$k=\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\cdots,$$

d'où

$$\text{(A)} \qquad a=kb, \quad a'=kb', \quad a''=kb'', \ldots;$$

ajoutant membre à membre ces égalités, nous aurons

$$a+a'+a''+\cdots=k(b+b'+b''+\cdots),$$

d'où enfin

$$\frac{a+a'+a''+\cdots}{b+b'+b''+\cdots}=k.$$

Si, avant d'ajouter ces équations (A), on les multiplie respectivement par les facteurs $m, m', m'', \ldots$, on aura de même

$$\frac{ma+m'a'+m''a''+\cdots}{mb+m'b'+m''b''+\cdots}=k.$$

Enfin, si l'on ajoute ces mêmes équations (A) après les avoir élevées au carré, on obtient

$$a^2+a'^2+a''^2+\cdots=k^2(b^2+b'^2+b''^2+\cdots),$$

d'où

$$k=\pm\frac{\sqrt{a^2+a'^2+a''^2+\cdots}}{\sqrt{b^2+b'^2+b''^2+\cdots}},$$

ce qui achève de démontrer les relations proposées.

3. Théorème III. — *Soient $a, a', a'',\ldots; b, b', b'',\ldots,$ deux suites composées d'un même nombre de quantités; on a toujours*

$$(a^2+a'^2+a''^2+\cdots)(b^2+b'^2+b''^2+\cdots)-(ab+a'b'+a''b''+\cdots)^2=$$
$$=(ab'-ba')^2+(ab''-ba'')^2+(a'b''-b'a'')^2+\cdots$$

Il suffit de développer le carré $(ab+a'b'+a''b''+\cdots)^2$, et de lu ajouter la somme de carrés

$$(ab'-ba')^2+(ab''-ba'')^2+(a'b''-b'a'')^2+\cdots;$$

tous les doubles produits $2aba'b', 2aba''b'',\cdots; -2aba'b', -2aba''b'',\cdots$ se détruisent. Groupant ensuite les termes en a^2, en a'^2, etc., on trouve

$$a^2(b^2+b'^2+b''^2+\cdots)+a'^2(b'^2+b^2+b''^2+\cdots)+\cdots,$$

ou simplement

$$(a^2+a'^2+a''^2+\cdots)(b^2+b'^2+b''^2+\cdots),$$

ce qui démontre la formule proposée.

§ 2. Des quantités imaginaires et de leur usage.

4. On appelle *quantité* ou *expression imaginaire* toute expression d la forme

$$\alpha+\beta\sqrt{-1},$$

α et β désignant deux quantités réelles quelconques. Une telle expressio n'a par elle-même aucun sens, et ne représente rien; mais à l'aide de conventions dont nous allons parler, on peut introduire ces sortes d symboles dans l'analyse, raisonner rigoureusement sur eux comme sur d véritables quantités, et abréger ainsi les calculs.

Conventions. 1° Deux expressions imaginaires sont dites *égales*, quan les parties réelles d'une part, les coefficients de $\sqrt{-1}$ de l'autre, sor respectivement égaux dans ces deux expressions; en sorte que l'équatio

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}=\alpha'+\beta'\sqrt{-1}$$

ne signifie rien autre chose que les deux égalités

$$\alpha=\alpha',\qquad \beta=\beta'.$$

En d'autres termes, toute *équation imaginaire* est la représentation symbolique de deux équations entre quantités réelles.

2° Lorsque, dans l'expression $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, β se réduit à zéro, on admet que l'expression elle-même se réduit à α; par là, les quantités réelles sont renfermées comme cas particuliers dans les imaginaires.

3° L'*addition*, la *soustraction*, la *multiplication* s'effectuent sur les imaginaires d'après les mêmes règles que sur les quantités réelles, en convenant de traiter $\sqrt{-1}$ comme une quantité réelle dont le carré serait -1. Par exemple, si l'on développe d'après cette convention le produit

$$(\cos a + \sqrt{-1}\sin a)(\cos b + \sqrt{-1}\sin b),$$

on obtient, comme il est facile de le vérifier,

$$\cos(a+b) + \sqrt{-1}\sin(a+b),$$

et ce résultat s'exprime par l'équation imaginaire

$$(\cos a + \sqrt{-1}\sin a)(\cos b + \sqrt{-1}\sin b) = \cos(a+b) + \sqrt{-1}\sin(a+b):$$

d'après ce qui précède, cette équation signifie qu'après avoir développé le premier membre par la multiplication algébrique, on trouvera une partie réelle égale à $\cos(a+b)$, et un coefficient de $\sqrt{-1}$ égal à $\sin(a+b)$. On renferme ainsi dans une seule équation les formules qui expriment $\cos(a+b)$, $\sin(a+b)$: premier exemple de l'utilité des imaginaires.

4° *Diviser* une quantité imaginaire $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, par une autre $\alpha' + \beta'\sqrt{-1}$, c'est en trouver une troisième qui, *multipliée* par la seconde, reproduise la première.

5° L'*élévation aux puissances* entières, fractionnaires, négatives, se définit encore comme pour les quantités réelles. Ainsi $(\alpha + \beta\sqrt{-1})^m$, m étant entier et positif, représente le produit de m facteurs égaux à $(\alpha + \beta\sqrt{-1})$; $(\alpha + \beta\sqrt{-1})^{-m}$ est le quotient de l'unité par ce produit; et ainsi de suite.

6° Deux quantités imaginaires sont *conjuguées,* lorsqu'elles ne diffèrent

que par le signe du coefficient de $\sqrt{-1}$; telles sont

$$\alpha + \beta\sqrt{-1}, \qquad \alpha - \beta\sqrt{-1}.$$

Leur somme 2α, et leur produit $\alpha^2 + \beta^2$, sont réels.

5. La certitude des résultats auxquels on parvient par l'emploi des imaginaires repose sur ce principe : *Si l'on combine entr'elles des quantités ou des équations imaginaires par addition, soustraction, multiplication, comme si l'on opérait sur des quantités réelles, suivant les conventions ci-dessus, les équations ainsi obtenues seront toujours rigoureusement exactes, dans le sens que nous attachons à l'égalité des quantités imaginaires;* c'est-à-dire que chacune se dédoublera en deux équations réelles.

En effet, dans les quantités ou équations qu'il s'agit de combiner, remplaçons d'abord $\sqrt{-1}$ par un facteur réel *indéterminé* λ, puis faisons les opérations indiquées. Les équations résultantes étant évidemment exactes quelque soit λ, les coefficients des mêmes puissances de λ seront égaux dans les deux membres de chacune d'elles; cette égalité des coefficients subsistera, même si l'on remplace λ par une expression quelconque; par exemple, si l'on substitue à

$$\lambda, \quad \lambda^2, \quad \lambda^3, \quad \lambda^4, \quad \lambda^5, \ldots.$$

respectivement

$$\sqrt{-1}, \quad -1, \quad -\sqrt{-1}, \quad +1, \quad +\sqrt{-1}, \quad \text{etc...}$$

Or, on a ainsi le résultat même auquel on serait arrivé en laissant partout $\sqrt{-1}$ au lieu de λ, et opérant comme si $\sqrt{-1}$ était une quantité réelle dont le carré soit égal à -1. Donc enfin, dans les équations obtenues par ce procédé, les parties indépendantes de $\sqrt{-1}$ sont égales dans les deux membres, comme aussi les coefficients de $\sqrt{-1}$. C. Q. F. D.

On voit que le symbole $\sqrt{-1}$ ne joue ici que le rôle d'un simple *outil,* servant à maintenir séparées, dans chaque équation imaginaire, les quantités qui doivent appartenir soit à l'une, soit à l'autre des deux égalités réelles.

Il résulte aussi de ces raisonnements que les propriétés fondamentales des opérations primitives s'appliquent aux quantités imaginaires : ainsi, l'ordre des facteurs d'un produit est indifférent, etc.

6. *Transformation des imaginaires.* Une quantité imaginaire $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ étant donnée, on peut toujours poser

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta),$$

r, θ étant réels et $r > 0$. En effet, cette équation équivaut à celles-ci :

$$\alpha = r\cos\theta, \quad \beta = r\sin\theta,$$

d'où

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \cos\theta = \frac{\alpha}{r}, \quad \sin\theta = \frac{\beta}{r};$$

et comme ces valeurs de $\sin\theta$, $\cos\theta$ sont numériquement moindres que l'unité et vérifient l'égalité

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1,$$

il existe un arc réel θ qui, avec la valeur trouvée pour r, satisfait à la question. Il en existe même une infinité, puisque l'on peut augmenter ou diminuer θ d'un nombre quelconque de circonférences sans changer $\sin\theta$ ni $\cos\theta$.

Considérons α, β, comme les coordonnées rectangulaires d'un point du plan : r, θ seront les coordonnées polaires de ce point. On dit que r est le *module*, θ l'*argument* de la quantité imaginaire $\alpha+\beta\sqrt{-1}$; les équations ci-dessus montrent que :

1° *L'égalité de deux imaginaires entraîne celle de leurs modules ;*

2° *Toute quantité imaginaire qui a pour module zéro se réduit elle-même à zéro, et réciproquement,* car les égalités

$$\alpha^2 + \beta^2 = 0 \quad \text{et} \quad \alpha = 0, \ \beta = 0,$$

sont équivalentes.

3° *Une quantité réelle a pour module sa valeur numérique, et pour argument un nombre pair ou impair de fois π, selon qu'elle est positive ou négative ;* car si β est nul, on a

$$r = \sqrt{\alpha^2}, \quad \cos\theta = \pm 1,$$

suivant que $\alpha >$ ou < 0.

Il est souvent commode de mettre les imaginaires sous la forme $r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$.

7. *Addition.* Soient $r, r', r'', \ldots$ les modules; $\theta, \theta', \theta'', \ldots$ les arguments de plusieurs quantités imaginaires; R, T le module et l'argument de leur somme

$$r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) + r'(\cos\theta' + \sqrt{-1}\sin\theta') + \cdots$$

Portons bout-à-bout, à partir de l'origine, des longueurs OA, AA', A'A'',... égales à $r, r', r'', \ldots$ et faisant respectivement avec l'axe des x positifs des angles $\theta, \theta', \theta'', \ldots$ L'extrémité de la dernière droite aura pour coordonnées polaires R et T. En effet, ses coordonnées rectangulaires sont

$$r\cos\theta + r'\cos\theta' + r''\cos\theta'' + \cdots,$$
$$r\sin\theta + r'\sin\theta' + r''\sin\theta'' + \cdots$$

Corollaire. Le module de la somme de plusieurs imaginaires est toujours plus petit que la somme de leurs modules.

8. *Multiplication et division.* D'après la définition de la multiplication des quantités imaginaires, et la formule rappelée plus haut (4, 3°), on a évidemment :

$$r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) \times r'(\cos\theta' + \sqrt{-1}\sin\theta') = rr'[\cos(\theta+\theta') + \sqrt{-1}\sin(\theta+\theta')]$$

Multiplions les deux membres par une imaginaire $r''(\cos\theta'' + \sqrt{-1}\sin\theta'')$, et appliquons la même formule, nous aurons de même

$$r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) \times r'(\cos\theta' + \sqrt{-1}\sin\theta') \times r''(\cos\theta'' + \sqrt{-1}\sin\theta'')$$
$$= rr'r''[\cos(\theta+\theta'+\theta'') + \sqrt{-1}\sin(\theta+\theta'+\theta'')],$$

et ainsi de suite. Donc :

Le produit de plusieurs quantités imaginaires est une nouvelle quantité imaginaire, qui a pour module le produit de leurs modules, et pour argument la somme de leurs arguments.

Soit à *diviser* $r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$ par $r'(\cos\theta' + \sqrt{-1}\sin\theta')$, et désignons par x le quotient : la définition de la division (4, 4°) nous donne

$$r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) = x \quad r'(\cos\theta' + \sqrt{-1}\sin\theta').$$

Multiplions les deux membres de l'équation par $\frac{1}{r'}$, puis par

$$\cos\theta' - \sqrt{-1}\sin\theta' = \cos(-\theta') + \sqrt{-1}\sin(-\theta'),$$

en ayant égard à la règle ci-dessus; il viendra :

$$\frac{r}{r'}[\cos(\theta-\theta')+\sqrt{-1}\sin(\theta-\theta')]=x,$$

d'où

$$x=\frac{r(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)}{r'(\cos\theta'+\sqrt{-1}\sin\theta')}=\frac{r}{r'}[\cos(\theta-\theta')+\sqrt{-1}\sin(\theta-\theta')].$$

Le quotient de deux imaginaires a pour module le quotient de leurs modules, et pour argument la différence de leurs arguments.

Soient $r=1$, $\theta=0$, la formule devient

$$\frac{1}{r'(\cos\theta'+\sqrt{-1}\sin\theta')}=\frac{1}{r'}(\cos\theta'-\sqrt{-1}\sin\theta').$$

9. *Elévation aux puissances.* Pour élever $r(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)$ à la puissance m, m étant entier et positif, il suffit de supposer, dans la règle établie pour la multiplication des imaginaires, que les facteurs du produit soient égaux et en nombre m. On a

$$[r(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)]^m=r^m(\cos m\theta+\sqrt{-1}\sin m\theta).$$

De même, comme

$$[r(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)]^{-m}=\frac{1}{[r(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)]^m}$$
$$=\frac{1}{r^m(\cos m\theta+\sqrt{-1}\sin m\theta)},$$

on aura, d'après la remarque faite ci-dessus (8),

$$[r(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)]^{-m}=\frac{1}{r^m}(\cos m\theta-\sqrt{-1}\sin m\theta)$$
$$=r^{-m}[\cos(-m\theta)+\sqrt{-1}\sin(-m\theta)].$$

Cette formule est comprise dans la première, en admettant que le nombre m puisse être positif ou négatif.

Considérons les puissances fractionnaires. Elever $r(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)$ à la puissance $\frac{1}{n}$, c'est trouver une quantité imaginaire $\rho(\cos\zeta+\sqrt{-1}\sin\zeta)$

qui, élevée à la puissance n, reproduise la première; ou qui satisfasse à l'équation

$$[\rho(\cos\zeta + \sqrt{-1}\sin\zeta)]^n = r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta).$$

D'après ce qui précède, le premier membre est égal à

$$\rho^n(\cos n\zeta + \sqrt{-1}\sin n\zeta),$$

d'où les équations

$$\rho^n = r, \qquad \cos n\zeta = \cos\theta, \qquad \sin n\zeta = \sin\theta,$$

et par suite

$$\rho = r^{\frac{1}{n}}, \qquad n\zeta = \theta + 2k\pi, \qquad \zeta = \frac{\theta + 2k\pi}{n},$$

k désignant un nombre entier *arbitraire*, positif ou négatif. On a donc enfin, en remplaçant ρ et ζ par leurs valeurs,

$$(\alpha) \quad [r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right).$$

Portons sur la circonférence de rayon 1, à partir du point A pris pour origine des arcs, un arc AP égal à $\frac{\theta}{n}$; puis, partant du point P, divisons la circonférence en n parties égales; les arcs comptés du point A aux points de division auront pour valeurs respectives

$$\frac{\theta}{n}, \quad \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}, \ldots \quad \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \ldots;$$

ce seront les arguments des racines $n^{\text{ièmes}}$ de la quantité proposée. D'où il suit immédiatement que l'expression

$$[r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^{\frac{1}{n}}$$

admet n valeurs distinctes, et pas plus : on les obtient en prenant pour k, dans l'équation (α), n nombres consécutifs quelconques de la série

$$\ldots\ldots -3, \quad -2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \ldots$$

Corollaire. L'équation (α) fait connaître les diverses valeurs des expres-

sions $1^{\frac{1}{n}}$, $(-1)^{\frac{1}{n}}$: dans le premier cas, on fait $r=1$, $\theta=0$, et l'on a

$$1^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n};$$

dans le second, $r=1$, $\theta=\pi$, d'où

$$(-1)^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{2k+1}{n}\pi + \sqrt{-1}\sin\frac{2k+1}{n}\pi;$$

on prend toujours pour k n nombres consécutifs de la suite indéfinie donnée ci-dessus. D'où l'on voit, à cause de l'équation (α), que l'on obtient les n valeurs de $[r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^{\frac{1}{n}}$ en multipliant les n valeurs de $1^{\frac{1}{n}}$ par le facteur $r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{\theta}{n}\right)$.

On observera encore que les diverses valeurs des expressions $1^{\frac{1}{n}}$, $(-1)^{\frac{1}{n}}$, $[r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^{\frac{1}{n}}$, ne sont autre chose que les valeurs de z capables de satisfaire aux équations

$$z^n - 1 = 0, \qquad z^n + 1 = 0, \qquad z^n = r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta),$$

et qu'ainsi les formules ci-dessus donnent la résolution complète de ces équations. Les racines des deux premières jouissent de propriétés remarquables que nous n'étudierons pas ici (1).

Supposons enfin que l'on élève l'expression $r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$ à la puissance $\frac{m}{n}$, m et n étant entiers et premiers entr'eux. Il suffira de combiner les règles précédentes, et l'on obtiendra

$$[r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^{\frac{m}{n}} = r^{\frac{m}{n}}\left(\cos m\frac{\theta+2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin m\frac{\theta+2k\pi}{n}\right).$$

Remarque importante. On a vu que le module r et l'argument θ d'une quantité imaginaire peuvent être considérés comme les coordonnées

(1) Voir, pour plus de détails, les *Leçons de Géométrie analytique* de MM. Briot et Bouquet, Paris, 1847, p. 27; et l'*Algèbre supérieure* de M. Serret, 3e édition, t. I, p. 219.

polaires d'un point du plan, et que, en un même point, l'argument admet une infinité de valeurs comprises dans la formule $\theta + 2k\pi$. D'après cela, les règles précédentes pour former toutes les valeurs que prend une quantité imaginaire $r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$, élevée à une puissance quelconque marquée par μ, peuvent être renfermées dans cette seule formule

$$[r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^{\mu} = r^{\mu}(\cos\mu\theta + \sqrt{-1}\sin\mu\theta),$$

pourvu que l'on attribue à θ, dans cette équation, successivement toutes les valeurs que cette quantité comporte en un même point du plan.

10. *Racines imaginaires des équations.* — Soit

$$X = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

un polynôme rationnel et entier en x, les coefficients a_0, a_1,.... ayant des valeurs réelles ou imaginaires. Si l'on attribue à x une valeur imaginaire $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, il résulte des développements précédents que la valeur de X se réduira à une certaine quantité imaginaire

$$A + B\sqrt{-1},$$

A et B étant des quantités réelles. Or, si la valeur donnée à x est telle que l'on ait à la fois

$$A = 0, \quad B = 0,$$

et par conséquent $A + B\sqrt{-1} = 0$, on dit que $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ est une *racine* de l'équation $X = 0$. Si β est nul, la racine est réelle. On démontre dans les cours d'Algèbre qu'il existe toujours n valeurs de x qui satisfont à la condition $A + B\sqrt{-1} = 0$, et que, si l'on désigne par $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ l'une de ces racines, X est divisible algébriquement par $x - \alpha - \beta\sqrt{-1}$, c'est-à-dire que l'on a, quel que soit x,

$$X = (x - \alpha - \beta\sqrt{-1})X_1,$$

X_1 désignant un polynôme rationnel et entier de degré $n - 1$ par rapport à x. Il en résulte que, les n racines de l'équation $X = 0$ étant désignées par

$$\alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad \alpha_1 + \beta_1\sqrt{-1}, \ldots . \quad \alpha_{n-1} + \beta_{n-1}\sqrt{-1},$$

on aura identiquement pour toute valeur de x

$$X = H(x - \alpha - \beta\sqrt{-1})(x - \alpha_1 - \beta_1\sqrt{-1}) \dots (x - \alpha_{n-1} - \beta_{n-1}\sqrt{-1}),$$

H étant une quantité réelle ou imaginaire, mais indépendante de x.

11. *Application des principes précédents.* — On peut, au moyen des formules ci-dessus, résoudre facilement certains problèmes remarquables.

Proposons-nous, par exemple, d'exprimer $\cos m\theta$, $\sin m\theta$, m étant un nombre entier, au moyen des puissances de $\cos\theta$, $\sin\theta$. Pour cela, reprenons l'équation

$$\cos m\theta + \sqrt{-1}\sin m\theta = (\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)^m,$$

et développons le second membre par la formule du binôme de Newton. Il viendra

$$\cos m\theta + \sqrt{-1}\sin m\theta = \cos^m\theta + \sqrt{-1}\cdot m\cos^{m-1}\theta\sin\theta - \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\cos^{m-2}\theta\sin^2\theta$$
$$-\sqrt{-1}\cdot\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^{m-3}\theta\sin^3\theta + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cos^{m-4}\theta\sin^4\theta + \cdots$$

D'après les principes que nous avons établis, cette égalité se décompose en deux égalités réelles, qui sont

$$\cos m\theta = \cos^m\theta - \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\cos^{m-2}\theta\sin^2\theta + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cos^{m-4}\theta\sin^4\theta - \cdots$$
$$\sin m\theta = m\cos^{m-1}\theta\sin\theta - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^{m-3}\theta\sin^3\theta + \cdots$$

On peut les présenter sous différentes formes (1).

Le problème inverse consiste à exprimer $\cos^m\theta$, $\sin^m\theta$, au moyen des sinus et cosinus des multiples de θ. On y parvient comme il suit : Posons

$$\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta = \lambda,$$
$$\cos\theta - \sqrt{-1}\sin\theta = \mu,$$

(1) Voir le *Cours d'analyse algébrique* de Cauchy, p. 230.

d'où

$$\lambda\mu = 1, \quad \lambda + \mu = 2\cos\theta, \quad \lambda - \mu = 2\sqrt{-1}\sin\theta.$$

Nous aurons donc

$$2^m \cos^m \theta = (\lambda + \mu)^m = \lambda^m + m\lambda^{m-1}\mu + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\lambda^{m-2}\mu^2 + \cdots$$
$$+ \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\lambda^2\mu^{m-2} + m\lambda\mu^{m-1} + \mu^m;$$

ou, en groupant les termes également éloignés des extrêmes,

$$2^m \cos^m \theta = (\lambda^m + \mu^m) + m\lambda\mu(\lambda^{m-2} + \mu^{m-2})$$
$$+ \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\lambda^2\mu^2(\lambda^{m-4} + \mu^{m-4}) + \cdots.$$

Mais on a, d'après la définition des quantités λ, μ,

$$\lambda^k + \mu^k = (\cos k\theta + \sqrt{-1}\sin k\theta) + (\cos k\theta - \sqrt{-1}\sin k\theta) = 2\cos k\theta,$$
$$\lambda^k\mu^k = 1;$$

donc enfin, en divisant par 2,

$$2^{m-1}\cos^m\theta = \cos m\theta + m\cos(m-2)\theta + \frac{m(m-1)}{1-2}\cos(m-4)\theta + \cdots$$

Si m est pair, le dernier terme est celui qui en a $\frac{m}{2}$ avant lui, savoir

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{m(m-1)\cdots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1\cdot 2\cdots\frac{m}{2}};$$

si m est impair, le dernier terme est celui qui en a $\frac{m-1}{2}$ avant lui; s[a] valeur est

$$\frac{m(m-1)\cdots\left(\frac{m+3}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\frac{m-1}{2}}\cdot\cos\theta.$$

En développant de la même manière, par la formule du binôme, le second membre de l'équation

$$(2\sqrt{-1}\sin\theta)^m = (\lambda - \mu)^m,$$

et groupant encore les termes également distants des extrêmes, on trouve de même, pour m pair

$$2^m(\sqrt{-1})^m \sin^m\theta = (\lambda^m + \mu^m) - m\lambda\mu(\lambda^{m-2} + \mu^{m-2})$$

$$+ \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\lambda^2\mu^2(\lambda^{m-4} + \mu^{m-4}) + \cdots + (-1)^{\frac{m}{2}}\frac{m(m-1)\cdots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1\cdot 2\cdots\frac{m}{2}}\lambda^{\frac{m}{2}}\mu^{\frac{m}{2}};$$

ou bien, en raisonnant comme plus haut,

$$(-1)^{\frac{m}{2}}2^{m-1}\sin^m\theta = \cos m\theta - m\cos(m-2)\theta + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\cos(m-4)\theta - \cdots$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{(-1)^{\frac{m}{2}}m(m-1)\cdots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\frac{m}{2}}.$$

Si, au contraire, m est un nombre impair, on trouve

$$2^m(\sqrt{-1})^m\sin^m\theta = (\lambda^m - \mu^m) - m\lambda\mu(\lambda^{m-2} - \mu^{m-2})$$

$$\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\lambda^2\mu^2(\lambda^{m-4} - \mu^{m-4}) - \cdots + (-1)^{\frac{m-1}{2}}\frac{m(m-1)\cdots\left(\frac{m+3}{2}\right)}{1\cdot 2\cdots\frac{m-1}{2}}\lambda^{\frac{m-1}{2}}\mu^{\frac{m-1}{2}}(\lambda - \mu).$$

Or, on a en général

$$\lambda^k - \mu^k = 2\sqrt{-1}\sin k\theta,$$

donc

$$2^{m-1}(-1)^{\frac{m-1}{2}}\sin^m\theta = \sin m\theta - m\sin(m-2)\theta + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\sin(m-4)\theta - \cdots$$

$$+ (-1)^{\frac{m-1}{2}}\frac{m(m-1)\cdots\left(\frac{m+3}{2}\right)}{1\cdot 2\cdots\frac{m-1}{2}}\sin\theta.$$

Ces formules résolvent le problème proposé.

§ 3. DES VARIABLES ET DES FONCTIONS.

12. On nomme *variable* toute quantité qui, dans la question où on la considère, est supposée *actuellement* indéterminée, en sorte qu'elle peut recevoir successivement une infinité de valeurs différentes les unes des autres.

Une *constante* est une quantité qui, dans la question où on la considère, est censée conserver une valeur fixe et déterminée.

Lorsque deux variables x et y dépendent l'une de l'autre, tellement qu'en attribuant à x, par exemple, une valeur déterminée, celle de y le soit aussi, quelle que soit la nature de cette dépendance, quel que soit le système d'opérations numériques à effectuer sur la valeur donnée à x, pour calculer la valeur correspondante de y, la variable que l'on regarde comme dépendante de l'autre est dite une *fonction* de celle-ci.

De même, si une variable u dépend de plusieurs autres $x, y, z, \ldots$, en sorte que sa valeur soit déterminée lorsqu'on donne à celles-ci des valeurs déterminées, on dit que u est une *fonction* de $x, y, z, \ldots$.

Par exemple, dans l'équation

$$y = ax + bx^2$$

d'une parabole déterminée, les paramètres a et b sont des constantes; les coordonnées x et y sont des variables, et l'ordonnée y est une fonction de l'abscisse x. Généralement, dans l'équation d'une courbe donnée, on peut considérer l'ordonnée comme une fonction de l'abscisse, et réciproquement. Enfin, les diverses expressions que fournissent l'algèbre et la trigonométrie, lorsqu'elles renferment une ou plusieurs variables $x, y, z, \ldots$, sont des fonctions de celles-ci. Telles sont

$$\log x^2, \quad \sin(x+y), \quad x^2 + y^2 + z^2, \quad \text{etc.}$$

Lorsque l'on veut indiquer qu'une variable est fonction d'une seule variable x, sans préciser la nature de la liaison qui existe entr'elles, on la représente par une notation telle que

$$\mathrm{F}(x), \quad f(x), \quad \varphi(x), \quad \text{etc.}$$

De même, une fonction de plusieurs variables $x, y, z, \ldots$ se désignera par

$$\mathrm{F}(x, y, z, \ldots), \quad f(x, y, z, \ldots), \quad \varphi(x, y, z, \ldots), \quad \text{etc.}$$

13. Dans toute question où l'on a à considérer un système de variables, entre lesquelles existent certaines relations définies habituellement par des *équations* qui renferment ces variables, il y en a toujours une ou plusieurs dont les valeurs peuvent être regardées comme arbitraires : on leur donne le nom de *variables indépendantes*. Les autres, dont les valeurs se trouvent déterminées par celles des premières, sont toujours des *fonctions* de celles-ci. Dans l'exemple de la parabole, x était la variable indépendante, y étant regardé comme fonction de x. Trois équations entre cinq variables en laissent deux entièrement arbitraires : après qu'on aura choisi celles que l'on veut ainsi regarder comme *indépendantes*, les trois autres variables seront appelées des fonctions de ces deux-là.

14. *Classement des fonctions.* Lorsqu'une fonction de x est exprimée immédiatement au moyen de cette variable par des signes connus, indiquant le système d'opérations à faire sur une valeur donnée de la variable pour en tirer celle de la fonction, celle-ci est dite *explicite*. Ainsi dans les équations

$$y = x^2 + 3ax^4, \qquad y = \log(\sin x),$$

y est une fonction explicite de x. Quand il n'en est pas ainsi, quand par exemple les deux variables x et y sont liées entr'elles par une équation non résolue par rapport à y, on dit que y est une fonction *implicite* de x. C'est ce qui a lieu dans les équations

$$x^2 + y^2 = a^2, \qquad \log x + \log y = 1.$$

Les fonctions explicites sont *algébriques* ou *transcendantes*. Dans le premier cas, les seules opérations auxquelles la variable x soit soumise sont l'addition, la soustraction, la multiplication, la division et l'élévation à des puissances constantes, ou indépendantes de x. Ainsi la fonction

$$\frac{ax^3 + bx^{\frac{1}{2}} - c^2x^2}{(a + bx)^{\frac{3}{4}}}$$

est algébrique, quelles que soient les valeurs des constantes a, b, c.

Une fonction algébrique est *rationnelle*, lorsqu'elle ne renferme la variable sous aucun signe d'exposant fractionnaire; sinon, elle est *irrationelle*, comme c'est le cas pour la fonction citée plus haut. Enfin, une fonction rationnelle est *entière* ou *fractionnaire*, selon que la variable

dont elle dépend ne figure nulle part comme diviseur, ou que le contraire a lieu; dans le premier cas, l'exposant le plus élevé dont la variable est affectée détermine le *degré* de la fonction. Ainsi

$$a + bx + cx^3$$

est une fonction rationnelle, entière et du 3e degré en x; la fonction

$$\frac{a + bx}{\alpha + \beta x + \gamma x^2}$$

est rationnelle, mais fractionnaire.

Lorsqu'une fonction explicite de x ne peut être exprimée au moyen de la variable par un nombre *limité* de ces opérations simples indiquées plus haut, elle est *transcendante*. Telles sont

$$A^x, \quad \operatorname{tang} x, \quad \log(x^2), \quad \text{etc.}$$

Ce qui précède s'applique sans difficulté à une fonction de plusieurs variables, en la considérant successivement comme fonction de chacune d'elles.

15. Parmi les fonctions que l'on rencontre souvent dans l'analyse, on en a choisi un certain nombre que l'on regarde comme irréductibles à d'autres plus simples, et dont la valeur se détermine immédiatement quand celle de la variable est donnée. On les appelle fonctions *simples*. Ce sont, x étant la variable,

$$a+x, \quad ax, \quad x^a, \quad A^x, \quad \sin x, \quad \cos x, \quad \operatorname{tang} x, \quad \cot x, \quad \text{etc.},$$

et leurs inverses

$$a - x, \quad \frac{a}{x}, \quad x^{\frac{1}{a}}, \quad \log x, \quad \operatorname{arc}\sin x, \quad \operatorname{arc}\cos x, \quad \operatorname{arc}\operatorname{tang} x, \quad \text{etc.}$$

Dans ces expressions, a désigne une constante positive ou négative, et dont la valeur numérique est quelconque; A est une constante essentiellement positive; le signe *log* désigne le logarithme pris dans un système à base quelconque A, la caractéristique l. étant réservée pour indiquer le logarithme pris dans le système de Néper, dont la base est

$$e = 2{,}7182818.....$$

Quant aux fonctions trigonométriques, elles supposent qu'on ait décrit un cercle avec l'unité de longueur pour rayon; qu'à partir d'une origine

déterminée, on prenne sur la circonférence de ce cercle un arc dont la longueur soit mesurée par la variable x, et $\sin x$, $\cos x$,.... désignent les lignes trigonométriques correspondantes. Les fonctions inverses $\text{arc}\sin x$, $\text{arc}\cos x$, etc., se rapportent également à un cercle de rayon 1.

Si, dans une fonction simple, on remplace la variable par une fonction d'une autre variable, on obtient une *fonction de fonction;* telles sont :

$$y = \log(x^2), \quad y = \sin(e^x).$$

Toutes les autres fonctions explicites de x sont des fonctions *composées.*

§ IV. MÉTHODE DES LIMITES.

16. On appelle *limite* d'une quantité variable, une quantité fixe, dont les valeurs successives de la variable s'approchent *indéfiniment*, de manière que la différence entre la variable et cette quantité fixe finit par être constamment plus petite qu'une quantité *donnée,* si petite qu'elle soit, sans toutefois se réduire définitivement à zéro.

Exemple : le nombre entier n recevant des valeurs de plus en plus grandes, l'expression $\frac{n+1}{n}$ s'approche indéfiniment de l'unité, car on peut l'écrire

$$1 + \frac{1}{n},$$

et lorsque l'on fait croître indéfiniment le nombre n, le rapport $\frac{1}{n}$ finit par devenir moindre que toute fraction donnée, quelque petite qu'elle soit, sans jamais devenir nul rigoureusement. Le rapport $\frac{n+1}{n}$, lorsque n croît au-dessus de tout nombre donné, *est donc une quantité variable, qui a pour limite l'unité.*

De même, si l'on fait la somme d'un nombre n de termes de la suite indéfinie

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots$$

à partir du premier, on voit sans peine qu'elle diffère de l'unité d'une

quantité égale à $\frac{1}{2^n}$, qui finit par devenir moindre qu'un nombre donné quelconque, pour n suffisamment grand. La somme d'un nombre indéfiniment croissant de termes de cette suite est donc une quantité variable qui a pour limite l'unité.

De même encore, en géométrie, l'aire du cercle est la limite vers laquelle tend l'aire d'un polygone régulier inscrit, dont le nombre des côtés croît sans limite; en arithmétique, ce qu'on appelle *un nombre incommensurable* n'est autre chose que la limite des fractions, qui en fournissent des valeurs de plus en plus approchées, etc. Nous désignerons la limite d'une quantité variable par la notation *lim.* placée devant celle-ci.

Remarque. Il peut arriver qu'une variable s'approche et s'éloigne alternativement de sa limite : ainsi la fonction

$$y=\frac{\sin x}{x},$$

si l'on suppose que x passe par toutes les valeurs de zéro à l'infini, passe par une série de valeurs alternativement positives et négatives, et elle a néanmoins pour limite zéro. Le caractère *essentiel* de la limite d'une variable consiste en ce que la différence entre la variable et sa limite finit par être et rester toujours au-dessous d'une quantité fixe, si petite qu'on l'ait choisie.

17. La méthode des limites s'appuie sur le principe suivant, qui a la valeur d'un axiôme : *lorsque deux variables restent constamment égales dans tous les états successifs par lesquels elles passent, si l'une d'elles tend vers une certaine limite, l'autre tend nécessairement vers la même limite.*

De là résulte ce théorème fondamental :

Considérons une équation dont les deux membres soient des fonctions des variables $x, y, z, \ldots$, et que nous écrivons conséquemment sous la forme :

$$F(x, y, z, \ldots.) = f(x, y, z, \ldots.).$$

Concevons que les variables $x, y, z, \ldots.$ tendent simultanément, et d'une manière quelconque, vers des limites respectives $a, b, c, \ldots.$; et désignons, d'autre part, par $F(a, b, c, \ldots.)$ la valeur que prend la fonction F lorsqu'on y remplace x par a, y par b, etc.... Les fonctions $F(x, y, z, \ldots.)$,

$f(x, y, z, \ldots.)$ auront respectivement pour limites, *en général*, $F(a, b, c, \ldots.)$, $f(a, b, c, \ldots.)$, et comme, en vertu du principe ci-dessus, ces limites de quantités variables constamment égales sont égales, on aura nécessairement

$$F(a, b, c, \ldots.) = f(a, b, c, \ldots.);$$

c'est-à-dire que la même relation qui avait lieu entre les variables x, y, z,.... subsistera entre leurs limites a, b, c,...., et qu'il suffira de remplacer dans l'équation chaque variable par sa limite, pour obtenir la relation qui a lieu entre ces dernières.

Remarque. La démonstration suppose essentiellement que les fonctions F, f, lorsque x, y, z,... tendent vers leurs limites a, b, c,..., s'approchent indéfiniment des valeurs $F(a, b, c, \ldots)$, $f(a, b, c, \ldots)$ qu'elles affectent pour $x = a$, $y = b$, etc. Cette propriété des fonctions, sur laquelle nous reviendrons plus loin, appartient généralement aux fonctions usitées dans l'analyse : si, dans un cas particulier, elle cessait d'avoir lieu, le théorème cesserait d'être applicable.

Le théorème précédent est la base de la *méthode des limites*, qui consiste en ceci : pour trouver la relation qui existe entre certaines grandeurs que l'on ne sait pas comparer directement, on les regarde comme les limites d'autres grandeurs variables d'une nature plus simple, et que l'on peut facilement comparer entre elles. On établit donc la relation qui existe entre ces dernières; puis immédiatement, au moyen du théorème qui précède, on en tire la relation entre leurs limites, c'est-à-dire entre les grandeurs que l'on voulait précisément comparer.

Supposons, comme exemple très-simple, que l'on cherche une relation entre le volume V, la hauteur H et la base B d'un cône circulaire droit. Inscrivons dans le cercle de base un polygone régulier d'un nombre quelconque de côtés; soient B′ l'aire de ce polygone, V′ le volume de la pyramide dont le sommet est celui du cône. On sait, par des considérations directes, établir l'égalité

$$V' = \frac{1}{3} B' \cdot H.$$

D'autre part, on fera voir, par des raisonnements très-simples, que si le nombre des côtés du polygone croît indéfiniment, l'aire du polygone et le volume de la pyramide finiront par différer, respectivement, de

l'aire du cercle et du volume du cône, de quantités moindres que toute grandeur donnée, en sorte que l'on a dans cette hypothèse

$$lim.\ B' = B, \qquad lim.\ V' = V.$$

L'équation précédente donnera donc, en vertu du théorème,

$$V = \frac{1}{3} B \cdot H,$$

et l'on obtiendra ainsi, par la considération des limites, une relation entre des grandeurs qu'on ne pouvait comparer directement.

Autre exemple : On a vu dans la géométrie analytique que la condition de perpendicularité de deux droites est exprimée par l'équation

$$1 + aa' + (a + a') \cos \gamma = 0,$$

γ étant l'angle des axes coordonnés, a et a' les coefficients angulaires des deux droites. Mais cette équation ne convient pas au cas où l'une des droites est parallèle à l'axe des y, car son coefficient a devient alors infini ; et il faudrait calculer directement pour ce cas le coefficient λ de la perpendiculaire, si la méthode des limites ne nous permettait de le tirer de l'équation précédente. Pour cela, mettons d'abord l'équation sous la forme

$$\frac{1}{a} + a' + \left(1 + \frac{a'}{a}\right) \cos \gamma = 0,$$

et concevons que la première droite tende indéfiniment à devenir parallèle à l'axe des y : la seconde tendra à lui devenir perpendiculaire, a' aura pour limite λ, et comme $\frac{1}{a}$, $\frac{a'}{a}$ ont pour limite zéro, il viendra, en remplaçant chaque variable par sa limite,

$$\lambda + \cos \gamma = 0, \quad \text{ou} \quad \lambda = -\cos \gamma.$$

Cette valeur de λ est précisément celle à laquelle aurait conduit un calcul direct; mais, grâce à la méthode des limites, ce calcul est inutile.

Ces exemples suffisent pour faire saisir l'esprit de la méthode des limites, mais le reste du cours montrera des applications continuelles du principe fondamental.

18. Les quantités peuvent être regardées comme limites de plusieurs

manières différentes, et de là résultent autant de *branches* de la méthode des limites. Il y en a trois principales :

1° *Une quantité peut être regardée comme la limite vers laquelle tend la somme d'un nombre de plus en plus grand de termes, pris dans une suite indéfinie de quantités déterminées.*

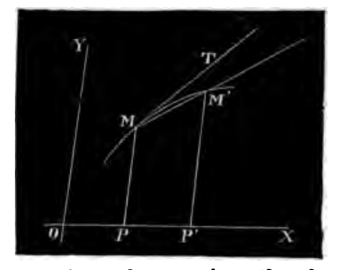
Ainsi, l'on a vu que l'unité est la limite de la somme des n premiers termes de la suite

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots,$$

n croissant indéfiniment. Ce mode d'application de la notion des limites donne naissance à la théorie des *séries*, théorie importante dont nous exposerons plus loin les éléments, quoiqu'elle ne fasse pas l'objet de ce cours.

2° *Elle peut être regardée comme la limite vers laquelle tend le rapport de deux grandeurs variables, qui tendent simultanément vers zéro, ou comme dépendant d'une telle limite.*

A ce point de vue se rattache le célèbre problème des tangentes aux courbes. Soit M un point donné sur une courbe plane; MM′ une sécante menée par ce point. Si l'on conçoit que le point M′ se rapproche indéfiniment, sur la courbe, du point M, la sécante MM′ tendra vers une position limite MT : cette limite des sécantes se nomme la *tangente* à la courbe au point M.



Nommons (x, y) les coordonnées du point M; $(x+h, y+k)$ celles du point M′; σ le coefficient angulaire de la droite MM′, τ celui de la limite MT. On a

$$\sigma=\frac{y+k-y}{x+h-x}=\frac{k}{h}.$$

Lorsque M′ se rapproche indéfiniment de M, d'une part, σ tend évidemment vers la limite τ; d'autre part, h et k convergent simultanément vers la limite zéro; mais leur rapport $\frac{k}{h}$, comme nous le verrons, tend généralement vers une limite déterminée et finie, que l'équation de la courbe

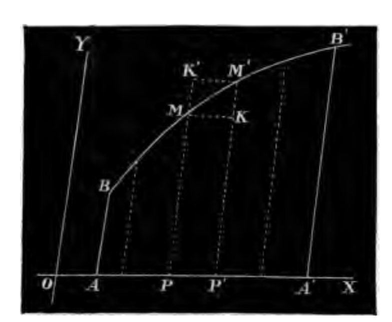
permet de calculer. Et comme des quantités égales tendent vers des limites égales, nous aurons

$$\tau = lim\,\frac{k}{h}.$$

Ainsi le problème de la détermination de la tangente se ramène à chercher la limite du rapport de deux variables tendant simultanément vers zéro.

3° Enfin, *la grandeur que l'on veut évaluer peut être regardée comme la limite vers laquelle tend une somme de quantités variables, qui tendent toutes à la fois vers zéro, en même temps que leur nombre croît indéfiniment.*

La mesure des aires planes offre un exemple de ce mode d'application des limites. Soit ABB'A' l'aire à évaluer, comprise entre une courbe, l'axe des x, et deux ordonnées AB, A'B'. On partage cette aire en un nombre quelconque de segments par des parallèles à l'axe des y; par les points M, M',... où elles coupent la courbe, on mène des parallèles à l'axe des x, et l'on démontre, comme nous le ferons plus loin, que la somme des aires des parallélogrammes tels que MPP'K a pour limite l'aire cherchée ABB'A', quand les divisions PP' de la base AA' sont supposées décroître indéfiniment, leur nombre augmentant au-delà de toute limite.



Il existe encore bien d'autres manières de considérer une quantité comme limite de quantités variables d'une nature plus simple, mais les deux derniers points de vue, auxquels nous nous attacherons spécialement, sont ceux qui servent de fondement à la *méthode infinitésimale.* Celle-ci n'est donc qu'une des formes de la méthode des limites.

Avant d'exposer les principes de la méthode infinitésimale, il importe de résumer quelques notions importantes sur les séries.

§ V. DES SÉRIES.

19. On appelle *série* une suite indéfinie de quantités

(1) $$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \dots \quad u_n, \dots.$$

qui se forment suivant une loi déterminée, de telle sorte que le rang d'un terme étant connu, cela suffise pour qu'on puisse le calculer. Le terme u_n se nomme le *terme général* : son expression, donnée en fonction de l'indice n, fait connaître toute la série. Soit

$$s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$$

la somme des n premiers termes de la série; si, pour des valeurs indéfiniment croissantes de n, la somme s_n tend vers une limite finie et déterminée s, la série (1) est dite *convergente*, et s est *la somme* de la série; si, au contraire, s_n croît sans limite ou ne tend vers aucune limite fixe, la série (1) est *divergente* et n'a pas de somme. Par exemple, la progression géométrique

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^n + \dots$$

est convergente, comme on sait, pour toute valeur de α entre zéro et l'unité, et a pour somme $\frac{1}{1-\alpha}$; elle est divergente pour toute valeur de α égale ou supérieure à l'unité.

Si la série (1) est convergente, il est clair que la série

$$u_n + u_{n+1} + \dots$$

est aussi convergente et a pour somme $s - s_n$; et en désignant par R_n la somme de cette série, en sorte que

$$s = s_n + R_n,$$

on dira que R_n est le *reste* de la série (1) à partir du n^{me} terme.

Il est clair aussi que si, à partir d'une certaine valeur de n, les termes

$$u_n + u_{n+1} + \dots.$$

forment une série convergente, la série (1) est elle-même convergente.

20. *Propriétés générales des séries.* — I. *Dans toute série convergente, le terme général u_n a pour limite zéro, lorsque n croît indéfiniment.*

En effet, les sommes s_n et s_{n+1} tendant alors vers la même limite s, leur différence

$$s_{n+1} - s_n = u_n$$

doit nécessairement finir par devenir moindre que toute grandeur donnée : elle a donc pour limite zéro.

Plus généralement, quelle que soit la valeur du nombre entier p, les sommes s_n, s_{n+p} tendant vers une même limite fixe s, leur différence

$$s_{n+p} - s_n = u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p-1}$$

doit nécessairement tendre vers zéro quand n croît indéfiniment, si la série est convergente. Et réciproquement, si la différence $s_{n+p} - s_n$ a pour limite zéro quand n croît sans limite, quelque valeur constante, ou variable, et même indéfiniment croissante, qu'on attribue au nombre p, la série (1) sera convergente. En effet, supposons que la condition soit remplie, et que la série soit divergente, en sorte que s_n, pour des valeurs indéfiniment croissantes de n, croisse sans limite ou oscille indéfiniment entre deux valeurs déterminées. On pourra donc toujours, quelque grand que soit n, ajouter à s_n un nombre p de termes suffisamment grand, pour que s_{n+p} diffère de s_n d'une quantité finie, supérieure à une limite donnée h (voir au n° 16). La différence $s_{n+p} - s_n$ ne finirait donc pas par rester constamment moindre que toute quantité assignée d'avance, et n'aurait conséquemment pas pour limite zéro, comme on l'a supposé. Donc

II. *La condition nécessaire et suffisante de la convergence de la série* (1), *est que la différence*

$$s_{n+p} - s_n$$

tende vers zéro pour des valeurs indéfiniment croissantes de n, quelque valeur qu'on attribue à p.

Cette proposition renferme la première, mais comme celle-ci indique une condition beaucoup plus facile à vérifier, il est utile de la conserver.

III. *Lorsqu'une série a tous ses termes respectivement moindres, en valeur absolue, que les termes correspondants d'une série convergente à termes positifs, elle est elle-même convergente;* car la différence $s_{n+p} - s_n$ a, dans la série proposée, une valeur numérique inférieure ou tout au

plus égale à celle qu'elle possède dans la série convergente, et comme dans celle-ci elle tend vers zéro, d'après ce qui précède, il en sera de même dans la proposée; d'où, etc.

IV. *Si l'on multiplie les termes successifs d'une série convergente à termes positifs*

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots,$$

par des facteurs de signes quelconques $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n, \ldots,$ *dont la valeur numérique ne dépasse jamais une limite donnée, la série ainsi formée*

$$\alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n + \cdots$$

sera encore convergente.

C'est encore une conséquence du théorème II, car dans cette série la différence $s_{n+p} - s_n$ a pour valeur

$$\alpha_n u_n + \alpha_{n+1} u_{n+1} + \cdots + \alpha_{n+p-1} u_{n+p-1}$$
$$= (u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p-1})\, \mathrm{M}(\alpha_n, \alpha_{n+1}, \ldots \alpha_{n+p-1});$$

le premier facteur tend vers zéro en même temps que $\frac{1}{n}$, par hypothèse; le second ne dépasse pas une quantité finie; le produit tend donc vers la limite zéro, ce qui détermine la convergence de la série que l'on a formée.

V. *Lorsqu'une série convergente reste telle en réduisant tous ses termes à leurs valeurs numériques, on peut intervertir d'une manière arbitraire l'ordre de ses termes sans altérer, ni sa convergence, ni sa valeur.*

Supposons que la série (1) soit convergente, que r_n désigne la valeur absolue de u_n, et que la série

$$r_0 + r_1 + r_2 + \cdots + r_n + \cdots$$

soit convergente. Nommons

$$(2) \qquad v_0 + v_1 + \cdots + v_m + \cdots$$

la série formée en disposant dans un autre ordre les termes de la série (1), et s'_m la somme de ses m premiers termes. Il est clair qu'on peut prendre m suffisamment grand pour que s'_m renferme les n premiers termes de la série (1), avec d'autres d'un rang plus élevé, en sorte que

$$s'_m = s_n + u_\alpha + u_\beta + \cdots + u_\lambda,$$

α, β,.. λ étant compris entre $n-1$ et $n+p-1$. Donc

$$s'_m - s_n = u_\alpha + u_\beta + \cdots + u_\lambda \overline{\overline{<}} r_\alpha + r_\beta + \cdots + r_\lambda$$

$$\overline{\overline{<}} r_n + r_{n+1} + \cdots + r_{n+p-1}.$$

Faisons croître indéfiniment n, et par suite m; le dernier membre de l'inégalité précédente tend vers zéro, à cause de la convergence de la série

$$r_0 + r_1 + \cdots + r_n + \cdots;$$

s_n a pour limite s, somme de la série (1); donc

$$\lim s'_m = s,$$

C. Q. F. D.

On voit qu'il n'est pas permis d'intervertir arbitrairement l'ordre des termes d'une série convergente, sans s'être assuré que celle-ci satisfait à la condition précédente. Ainsi, les séries

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots,$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots,$$

composées des mêmes termes affectés des mêmes signes, ont leurs sommes dans le rapport de 1 à $\frac{3}{2}$.

La nécessité de la convergence d'une série étant établie, il importe d'indiquer les règles principales qui permettent de prononcer sur la convergence ou la divergence d'une série donnée.

21. *Séries dont tous les termes sont positifs.* Supposons que la série

$$(1) \qquad u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots$$

ait tous ses termes positifs, auquel cas, si s_n ne croît pas indéfiniment avec n, la série est nécessairement convergente. On peut généralement s'assurer de sa convergence au moyen du théorème suivant :

VI. *Si le rapport* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, *à partir d'une certaine valeur de* n, *reste constamment moindre qu'une quantité* k *plus petite que l'unité, la série*

(1) *est convergente; s'il reste constamment supérieur à l'unité, la série est divergente.*

En effet, dans le premier cas, à partir de cette valeur de n, l'on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < k, \quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} < k, \quad \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} < k, \ldots,$$

d'où

$$u_{n+1} < u_n \cdot k, \quad u_{n+2} < u_n \cdot k^2, \quad u_{n+3} < u_n \cdot k^3, \ldots.$$

La série

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

a donc tous ses termes respectivement moindres que les termes de même rang de la progression géométrique

$$u_n + u_n k + u_n k^2 + u_n k^3 + \cdots,$$

qui est convergente, puisque $k < 1$. Donc, d'après la propriété III, elle est elle-même convergente, et par suite la série (1).

Dans le second cas, les termes de la série, à partir d'un certain rang, ont constamment en croissant, la première condition de convergence st pas remplie.

COROLLAIRE. *Si le rapport* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *tend vers une limite déterminée* λ, *lorsque* n *croît sans limite, la série est convergente ou divergente selon que* λ *est* $<$ *ou* $>$ *que l'unité.* En effet, dans le premier cas, il suffit de prendre un nombre k compris entre 1 et λ, et moindre conséquemment que l'unité : le rapport d'un terme au précédent finira (16) par être constamment moindre que k, donc la série sera convergente. Par la même raison, dans le second cas, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ finira par être constamment supérieur à l'unité, la série sera divergente.

Exemple : La série

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots n} + \cdots$$

est convergente, car le rapport

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n}$$

a pour limite zéro.

Lorsque la limite λ est égale à l'unité, et que d'ailleurs $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ne reste pas constamment supérieur à sa limite, le théorème précédent ne suffit plus pour décider de la convergence ou de la divergence de la série.

VII. *Si, à partir d'une certaine valeur de n, l'expression*

$$(u_n)^{\frac{1}{n}}$$

est constamment moindre qu'une quantité fixe k plus petite que l'unité, la série (1) *est convergente; elle est divergente, au contraire, si* $(u_n)^{\frac{1}{n}}$ *finit par être toujours plus grand que l'unité.*

En effet, dans le premier cas, pour toutes les valeurs de n qui suivent la proposée, on a

$$(u_n)^{\frac{1}{n}} < k \qquad \text{ou} \qquad u_n < k^n.$$

Les termes de la série (1) sont donc, à partir d'un certain rang, inférieurs à ceux de la progression géométrique *convergente*

$$1, k, k^2, \dots k^n, \dots,$$

ce qui suffit pour démontrer la convergence de la série (1).

Dans le second cas, u_n reste constamment plus grand que l'unité.

Corollaire. — *Si* $(u_n)^{\frac{1}{n}}$ *tend vers une limite* λ *pour des valeurs indéfiniment croissantes de n, la série* (1) *est convergente si* $\lambda < 1$, *divergente si* $\lambda > 1$.

Ce corollaire se démontre comme le précédent.

Exemple : Dans la série

$$1 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{4}{3}x\right)^2 + \left(\frac{5}{4}x\right)^3 + \dots + \left(\frac{n+2}{n+1}x\right)^n + \dots$$

on a

$$(u_n)^{\frac{1}{n}} = \frac{n+2}{n+1}x = \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}x,$$

dont la limite est x lorsque n croît sans limite. Cette série est donc convergente si $x < 1$, divergente si $x > 1$.

Ce criterium devient aussi insuffisant lorsque $\lambda = 1$: il faut alors recourir à des règles spéciales que nous n'indiquerons pas ici (V. note 1[re]).

22. *Séries dont les termes ne sont pas tous de même signe.* — Lorsqu'une série a tous ses termes négatifs, elle rentre évidemment dans le cas que nous venons d'étudier. Considérons donc le cas où les termes de la série ont des signes quelconques : la remarque suivante suffit souvent pour décider de la convergence ou de la divergence.

VIII. *La série*

$$(1) \qquad u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots$$

est toujours convergente, lorsque la série obtenue en réduisant chaque terme à sa valeur absolue est convergente.

En effet, soit r_n la valeur numérique de u_n; on a

$$s_{n+p} - s_n = u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p-1} \leqq r_n + r_{n+1} + \cdots + r_{n+p-1},$$

et comme on suppose convergente la série qui a pour terme général r_n, cette dernière quantité tend vers zéro, donc on a

$$\lim (s_{n+p} - s_n) = 0.$$

Il suit de là que les règles du numéro précédent seront applicables aux séries à termes positifs et négatifs; ainsi, lorsque le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ réduit à sa valeur numérique, tend vers une limite λ pour des valeurs indéfiniment croissantes de n, la série (1) est convergente si $\lambda < 1$, divergente si $\lambda > 1$, etc....

Mais une série peut encore être convergente, lorsque la série formée des valeurs absolues de ses termes est divergente : le théorème suivant est alors souvent applicable.

IX. *Lorsque les termes de la série* (1) *sont, à partir d'un certain rang, alternativement positifs et négatifs, et de plus constamment et indéfiniment décroissants, la série est convergente. Le reste à partir d'un terme déterminé est moindre que le terme suivant.*

Soit u_n un terme à partir duquel les conditions ci-dessus sont remplies. On aura

$$s_{n+p} - s_n = u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p-1} = \pm (r_n - r_{n+1} + r_{n+2} - \cdots \pm r_{n+p-1}).$$

Par hypothèse, $r_n > r_{n+1} > r_{n+2} \ldots$; donc la quantité

$$r_n - r_{n+1} + \cdots \pm r_{n+p-1}$$

est 1° positive; 2° moindre que r_n, puisqu'on peut l'écrire

$$r_n - (r_{n+1} - r_{n+2}) - (r_{n+3} - r_{n+4}) - \cdots$$

Donc

$$\text{val. num.}\,(s_{n+p} - s_n) = \mathrm{M}(0, r_n),$$

et comme r_n tend vers zéro lorsque n croît sans limite, il en est de même de $s_{n+p} - s_n$, C. Q. F. D.

L'égalité précédente ayant lieu quelque soit p, on peut supposer n fixe et p indéfiniment croissant, et l'on aura

$$s - s_n = \mathrm{R}_n = \mathrm{M}(0, r_n).$$

On a ainsi une limite de l'erreur commise en arrêtant la série à son n^{me} terme.

Application. La série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

est convergente, quoique la série des valeurs absolues des termes

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots,$$

que l'on nomme *série harmonique*, soit divergente. En effet, on a pour celle-ci, en prenant $p = n$,

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} \times n > \frac{1}{2};$$

cette quantité ne tend pas vers zéro avec $\frac{1}{n}$, la série est divergente.

Corollaire. *Si, dans une série dont les termes sont affectés de signes quelconques, les groupes successifs formés par les termes positifs et par les termes négatifs ont des valeurs constamment et indéfiniment décroissantes, la série est convergente.* Car la série formée par ces groupes successifs est convergente, d'après le théorème précédent; et l'on voit sans peine que sa convergence entraîne celle de la série proposée.

23. *Séries imaginaires.* Une série dont le terme général u_n est une quantité imaginaire $p_n + q_n\sqrt{-1}$, se nomme une *série imaginaire.* Désignons par

$$\begin{aligned} s_n &= (p_0 + q_0\sqrt{-1}) + (p_1 + q_1\sqrt{-1}) + \cdots + (p_{n-1} + q_{n-1}\sqrt{-1}) \\ &= (p_0 + p_1 + \cdots + p_{n-1}) + (q_0 + q_1 + \cdots + q_{n-1})\sqrt{-1} \end{aligned}$$

la somme de ses n premiers termes. Si, pour des valeurs indéfiniment croissantes de n, s_n tend vers une limite finie et déterminée, la série est convergente : il faut et il suffit, pour cela, que les séries réelles

$$p_0 + p_1 + \cdots + p_n + \cdots, \qquad q_0 + q_1 + \cdots + q_n + \cdots,$$

soient convergentes, et si l'on désigne par P, Q, leurs sommes respectives, la *somme* de la série imaginaire sera $P + Q\sqrt{-1}$.

24. Soit

$$(1) \qquad u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots$$

une série imaginaire ; posons

$$u_n = r_n(\cos\theta_n + \sqrt{-1}\sin\theta_n).$$

On pourra souvent s'assurer de la convergence de la série (1) à l'aide de ce théorème :

X. *Une série imaginaire est convergente, lorsque la série formée des modules de ses différents termes est convergente.*

Supposons, en effet, que la série

$$r_0 + r_1 + r_2 + \cdots + r_n + \cdots$$

dont les termes sont positifs, soit convergente. D'après le théorème III, les séries

$$\begin{aligned} &r_0\cos\theta_0 + r_1\cos\theta_1 + \cdots + r_n\cos\theta_n + \cdots, \\ &r_0\sin\theta_0 + r_1\sin\theta_1 + \cdots + r_n\sin\theta_n + \cdots, \end{aligned}$$

formées en multipliant les termes de la première par des facteurs $\cos\theta_n$, $\sin\theta_n$, qui ne peuvent dépasser l'unité, sont également convergentes. Il en est donc de même de la série

$$r_0(\cos\theta_0 + \sqrt{-1}\sin\theta_0) + r_1(\cos\theta_1 + \sqrt{-1}\sin\theta_1) + \cdots.$$

Mais une série imaginaire peut évidemment être convergente, sans que la série des modules le soit.

XI. *Si une série imaginaire reste convergente lorsque l'on réduit les différents termes à leurs modules, on peut intervertir arbitrairement l'ordre de ces termes sans altérer la convergence de la série, ni sa valeur.*

Cette propriété, analogue au théorème V, se démontre de la même manière, en appliquant le raisonnement du n° 20 aux deux séries réelles dont se compose la série imaginaire, et désignant par r_n, non la valeur numérique, mais le module de u_n.

25. *Combinaison des séries.* — XII. *Si les séries réelles ou imaginaires*

$$(1)\qquad u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots,$$
$$(2)\qquad v_0 + v_1 + \cdots + v_n + \cdots$$

sont convergentes et ont pour sommes respectives s et s', la série

$$(u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) \cdots + (u_n + v_n) + \cdots$$

sera convergente et aura pour somme $s + s'$.

Car les sommes, s_n et s'_n, des n premiers termes des séries (1) et (2), ayant respectivement pour limites s et s', la somme $s_n + s'_n$ des n premiers termes de la nouvelle série aura pour limite $s + s'$, lorsque n croîtra indéfiniment. Ce théorème concerne l'*addition* des séries, le suivant leur *multiplication*.

XIII. *Les séries* (1) *et* (2), *réelles ou imaginaires, étant convergentes, si elles restent telles lorsqu'on réduit chaque terme à son module, la série*

$$(3)\qquad u_0v_0 + (u_0v_1 + u_1v_0) + (u_0v_2 + u_1v_1 + u_2v_0) + \cdots,$$

qui a pour terme général

$$u_0v_n + u_1v_{n-1} + \cdots + u_{n-1}v_1 + u_nv_0,$$

est convergente, et a pour somme ss'.

1° Supposons d'abord que u_n, v_n soient réels et positifs, et formons les les sommes

$$s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}, \qquad s'_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1},$$
$$s''_n = u_0v_0 + (u_0v_1 + u_1v_0) + \cdots + (u_0v_{n-1} + u_1v_{n-2} + \cdots + u_{n-1}v_0),$$

des n premiers termes des séries (1), (2) et (3). Le produit $s_ns'_n$ renfermera évidemment tous les termes qui figurent dans s''_n, plus un certain nombre d'autres termes positifs, donc

$$s''_n < s_ns'_n.$$

D'autre part, si l'on désigne par m le nombre entier immédiatement inférieur à $\frac{n-1}{2}$, il est facile de voir que le produit $s_m s'_m$ ne renfermera que des termes dans lesquels la somme des indices de u et de v sera inférieure à $n-1$, termes qui seront tous compris dans s''_n. Donc

$$s''_n > s_m s'_m.$$

Faisons croître indéfiniment m, et par suite n; $s_m s'_m$ ayant pour limite ss', de même que $s_n s'_n$, la quantité s''_n, toujours comprise entre deux autres, dont la limite commune est ss', tend nécessairement elle-même vers cette limite. La série (3) est donc convergente et a pour somme ss'.

2° Les séries (1) et (2) étant maintenant imaginaires, soient r_n, r'_n les modules respectifs de u_n et v_n. En développant les valeurs de $s_n s_n'$, et de s''_n, on trouve sans peine

$$s_n s'_n - s''_n = u_{n-1}v_{n-1} + (u_{n-1}v_{n-2} + u_{n-2}v_{n-1}) + \cdots$$

Le module d'une somme étant moindre que la somme des modules de ses termes, on a

$$\text{mod}\,(s_n s'_n - s''_n) < r_{n-1}r'_{n-1} + (r_{n-1}r'_{n-2} + r_{n-2}r'_{n-1}) + \cdots$$

Cette somme tend vers zéro en même temps que $\frac{1}{n}$, car elle n'est autre chose que ce que deviendrait $s_n s'_n - s''_n$ si, dans les séries (1) et (2), on réduisait chaque terme à son module; et comme, par hypothèse, ces séries resteraient convergentes, et à termes positifs, la proposition leur serait applicable et la différence $s_n s'_n - s''_n$ aurait toujours pour limite zéro. Donc on a

$$lim\ \text{mod}\,(s_n s'_n - s''_n) = 0,$$

et par suite

$$lim\ (s_n s'_n - s''_n) = 0;$$

d'où enfin

$$lim\ s''_n = ss',$$

comme dans le premier cas. Il faut remarquer que ce second cas comprend celui où les termes des séries (1) et (2) sont réels et de signes quelconques : le module d'un terme négatif se réduisant, comme on sait, à sa valeur numérique.

Le théorème XIII sert à développer en série convergente le produit de deux facteurs, dont chacun est déjà développé en série.

26. *Limite de l'expression* $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$. Considérons la série indéfinie convergente

$$(3) \qquad 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots\cdot+\frac{1}{1\cdot 2\cdots n}+\cdots\cdot,$$

dont nous désignerons la somme par e. Nous nous proposons de démontrer que, la quantité α tendant vers zéro suivant une loi quelconque, l'expression

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$$

tend vers une limite égale à e.

Supposons d'abord que α soit de la forme $\frac{1}{m}$, m désignant un nombre *entier* indéfiniment croissant. On a, par la formule du *binôme*,

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+m\cdot\frac{1}{m}+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{m^2}+\cdots\cdot+\frac{1}{m^m}.$$

Le terme de ce développement qui en a p avant lui est

$$\frac{m(m-1)\cdots(m-p+1)}{1\cdot 2\cdots p}\cdot\frac{1}{m^p}=\frac{1}{1\cdot 2\cdots p}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\cdot\left(1-\frac{p}{m}\right),$$

et sous cette forme, on voit 1° qu'il est positif, puisque les facteurs sont tous positifs; 2° qu'il croît constamment lorsque m reçoit des valeurs indéfiniment croissantes, p ayant une valeur constante; 3° qu'il s'approche alors indéfiniment de $\frac{1}{1\cdot 2\cdots p}$ en restant inférieur à cette limite, car les facteurs $\left(1-\frac{1}{m}\right),\ldots\left(1-\frac{p}{m}\right)$ tendent vers l'unité.

De là il résulte déjà que $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ a une valeur positive constamment croissante avec m, puisque, d'une part, chaque terme du développement croît; d'autre part, le nombre $m+1$ de ces termes augmente. En outre, cette valeur est toujours moindre que e, car chaque terme du développement de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ est moindre que le terme de même rang de la série *indéfinie* dont e est la somme. La variable $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, qui croît

toujours sans pouvoir dépasser une quantité donnée e, a nécessairement une limite égale ou inférieure à e.

Soit ε une quantité, prise aussi petite qu'on le veut. On peut choisir un nombre k suffisamment grand pour que la somme

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots k}$$

des $k+1$ premiers termes de la série (3) soit comprise entre e et $e-\varepsilon$; ce nombre étant fixé, on peut donner à m une valeur suffisamment grande, pour que la somme des $k+1$ premiers termes de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ diffère, de la somme des $k+1$ premiers termes de la série (3), d'une quantité moindre que ε, et soit par conséquent comprise entre e et $e - 2\varepsilon$; donc aussi

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \mathrm{M}\ (e,\ e-2\varepsilon),$$

m étant suffisamment grand. On a donc

$$lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e.$$

Supposons, en second lieu, que α tende vers zéro suivant une loi quelconque, mais en restant positif; et soient m, $m+1$ deux nombres entiers consécutifs, entre lesquels $\frac{1}{\alpha}$ demeure compris. On aura donc

$$\frac{1}{\alpha} = m + \gamma, \quad \gamma = \mathrm{M}\ (0,\ 1),$$

et par suite

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(1+\frac{1}{m+\gamma}\right)^{m+\gamma} < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+\gamma} < \left(1+\frac{1}{m}\right)^m \left(1+\frac{1}{m}\right).$$

D'autre part

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > \left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+\gamma} > \left(1+\frac{1}{m+1}\right)^m > \left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1} : \left(1+\frac{1}{m+1}\right).$$

Lorsque α tend vers zéro, m et $m+1$ croissent indéfiniment; $1+\frac{1}{m}$,

$1+\frac{1}{m+1}$ ont pour limite l'unité, tandis que, d'après ce qui a été établi, $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, $\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}$ ont pour limite commune e; $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ est donc compris entre deux quantités qui ont une même limite e, et tend vers cette limite.

Il nous reste à considérer le cas où α, en tendant vers zéro, serait constamment négatif. Nous poserons

$$1+\alpha=\frac{1}{1+\beta},$$

et comme $1+\alpha$ est ici moindre que l'unité qui est sa limite, il faut que $1+\beta$ soit >1, donc β est positif et tend vers zéro. Or, nous avons

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=(1+\beta)^{-\frac{1}{\alpha}}=(1+\beta)^{\frac{1+\beta}{\beta}}=(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}(1+\beta).$$

De ces deux facteurs le premier a pour limite e, d'après ce qui précède; le second a pour limite l'unité; le produit, ou $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, a donc encore pour limite e.

Il résulte de tout cela que, de quelque manière que α tende vers la limite zéro, on a toujours

$$lim\,(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e.$$

La série (3) permet de calculer le nombre e avec autant d'approximation qu'on le veut : on trouve

$$e=2,7182818284\ldots$$

Ce nombre joue un rôle très-important dans l'analyse (15).

Corollaire. On déduit de ce qui précède la limite de $\frac{\mathrm{l}.(1+\alpha)}{\alpha}$, α tendant vers zéro. Il suffit de poser

$$\frac{\mathrm{l}.(1+\alpha)}{\alpha}=z,$$

d'où

$$\mathrm{l}.(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=z,\quad (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e^z,$$

et comme le premier membre de cette dernière égalité a pour limite e, on a

$$lim\ e^z = e,$$

d'où

$$lim\ z = lim\ \frac{l.(1+\alpha)}{\alpha} = 1.$$

§ 6. MÉTHODE INFINITÉSIMALE.

27. D'après ce que l'on a vu plus haut (18), la méthode infinitésimale consiste à *établir les relations qui existent entre des grandeurs quelconques, en les considérant comme limites de rapports, ou comme limites de sommes, d'autres quantités variables qui ont pour limite zéro, et entre lesquelles il est plus facile d'établir la comparaison.*

La rigueur, la fécondité et la simplicité de cette méthode dépendent surtout de deux propositions générales que nous allons établir, après avoir posé quelques définitions.

On appelle *quantité infiniment petite,* ou simplement *infiniment petit, toute quantité variable qui a pour limite zéro.*

Ainsi, dans le problème des tangentes (18, 2°) h et k sont des quantités infiniment petites; dans celui des aires (18, 3°), les parallélogrammes tels que MPP'K sont des infiniment petits, etc.

De même, lorsqu'une quantité variable reçoit des valeurs indéfiniment croissantes, en sorte qu'elle finit par dépasser tout nombre *donné,* on dit qu'elle devient *infiniment grande,* ou qu'elle a *pour limite l'infini.*

Enfin, lorsque le rapport d'une quantité variable à une autre tend vers la limite zéro, la première est dite *infiniment petite par rapport à la seconde.*

28. THÉORÈME I. — *La limite du rapport de deux quantités infiniment petites α et β n'est pas changée, lorsqu'on remplace ces quantités par d'autres α' et β', pourvu que les rapports des premières à celle-ci aient respectivement pour limite l'unité,* c'est-à-dire, que l'on ait

$$lim\ \frac{\alpha}{\alpha'} = 1, \qquad lim\ \frac{\beta}{\beta'} = 1.$$

En désignant par p, p' les rapports $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\alpha'}{\beta'}$, on a

$$\frac{p}{p'} = \frac{\alpha}{\beta} : \frac{\alpha'}{\beta'} = \left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right) : \left(\frac{\beta}{\beta'}\right).$$

Les deux termes de ce rapport ayant pour limite l'unité, le rapport lui-même a pour limite l'unité, donc

$$lim \frac{p}{p'} = 1, \quad lim\, p = lim\, p',$$

ce que nous voulions établir.

L'observation suivante facilite souvent l'emploi de ce théorème. Soient α, α' deux infiniment petits dont le rapport a pour limite l'unité; ε une quantité comprise entre α et α', en sorte que l'on ait

$$\alpha > \varepsilon > \alpha'.$$

Divisant par α' ces inégalités, on a

$$\frac{\alpha}{\alpha'} > \frac{\varepsilon}{\alpha'} > 1,$$

et comme, par hypothèse, $lim \frac{\alpha}{\alpha'} = 1$, le rapport $\frac{\varepsilon}{\alpha'}$ reste compris entre l'unité et une quantité variable qui s'approche indéfiniment de l'unité : il a donc lui-même pour limite 1. On a donc

$$lim \frac{\varepsilon}{\alpha'} = 1, \quad lim \frac{\varepsilon}{\alpha} = 1.$$

Si α était négatif, la division par α' changerait le sens des inégalités, mais non la conclusion.

Exemple : On montre, dans la trigonométrie, que la longueur de l'arc est toujours comprise entre celles de son sinus et de sa tangente. Soit α un arc infiniment petit, on a donc

$$\alpha = \mathrm{M}\,(\sin \alpha, \mathrm{tg}\alpha).$$

Or

$$\frac{\sin \alpha}{\mathrm{tg}\, \alpha} = \cos \alpha,$$

dont la limite est l'unité quand α tend vers zéro. Donc, les rapports

$$\frac{\alpha}{\sin \alpha}, \quad \frac{\alpha}{\mathrm{tang}\, \alpha},$$

ont pour limite l'unité, ainsi que leurs réciproques. Ainsi, dans tout rapport dont un des termes sera l'une des quantités infiniment petites α, $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, on pourra la remplacer par l'une des deux autres, sans que la limite du rapport proposé soit nullement altérée.

29. Théorème II. — *La limite d'une somme de quantités infiniment petites de même signe, dont le nombre croît indéfiniment, n'est pas changée lorsqu'on remplace ces quantités par d'autres, pourvu que les rapports des premières à celles-ci aient respectivement pour limite l'unité.*

Soient $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_m$ des infiniment petits de même signe; $\beta_1, \beta_2, .., \beta_m$ d'autres infiniment petits, tels, que les rapports

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \ldots, \frac{\alpha_m}{\beta_m},$$

tendent vers l'unité lorsque m croît indéfiniment. D'après une proposition connue, on a (1)

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m}{\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_m} = \mathrm{M}\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \ldots, \frac{\alpha_m}{\beta_m}\right),$$

et tous ces rapports convergeant vers l'unité, le premier membre a pour limite l'unité; ce qui exige évidemment que l'on ait

$$lim(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m) = lim(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_m).$$

Si l'une des deux sommes était constamment égale à une valeur fixe A, l'autre aurait pour limite cette quantité A.

30. Les deux propositions précédentes peuvent s'énoncer d'une autre manière, eu égard à la remarque qui suit :

Théorème III. — *Lorsque deux infiniment petits α et α' ont pour limite de leur rapport l'unité, leur différence δ est infiniment petite par rapport à chacun d'eux, et réciproquement.*

En effet, l'équation

$$\delta = \alpha - \alpha'$$

peut s'écrire :

$$\frac{\delta}{\alpha'} = \frac{\alpha}{\alpha'} - 1,$$

et le second membre ayant pour limite zéro par hypothèse, il en est de même du premier; donc δ est infiniment petit par rapport à α' (27).

onnue,

$$(2x + h) + 2 \sin\frac{1}{2}k \cdot \cos\frac{1}{2}(2y + k) = 0.$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}k}{\sin\frac{1}{2}h} = -\frac{\cos\left(x + \frac{1}{2}h\right)}{\cos\left(y + \frac{1}{2}k\right)}.$$

application du premier théorème : h et k étant infini-

eut remplacer $\sin\frac{1}{2}h$ par $\frac{1}{2}h$, $\sin\frac{1}{2}k$ par $\frac{1}{2}k$, sans

lu rapport ; donc

$$\frac{k}{h} = -\lim \frac{\cos\left(x + \frac{1}{2}h\right)}{\cos\left(y + \frac{1}{2}k\right)} = -\frac{\cos x}{\cos y},$$

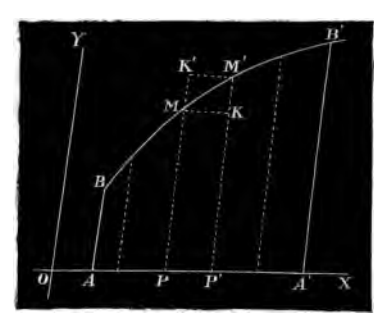
$$\tau = -\frac{\cos x}{\cos y}$$

ient angulaire cherché, ce qui suffit pour déterminer la courbe, au point (x, y).

le très-simple nous conduit à une conclusion importante : l'expression générale du coefficient angulaire τ que si, au l'équation d'une courbe, on savait déterminer d'une manière partir d'une valeur quelconque de l'abscisse, la limite du rap- ccroissements infiniment petits h et k, on saurait aussi mener e en un point quelconque de la courbe. Or, en vertu de l'équa- ne de la courbe, l'ordonnée est une fonction déterminée de ; nous sommes donc conduits à nous poser ce problème d'analyse : *miner la limite du rapport des accroissements infiniment petits ondants d'une fonction et de la variable dont elle dépend, à partir aleur quelconque de cette dernière.*

problème est proprement l'objet du *calcul différentiel,* mais sa solu- embrassera celle de beaucoup de problèmes, autres que celui des ntes.

32. *Limites de sommes.* Reprenons la question de l'aire comprise entre une courbe, l'axe des x, et deux ordonnées AB, A'B' de cette courbe (18, 3°). Après avoir, comme nous l'avons dit, partagé cette aire en segments MPP'M' par des parallèles à l'axe des y, l'évaluation de ces segments curvilignes offrirait les mêmes difficultés que celle de l'aire ABB'A' elle-même. Mais si, par les sommets M des ordonnées, on mène des parallèles MK à l'axe des x, on pourra, lorsque l'on fera tendre vers zéro les divisions PP' de la base AA', substituer aux éléments MPP'M' de l'aire de la courbe, les parallélogrammes infiniment petits MPP'K, sans que la limite de leur somme soit altérée par cette substitution, car le rapport des aires MPP'M', MPP'K a pour limite l'unité. En effet, menons par le point M', M'K' égal et parallèle à MK; les parallélogrammes MPP'K, K'PP'M', de même base PP', sont entr'eux comme leurs côtés MP, M'P', dont le rapport a évidemment pour limite l'unité quand P' se rapproche indéfiniment de P. Le rapport des aires MPP'K, K'PP'M' tend donc vers l'unité; l'aire MPP'M', comprise entre les deux précédentes (car PP' étant infiniment petit, on peut supposer que l'ordonnée varie toujours dans le même sens entre M et M'), a donc avec chacune d'elles un rapport qui a pour limite l'unité.



Ainsi, comme conséquence du second théorème fondamental, l'aire cherchée ABB'A' peut être considérée comme la limite de la somme des aires des parallélogrammes MPP'K, construits sur les ordonnées de la courbe, et sur les accroissements infiniment petits correspondants de l'abscisse.

Soit, par exemple, à évaluer l'aire de la courbe

$$y = e^x,$$

entre deux ordonnées correspondantes à $x = a$, $x = b$. Divisons la portion $b - a$ de l'axe des x en m parties égales à α, d'où

$$b - a = m\alpha;$$

les ordonnées correspondantes aux points de division seront

$$y = e^a, \quad y = e^{a+\alpha}, \quad y = e^{a+2\alpha}, \quad \ldots y = e^{a+(m-1)\alpha};$$

la somme des aires des rectangles inscrits aura donc pour expression

$$\alpha[e^a + e^{a+\alpha} + \ldots + e^{a+(m-1)\alpha}] = \frac{e^{a+m\alpha} - e^a}{e^\alpha - 1}\alpha = (e^b - e^a)\frac{\alpha}{e^\alpha - 1}.$$

L'aire cherchée S est la limite de cette expression, m croissant à l'infini et α tendant vers zéro : il suffit donc de trouver la limite du rapport d'infiniment petits

$$\frac{\alpha}{e^\alpha - 1} = \frac{\alpha}{\beta},$$

en posant

$$e^\alpha - 1 = \beta.$$

Or, ceci donne

$$e^\alpha = 1 + \beta, \qquad \alpha = \text{l}.(1 + \beta),$$

d'où

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\text{l}.(1+\beta)}{\beta},$$

et comme, β étant infiniment petit, le second membre a pour limite l'unité (26), on a

$$lim\,\frac{\alpha}{e^\alpha - 1} = 1.$$

De là nous tirons

$$\text{S} = e^b - e^a$$

pour l'expression de l'aire demandée. On remarquera qu'elle a pour mesure la différence des ordonnées qui la terminent.

On calculerait par des considérations analogues l'aire d'un segment parabolique, circulaire, elliptique, etc. (1)

33. Comme dernier exemple, calculons le volume engendré par une surface plane, tournant autour d'une droite fixe située dans son plan.

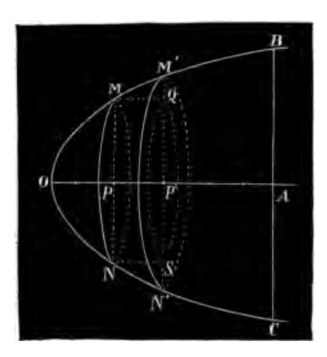
Le parabole qui a pour équation

$$y^2 = 2px,$$

tournant autour de son axe, engendre un paraboloïde de révolution. Par

(1) Duhamel, *Éléments de calcul infinitésimal*, ch. VIII.

un point A de l'axe, menons un plan perpendiculaire à l'axe : c'est le volume compris entre ce plan et la surface qu'il faut évaluer.



Pour cela, partageons la distance OA $= a$ du sommet au plan sécant, en m parties égales et infiniment petites α, d'où

$$m\alpha = a, \qquad \alpha = \frac{a}{m}.$$

Par les points de division P, P',.. menons des plans perpendiculaires à l'axe : le volume sera partagé en *tranches* infiniment minces MNN'M'. Pour nous débarrasser de la portion difficile à évaluer dans chacune de ces tranches, nous ferons voir, par un raisonnement tout semblable à celui qui nous a servi dans la mesure des aires, que l'une quelconque d'entr'elles, MNN'M', peut être remplacée par le volume du cylindre MNSQ, qui a pour base le cercle engendré par l'ordonnée MP de la parabole, et pour hauteur la distance PP' $= \alpha$ de deux plans sécants consécutifs. La limite du rapport des volumes de la tranche et du cylindre est, en effet, égale à l'unité, lorsque α tend vers zéro. Nous aurons donc, en désignant par x, y les coordonnées du point M, par i le nombre des divisions α comprises dans OP,

$$x = \text{OP} = i\alpha, \quad y^2 = 2px = 2pi\alpha,$$
$$\text{vol. MNSQ} = \pi y^2 \cdot \alpha = \pi \cdot 2pi\alpha^2 = 2\pi pa^2 \frac{i}{m^2}.$$

Faisant successivement $i = 1, 2, \ldots, m - 1$, dans cette formule et ajoutant, nous aurons la somme des volumes de tous les cylindres inscrits, somme qui, d'après le 2me théorème, a pour limite le volume V cherché, lorsque l'on fait croître m indéfiniment.

Donc

$$\text{V} = lim\, 2\pi pa^2 \frac{1 + 2 + \cdots + (m-1)}{m^2} = 2\pi pa^2 \cdot lim \frac{m(m-1)}{2m^2}$$
$$= \pi pa^2 \cdot lim \frac{m-1}{m} = \pi pa^2 \cdot lim\left(1 - \frac{1}{m}\right) = \pi pa^2,$$

ou enfin, en désignant par b le rayon AB de la section terminale, et observant que l'équation de la parabole donne $b^2 = 2pa$,

$$\text{V} = \frac{\pi}{2} ab^2.$$

On peut donc dire que le *volume du segment de paraboloïde de révolution est la moitié du volume du cylindre, de même base et de même hauteur.*

Il serait facile de multiplier ces exemples; ainsi, on ferait voir que le volume d'un cylindre droit, à base *quelconque*, a pour expression le produit de sa base par sa hauteur, en le décomposant en tranches infiniment minces par des plans parallèles aux génératrices, et prouvant que ces tranches peuvent être remplacées par des parallélipipèdes; etc... Mais le but des exemples ci-dessus étant simplement de faire saisir l'esprit de la méthode infinitésimale, et de préparer aux méthodes de calcul qui permettront de résoudre ces questions bien plus facilement, nous conclurons par quelques remarques importantes.

Remarques. 1° Dans les questions traitées ci-dessus, nous avons, sans altérer l'exactitude des résultats, remplacé les infiniment petits qui faisaient la difficulté de la question par d'autres plus simples; mais ceux-ci auraient pu être choisis différemment. Ainsi, dans le calcul de l'aire d'une courbe, on peut substituer à volonté, aux éléments de la courbe, soit les parallélogrammes intérieurs MPP'K, ou extérieurs K'PP'M', soit les *trapèzes* inscrits PMM'P', etc... Il suffit toujours que les quantités négligées soient infiniment petites par rapport à celles dont on cherche la limite du rapport, ou de la somme : pour le reste, le choix est arbitraire, et l'on doit se régler sur la facilité des calculs.

2° Dans la mesure de l'aire de la courbe

$$y = e^x,$$

nous avons été conduits à faire la somme des ordonnées des différents points de la courbe, multipliées respectivement par l'accroissement infiniment petit de l'abscisse quand on passe d'un point au suivant; puis, à chercher la limite de cette somme. La même opération se présenterait évidemment quelle que soit la courbe. Or, l'ordonnée d'une courbe, comme on l'a vu, est une fonction de l'abscisse; nous sommes donc amenés à ce second problème d'analyse :

Trouver la limite vers laquelle converge la somme des valeurs successives d'une fonction, multipliées respectivement par les accroissements infiniment petits correspondants de la variable dont elle dépend; celle-ci étant supposée passer d'une valeur donnée a à une valeur donnée b.

Dans le calcul du volume du paraboloïde, on doit résoudre la même question : la fonction est πy^2.

Ce problème appartient au *calcul intégral*, et nous verrons d'ailleurs qu'il présente, avec celui qui fait l'objet du calcul différentiel, une liaison remarquable.

§ 7. DES DIVERS ORDRES D'INFINIMENT PETITS

34. Lorsque, dans une question, l'on a à considérer plusieurs infiniment petits dépendants les uns des autres, et tendant tous simultanément vers la limite zéro, il y a encore lieu à classer ces quantités dans des ordres différents, d'après les limites de leurs rapports mutuels.

On dit que *deux infiniment petits sont de même ordre, lorsque leur rapport tend vers une limite finie, différente de zéro.*

En général, on considère comme infiniment petit *principal* l'un de ceux du problème, et on lui rapporte tous les autres : désignons-le par α, et soit r un nombre entier ou fractionnaire.

Tout infiniment petit dont le rapport à α^r a pour limite une quantité finie, différente de zéro, se nomme un infiniment petit de l'ordre r.

D'après cette définition, soit ρ un infiniment petit de l'ordre r; k une quantité finie quelconque, différente de zéro; ω une quantité tendant vers zéro avec α; on a

$$lim \frac{\rho}{\alpha^r} = k, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\rho}{\alpha^r} = k + \omega,$$

et par suite

$$\rho = \alpha^r(k + \omega).$$

Tel est le type d'un infiniment petit de l'ordre r par rapport à α. Si $r = 1$,

$$\rho = \alpha(k + \omega)$$

est du *premier ordre;* ou, ce qui revient au même, ρ est du même ordre que α.

35. Partant de là, on peut établir sur les infiniment petits de divers ordres plusieurs propositions d'un usage fréquent. Soient ρ, ρ', ρ'',... divers infiniment petits; r, r', r'',... les nombres qui expriment leurs ordres respectifs, rapportés à un même infiniment petit α; et soient $r < r' < r''$...

1° *De deux infiniment petits ρ et ρ', celui qui est de l'ordre le plus élevé est infiniment petit par rapport à l'autre* (27).

On a en effet, d'après la formule ci-dessus,

$$\frac{\rho'}{\rho}=\frac{\alpha^{r'}(k'+\omega')}{\alpha^{r}(k+\omega)}=\alpha^{r'-r}\frac{k'+\omega'}{k+\omega},$$

et, $r'-r$ étant >0, le rapport $\frac{\rho'}{\rho}$ tend vers zéro en même temps que α; donc ρ' est infiniment petit par rapport à ρ.

Il suit de là que la valeur numérique de ρ' finit par devenir très-petite vis-à-vis de celle de ρ, et qu'ainsi

2° *De deux infiniment petits d'ordres différents par rapport à un même infiniment petit principal, celui qui est de l'ordre le plus élevé finit par avoir constamment la plus petite valeur absolue.*

3° *La somme $\rho+\rho'+\rho''+\cdots$ est un nouvel infiniment petit de l'ordre r.*

Car

$$\frac{\rho+\rho'+\rho''+\cdots}{\alpha^r}=\frac{\rho}{\alpha^r}+\frac{\rho'}{\alpha^r}+\frac{\rho''}{\alpha^r}+\cdots,$$

et, d'après ce qui précède, $\frac{\rho'}{\alpha^r}$, $\frac{\rho''}{\alpha^r}$,... sont infiniment petits, tandis que $\frac{\rho}{\alpha^r}$ tend vers une limite finie : le premier membre tend donc vers une limite finie, ce qui démontre la propriété.

4° *Le produit $\rho\rho'$ est un infiniment petit de l'ordre $r+r'$ par rapport à α.*

On a en effet

$$\frac{\rho\rho'}{\alpha^{r+r'}}=\left(\frac{\rho}{\alpha^r}\right)\cdot\left(\frac{\rho'}{\alpha^{r'}}\right),$$

et le second membre est le produit de deux facteurs qui tendent vers des limites finies différentes de zéro, d'après la définition : donc, le premier membre a aussi une limite semblable, C. Q. F. D.

On conclut de là, sans difficulté, que le produit $\rho\rho'\rho''$ serait un infiniment petit de l'ordre $r+r'+r''$; et ainsi de suite. La multiplication d'un infiniment petit par un facteur fini ne change pas l'ordre du produit.

5° *Le rapport $\frac{\rho'}{\rho}$ de deux infiniment petits est un infiniment petit de l'ordre $r'-r$,* car sa valeur (1°), divisée par $\alpha^{r'-r}$, se réduit à $\frac{k'+\omega'}{k+\omega}$, dont la limite $\frac{k'}{k}$ est finie et différente de zéro.

6° *Si l'on prend un nouvel infiniment petit principal β, de même ordre que le premier α, l'ordre infinitésimal des autres ne sera pas changé.*

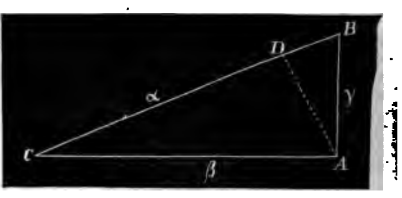
Soit, en effet, ρ un infiniment petit de l'ordre r par rapport à α; on

$$\frac{\rho}{\beta^r} = \frac{\rho}{\alpha^r} \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^r.$$

Or, $\frac{\rho}{\alpha^r}$ tend vers une limite finie différente de zéro; $\frac{\alpha}{\beta}$ est dans le même cas, par supposition, et aussi $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^r$; le second membre tend donc vers une limite finie, et par conséquent le premier.

Cette propriété est utile dans les cas où l'on est amené à changer d'infiniment petit principal.

36. *Exemples d'infiniment petits de divers ordres.* Pour éclaircir par des exemples ces considérations abstraites, soit ABC un triangle rectangle dans lequel l'hypothénuse α est infiniment petite, et l'angle C *du premier ordre* en prenant α comme infiniment petit principal. Cherchons l'ordre infinitésimal des autres côtés β et γ. Nous aurons



$$\beta = \alpha \cos C, \qquad \frac{\beta}{\alpha} = \cos C, \qquad lim \frac{\beta}{\alpha} = 1,$$

ainsi β est du *premier ordre.*

Ensuite

$$\gamma = \alpha \sin C;$$

or, un arc infiniment petit et son sinus sont toujours de même ordre, puisque la limite de leur rapport est l'unité (28); donc sin C est du premier ordre, et γ, étant le produit de deux infiniment petits du premier ordre, sera du *second ordre.*

Réciproquement, si un côté γ du triangle rectangle est du second ordre, l'hypothénuse étant du premier, l'angle opposé C sera infiniment petit du premier ordre, à cause de la relation

$$\sin C = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Abaissons, du sommet A de l'angle droit, AD perpendiculaire sur l'hypothénuse :

$$AD = \beta \sin C, \qquad BD = \gamma \cos B = \gamma \sin C;$$

donc AD est du second ordre, BD du troisième, par rapport à l'hypothénuse α ; etc.

Considérons encore le même triangle ABC, mais supposons à l'hypothénuse α une longueur finie quelconque, constante ou variable, l'angle C étant infiniment petit du premier ordre. La relation

$$\beta = \alpha \cos C$$

fait voir que β a une grandeur finie ; mais la différence

$$\alpha - \beta = \alpha (1 - \cos C) = 2\alpha \sin^2 \frac{C}{2},$$

sera du second ordre, puisque $\sin \frac{C}{2}$ est du premier. Donc, *si l'on projette une droite finie sur une autre qui fait avec elle un angle infiniment petit, la différence entre la droite et sa projection est du second ordre, par rapport à l'angle compris.*

Cette remarque est souvent utile ; la suivante ne l'est pas moins : *Un angle* X *étant projeté sur un plan, qui fait avec le plan de l'angle* X *un angle infiniment petit, la différence entre l'angle* X *et sa projection est du second ordre par rapport à l'inclinaison* α *des deux plans.*



Soient BAC = X l'angle donné, B'AC' = X' sa projection, AD l'intersection des deux plans, BDB' un plan perpendiculaire à AD et coupant les deux plans suivant des droites BD, B'D qui font entr'elles l'angle α. En désignant par A, A' les angles CAD, C'AD, nous aurons, les triangles CAD, C'AD étant rectangles en D,

$$\operatorname{tg} A' = \frac{C'D}{AD} = \frac{CD \cos \alpha}{AD} = \operatorname{tg} A \cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(A - A') = \frac{\operatorname{tg} A (1 - \cos \alpha)}{1 + \operatorname{tg} A \operatorname{tg} A'} = \frac{2 \operatorname{tg} A}{1 + \operatorname{tg} A \operatorname{tg} A'} \sin^2 \frac{\alpha}{2};$$

et comme A — A' est infiniment petit, on peut, en négligeant des quantités d'ordre supérieur, écrire

$$A - A' = \frac{2 \operatorname{tg} A}{1 + \operatorname{tg}^2 A} \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \sin 2A \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

En appliquant le même raisonnement aux angles BAD, B'AD, on aura de même

$$(A + X) - (A' + X') = \sin 2 (A + X) \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

et d'après l'équation précédente

$$X - X' = [\sin 2 (A + X) - \sin 2A] \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

ou enfin

$$X - X' = 2 \sin X \cos (2A + X) \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Les termes négligés n'altérant cette expression que d'une quantité infiniment petite par rapport à elle-même, $X - X'$ est bien du second ordre par rapport à α, comme nous l'avons annoncé. Cela a lieu quel que soit l'angle X; mais s'il était infiniment petit, l'équation montre en outre que la différence entre cet angle et sa projection *serait infiniment petite par rapport à l'angle* X *lui-même,* car sin X est de même ordre que X, et $\sin^2 \frac{\alpha}{2}$ tend vers zéro par hypothèse. Si X et α étaient du premier ordre, $X - X'$ serait du troisième (1).

---

(1) L'application de la méthode infinitésimale à l'étude des propriétés géométriques, indépendamment de l'algorithme différentiel, n'entre pas dans le plan de cet ouvrage. Néanmoins, comme c'est là un excellent exercice, nous indiquerons aux lecteurs les les écrits suivants : DUHAMEL, *Éléments de calcul infinitésimal,* ch. VIII à XXI. — BERTRAND, *Calcul différentiel,* ch. I. — RUCHONNET, *Exposition géométrique des propriétés générales des courbes,* Lausanne, 1866. — Divers travaux de M. A. Mannheim, dans le *Journal de l'Ecole polytechnique*, les *Annales* de Tortolini, etc.

PREMIÈRE PARTIE.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

LIVRE PREMIER.

MÉTHODES DE DIFFÉRENTIATION.

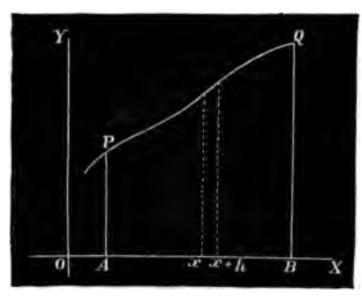
CHAPITRE PREMIER.

DE LA CONTINUITÉ DES FONCTIONS, ET DE LEURS DÉRIVÉES.

27. Désignons par $f(x)$ une fonction de la variable x, que nous supposerons réelle pour toutes les valeurs de la variable x comprises entre deux valeurs données $x = a$ et $x = b$. Si nous concevons que la variable passe successivement par toutes les valeurs depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$, et si alors la fonction $f(x)$, *conservant toujours une valeur finie, ne peut passer d'une valeur quelconque à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires,* nous disons que cette fonction est *continue* par rapport à x depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$.

La représentation géométrique donne une idée très-nette de la conti-

nuité des fonctions : prenons x pour l'abscisse, $f(x)$ pour l'ordonnée correspondante d'une courbe plane ; cette courbe présentera, entre les points P et Q qui répondent aux abscisses a et b, un trait continu et sans interruption.



La définition de la continuité donne lieu à quelques remarques. 1° Pour chaque valeur attribuée à la variable x, la valeur de la fonction $f(x)$ se déduit généralement de sa définition même ; toutefois, il y a des fonctions telles que, pour certaines valeurs de x, l'opération par laquelle on calcule généralement la valeur de la fonction conduit à un résultat qui n'a aucun sens, comme $\frac{0}{0}$, $0 \cdot \infty$, etc. Dans ce cas, on suppose que x tende indéfiniment vers une des valeurs particulières dont il s'agit, $x = x_0$; on cherche la limite vers laquelle converge en même temps la valeur de $f(x)$, et cette limite, si elle existe, est regardée comme la valeur de la fonction répondant à $x = x_0$. C'est ainsi qu'en algèbre la fonction A^x, qui pour $x = 0$ prend la forme insignifiante A^0, est dite égale à l'unité dans ce cas, l'unité étant la limite de A^x lorsque x a pour limite zéro. De même, la fonction $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$ est égale à e pour $x = 0$.

Il peut arriver que l'on trouve deux limites différentes, donc deux valeurs de $f(x)$ pour $x = x_0$, selon qu'on suppose $x > x_0$ ou $x < x_0$.

2° Une fonction peut admettre plusieurs valeurs pour chacune des valeurs de la variable dont elle dépend : tel est le cas, par exemple, d'une fonction y de x, définie par une équation algébrique d'un degré supérieur au premier en y. La fonction est dite alors à *détermination multiple.* Dans ce cas, il est bien entendu que pour appliquer à une telle fonction les notions et les propriétés qui résultent de la continuité, on devra isoler les différents systèmes de valeurs, et ne considérer simultanément que les valeurs enchaînées les unes aux autres par la loi de continuité.

3° D'après notre définition, une fonction peut cesser d'être continue, pour une valeur particulière de la variable, soit en devenant *infinie,* comme la fonction tang x pour $x = \frac{\pi}{2}$; soit en devenant *indéterminée,* comme la fonction $\sin\frac{a}{x}$ pour $x = 0$ (car elle oscille indéfiniment entre

-1 et $+1$ sans tendre vers une limite fixe lorsque x tend vers zéro); soit en passant brusquement d'une valeur à une autre lorsque x atteint la valeur en question, comme la fonction $e^{-\frac{1}{x}}$ pour $x=0$. Dans ces différents cas, on dit que la fonction devient *discontinue* pour la valeur de x dont il s'agit.

Enfin, si la fonction est continue entre deux valeurs de x qui comprennent une certaine valeur x_0, quelque rapprochées qu'elles soient, on dit que la fonction est *continue dans le voisinage de* $x=x_0$.

28. Toute fonction continue jouit d'une propriété remarquable, qui peut servir aussi, soit à définir, soit à constater la continuité. Concevons qu'une fonction $f(x)$ soit continue entre deux valeurs a et b de la variable, et soient x, $x+h$ deux valeurs comprises dans cet intervalle, h étant infiniment petit. Il est clair que la différence des valeurs correspondantes de la fonction,

$$f(x+h)-f(x),$$

sera infiniment petite en même temps que h. En effet, si la différence entre $f(x+h)$ et $f(x)$ ne décroissait pas au-dessous de toute grandeur donnée lorsque h tend vers zéro, il en résulterait que la fonction passerait brusquement d'une valeur à une autre en x, et ne serait pas continue. La figuration géométrique de la fonction met d'ailleurs ce fait en évidence.

Au moyen de cette propriété, on peut facilement s'assurer de la continuité des fonctions simples, des fonctions composées, et reconnaître jusqu'à quelles valeurs de la variable s'étend la continuité de ces fonctions. Ainsi les fonctions x^m, m étant entier et positif, A^x, $\sin x$, sont continues depuis $x=-\infty$, jusqu'à $x=+\infty$; car on a, par exemple,

$$A^{x+h}-A^x=A^x(A^h-1),$$

et comme A^h tend vers l'unité quand h tend vers zéro, cette différence est infiniment petite avec h, quel que soit x; la fonction $\frac{a}{x^m}$ est continue, sauf pour $x=0$ qui la rend infinie; et ainsi des autres fonctions.

29. Les définitions et les principes relatifs à la continuité s'étendent, sans difficulté, aux fonctions de plusieurs variables. Ainsi une fonction

$f(x, y, z)$, supposée d'ailleurs constamment réelle entre deux valeurs données de chacune des variables x, y, z, est dite *continue* par rapport à ces variables entre les valeurs dont il s'agit, lorsqu'elle reste toujours finie et ne varie que par degrés insensibles, tandis qu'on fait varier x, y, z par degrés insensibles sans sortir des limites assignées par les valeurs données. Ainsi les fonctions

$$x^2 + y^2 + z^2, \qquad xyz, \qquad \sin(x + y),$$

sont continues entre des valeurs quelconques des variables; la fonction $\frac{xy}{z}$ également, sauf dans le voisinage de $z = 0$, etc., etc.

Il résulte de là que, h, k, l désignant des accroissements infiniment petits de x, y, z, la quantité

$$f(x + h, y + k, z + l) - f(x, y, z)$$

sera infiniment petite, si x, y, z sont compris dans les limites de la continuité de la fonction. En d'autres termes, si l'on fait tendre les variables x, y, z vers des limites a, b, c, la fonction $f(x, y, z)$ s'approchera indéfiniment de $f(a, b, c)$, puisque la différence

$$f(x, y, z) - f(a, b, c)$$

doit être infiniment petite avec $x - a$, $y - b$, etc. Nous avons déjà utilisé cette propriété des fonctions (17).

Pour ce qui concerne les *valeurs-limites*, les fonctions à détermination multiple, les discontinuités qui peuvent se présenter dans les fonctions de plusieurs variables, nous renverrons à ce qui a été dit plus haut des fonctions d'une variable unique (1).

40. Les fonctions continues jouissent d'une autre propriété bien remarquable, et sur laquelle repose toute la suite de ce cours.

Soit $y = f(x)$ une fonction de la variable x; si, partant d'une valeur quelconque de x comprise dans l'intervalle où la fonction est continue,

---

(1) Nous ne pouvons qu'indiquer ici cette importante théorie de la continuité des fonctions. Le lecteur désireux d'approfondir ce sujet pourra consulter Neumann, *Vorlesungen uber Riemann's Theorie der Abelschen Integrale*, 2me leçon ; et Casorati, *Teorica delle funzioni di variabili complesse*, pp. 190-209.

nous donnons à la variable un accroissement infiniment petit Δx, l'accroissement correspondant de la fonction,

$$\Delta y = \mathrm{f}(x + \Delta x) - \mathrm{f}(x),$$

sera lui-même infiniment petit, d'après ce que nous avons vu (38). Mais de plus, ces infiniment petits seront généralement de même ordre, c'est-à-dire que, *quand* Δx *et* Δy *tendent à la fois vers zéro, leur rapport* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *tend généralement vers une limite finie, déterminée et différente de zéro, sauf pour des valeurs isolées et exceptionnelles de la variable* x.

C'est ainsi que nous avons trouvé, pour la fonction y définie par l'équation

$$\sin x + \sin y = a,$$

la relation

$$lim\, \frac{k}{h} = -\frac{\cos x}{\cos y},$$

h et k étant précisément les quantités que nous désignons ici par Δx et Δy.

La démonstration complète du théorème général que nous venons d'énoncer offrant quelque difficulté, nous ne la donnerons pas ici (v. note II), et nous admettrons le théorème comme un fait, qui sera d'ailleurs vérifié par la suite.

Cette limite du rapport $\Delta y : \Delta x$ dépend d'ailleurs évidemment de la valeur de x à partir de laquelle l'accroissement est donné; elle est donc variable, en général, avec x, et en est une *fonction déterminée*, comme on le voit dans l'exemple ci-dessus. Nous appellerons cette fonction la *dérivée* de la fonction $\mathrm{f}(x)$, et nous la désignerons par $\mathrm{f}'(x)$, en sorte que l'on aura

$$lim\, \frac{\Delta y}{\Delta x} = lim\, \frac{\mathrm{f}(x + \Delta x) - \mathrm{f}(x)}{\Delta x} = \mathrm{f}'(x).$$

On démontre encore (v. note II) que la fonction $\mathrm{f}'(x)$ est elle-même généralement continue par rapport à x en même temps que $\mathrm{f}(x)$, sauf pour des valeurs isolées et exceptionnelles de x, où elle peut devenir infinie, ou indéterminée, ou passer brusquement d'une valeur à une autre qui en diffère d'une quantité finie. Ces discontinuités de la dérivée répondent à des singularités que présente la direction de la tangente, en certains points de la courbe donnée par l'équation

$$y = \mathrm{f}(x),$$

car, d'après ce qui a été établi plus haut, le coefficient angulaire de la tangente en un point de la courbe a pour expression la dérivée de l'ordonnée par rapport à l'abscisse, au même point.

41. Nous pouvons établir dès à présent quelques propriétés remarquables de la dérivée d'une fonction en nous aidant de la notation suivante : nous désignerons par

$$\mathrm{M}_{\alpha}^{\beta}\,\varphi(x)$$

une moyenne entre toutes les valeurs successives par lesquelles passe une fonction $\varphi(x)$, lorsqu'on fait varier x d'une manière continue depuis la valeur α jusqu'à la valeur β.

I. Concevons que, Δx et Δy représentant des accroissements *finis* correspondants de x et de y, on fasse passer la variable de la valeur x, à la valeur $x+\Delta x$, par une suite d'accroissements de même signe h_1, $h_2,\ldots, h_m$; et soient k_1, $k_2,\ldots, k_m$ les accroissements correspondants de y, en sorte que

$$\Delta x = h_1 + h_2 + \cdots + h_m, \qquad \Delta y = k_1 + k_2 + \cdots + k_m.$$

On a, comme on sait,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{k_1 + k_2 + \cdots + k_m}{h_1 + h_2 + \cdots + h_m} = \mathrm{M}\left(\frac{k_1}{h_1}, \frac{k_2}{h_2}, \ldots, \frac{k_m}{h_m}\right),$$

et cette égalité subsiste quel que grand que soit le nombre m des subdivisions h_1, $h_2,\ldots$ Or, quand ce nombre m croît indéfiniment, tous les éléments h_1, $h_2,\ldots h_m$ tendant vers zéro, les rapports $\frac{k_1}{h_1}, \frac{k_2}{h_2}, \ldots, \frac{k_m}{h_m}$ ont évidemment pour limites respectives les différentes valeurs que la dérivée $f'(x)$ comporte entre les valeurs x et $x+\Delta x$ de la variable, et puisque l'équation ci-dessus ne cesse jamais d'avoir lieu, on a, à la limite,

$$(1) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \mathrm{M}_{x}^{x+\Delta x}\, f'(x).$$

Ainsi, *le rapport des accroissements simultanés de y et de x est une moyenne entre toutes les valeurs par lesquelles passe la dérivée de y par rapport à x, lorsque la variable parcourt d'une manière continue l'intervalle compris entre sa première et sa dernière valeur.*

Il faut remarquer que cette équation (1) ne suppose aucune condition de continuité dans la dérivée $f'(x)$.

II. Une quantité *constante*, c'est-à-dire indépendante de x, ne varie pas quelque valeur qu'on attribue à x; sa dérivée est donc constamment nulle. Réciproquement, une fonction dont la dérivée par rapport à x est nulle quel que soit x, se réduit nécessairement à une constante : car il suit de l'équation (1) que si $f'(x)$ est constamment nul entre deux valeurs a et b de x, Δy sera aussi constamment nul, quel que soit x, pour un accroissement Δx de la variable; y reste donc invariable lorsque x varie et ne peut être fonction de x.

III. Si $f'(x)$ conserve le même signe pour toutes les valeurs de la variable comprises entre deux limites très-rapprochées x, $x + \Delta x$, ce signe sera aussi celui du rapport $\Delta y : \Delta x$, d'après (1). Donc, *tant que la dérivée* $f'(x)$ *reste positive*, les accroissements Δx, Δy sont de même signe, c'est-à-dire que *la fonction* $f(x)$ *varie dans le même sens que sa variable*. Au contraire, *tant que la dérivée* $f'(x)$ *reste négative*, Δy est de signe contraire à Δx, ce qui fait voir que la *fonction décroît lorsque la variable croît, et vice-versâ*.

IV. Quand les deux membres d'une équation sont fonctions d'une même variable x, et que l'équation a lieu indépendamment de toute valeur particulière attribuée à x, un accroissement infiniment petit donné à x détermine des accroissements égaux des deux membres de l'équation : d'où l'on conclut sans peine que les dérivées de ces deux membres, considérés comme fonctions de x, sont constamment égales quel que soit x.

CHAPITRE II.

DES DIFFÉRENTIELLES DES VARIABLES ET DE LEURS PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES.

§ 1. DES DIFFÉRENTIELLES.

42. On a trouvé avantageux de représenter cette *limite* du rapport de deux infiniment petits, que nous avons appelée la *dérivée* d'une fonction, par un véritable rapport : on a nommé *différentielles de deux variables y et x, dont la première est fonction de la seconde, deux quantités dont le rapport est rigoureusement égal à la limite du rapport des accroissements infiniment petits correspondants de y et de x.*

On voit par là que ces différentielles, considérées en elles-mêmes, sont des quantités totalement indéterminées : il n'y a de déterminé que leur rapport, qui est une fonction bien définie de la variable x, puisqu'il ne diffère pas de la dérivée de y par rapport à x. Cette indétermination des différentielles présente des avantages précieux.

Les *accroissements* finis ou infiniment petits des variables se désignent comme nous l'avons déjà fait, par la caractéristique Δ, placée devant ces variables. Ainsi

$$\Delta x, \quad \Delta y, \quad \Delta z, \ldots$$

signifient les accroissements ou les différences de x, y, z...

Les *différentielles* sont indiquées par la caractéristique d. Ainsi

$$dx, \quad dy, \quad dz, \ldots$$

représentent les différentielles des variables x, y, z...

On marque la dérivée d'une fonction d'une seule variable par un accent dont on affecte le signe représentatif de la fonction. Ainsi $f'(x)$ signifie la dérivée de la fonction $f(x)$ par rapport à x. Nous emploierons aussi la notation très-commode de Cauchy, qui place devant la fonction la lettre D, affectée d'un indice marquant la variable à laquelle se rapporte la dérivation ; de sorte que

$$D_x y$$

représente la dérivée, par rapport à x, d'une fonction y de cette variable.

A l'aide de ces notations, nous pouvons écrire, comme conséquence de nos définitions,

$$lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = D_x y, \qquad \frac{dy}{dx} = D_x y, \qquad \frac{dy}{dx} = lim \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

et aussi

$$dy = D_x y \cdot dx,$$

en sorte que, si la dérivée d'une fonction est connue, il suffit toujours de la multiplier par la différentielle de la variable pour avoir la différentielle de la fonction.

43. Il suit encore, de la première de ces équations, que si l'on désigne par ω une quantité qui tend vers zéro en même temps que Δx, on aura

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = D_x y + \omega, \qquad \text{d'où} \qquad \Delta y = D_x y \cdot \Delta x + \omega\Delta x.$$

Or, $\omega\Delta x$ étant infiniment petit par rapport à Δx, Δy et $D_x y \cdot \Delta x$ ne diffèrent l'un de l'autre que d'une quantité infiniment petite par rapport à Δx, et conséquemment par rapport à Δy, si $D_x y$ n'est pas nul. D'ailleurs, dx étant indéterminé, rien ne nous empêche de choisir dx égal à Δx, et il viendra, en négligeant une quantité infiniment petite par rapport à Δx ou Δy,

$$\Delta y = D_x y \cdot \Delta x = D_x y \cdot dx = dy.$$

C'est-à-dire que, *lorsqu'on prend la différentielle de la variable égale à son accroissement infiniment petit, on peut aussi remplacer l'accroissement infiniment petit de la fonction par sa différentielle, dans tous les cas où il est permis de négliger une quantité infiniment petite par rapport à cet accroissement lui-même.*

Cette remarque est très-utile dans les questions où Δy est un terme d'un rapport ou d'une somme d'infiniment petits.

44. *Théorème fondamental.* Soient y, z deux fonctions d'une même variable x; Δx, Δy, Δz les accroissements infiniment petits correspondants des variables x, y, z; dx, dy, dz, leurs différentielles, c'est-à-dire, d'après la définition (42), des quantités indéterminées assujéties seulement à satisfaire aux équations

$$\frac{dy}{dx} = lim \frac{\Delta y}{\Delta x}, \qquad \frac{dz}{dx} = lim \frac{\Delta z}{\Delta x};$$

il y a donc une des trois quantités dx, dy, dz qui reste absolument arbitraire.

La série d'égalités évidentes

$$lim \frac{\Delta z}{\Delta y} = lim \frac{\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)}{\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)} = \frac{D_x z}{D_x y} = \frac{\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} = \frac{dz}{dy}$$

nous fait voir 1° *que la limite du rapport des accroissements infiniment petits de z et de y, ou la dérivée de z considéré comme fonction de y, est égale au quotient des dérivées de z et de y par rapport à une même variable x dont y et z dépendent;* 2° *que cette même dérivée est encore égale au rapport des différentielles de z et de y, prises en regardant y et z comme fonctions de la variable x.*

Cette dernière remarque est fort importante; on en tire d'abord les conséquences suivantes :

I. Soient $x, y, z, u,\ldots$ des variables dont chacune est fonction immédiate de la précédente, en sorte que l'on a

$$y = f(x), \qquad z = \varphi(y), \qquad u = \psi(z),\ldots$$

Il est clair que l'on peut les considérer toutes comme fonctions de la première, x, et, dans cette hypothèse, désigner par $dx, dy, dz, du,\ldots$ leurs différentielles. On a *identiquement*

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Or, d'après le théorème précédent, le rapport des différentielles de deux variables quelconques sera toujours égal à la dérivée de la première par rapport à la seconde; cette équation peut donc s'écrire

$$D_x u = D_z u \cdot D_y z \cdot D_x y.$$

Ainsi la dérivée de u par rapport à x s'obtiendra en faisant le produit des dérivées de u par rapport à z, de z par rapport à y, et de y par rapport à x.

Cette règle, qui aurait lieu quel que soit le nombre des fonctions accumulées, s'appelle la *règle des fonctions de fonctions.*

II. Quand une variable y est fonction d'une autre variable x, réciproquement, celle-ci est fonction de la première : on peut donc se proposer

de trouver sa dérivée par rapport à y. Il suffit, pour résoudre cette question, de supposer dans le théorème fondamental que la fonction z se réduise à la variable x, ce qui donne

$$\Delta z = \Delta x, \qquad D_x z = 1, \qquad dz = dx,$$

et l'on a

$$D_y x = lim \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{D_x y} = \frac{dx}{dy},$$

c'est-à-dire *que la dérivée de x par rapport à y est la réciproque de la dérivée de y par rapport à x.* C'est ce qu'on nomme la règle des fonctions inverses.

45. *Généralisation de l'idée des différentielles.* Le théorème fondamental nous permet d'étendre, à tous les cas qui peuvent se présenter, la définition des différentielles.

Soient $x, y, z, \ldots u, v, w$, des variables en nombre quelconque, entre lesquelles existent certaines relations. On appelle *différentielles* de ces variables, et l'on désigne par les notations

$$dx, dy, dz, \ldots, \quad du, dv, dw,$$

des quantités telles que *le rapport de deux quelconques d'entr'elles est égal à la limite du rapport des accroissements infiniment petits correspondants des mêmes variables*, en sorte que

$$\frac{du}{dx} = lim \frac{\Delta u}{\Delta x}, \qquad \frac{dy}{dw} = lim \frac{\Delta y}{\Delta w}, \qquad \text{etc....}$$

Mais, pour justifier cette définition, quelques observations sont nécessaires, et *deux cas* très-distincts doivent être examinés. *En premier lieu,* il peut se faire que, d'après la nature de la question, les variables $x, y, \ldots v, w$, soient liées entr'elles de telle manière que la valeur de l'une d'elles, par exemple de x, détermine celles de toutes les autres, qui en seront conséquemment des fonctions : x étant la variable indépendante. Dans ce cas, d'après la définition primitive déjà connue (42), les différentielles $dy, dz, \ldots dw$ des fonctions $y, z, \ldots w$ sont des quantités dont les rapports à dx sont respectivement égaux aux dérivées $D_x y$, $D_x z, \ldots D_x w$ de ces fonctions par rapport à x, dx restant arbitraire. En sorte que la définition générale des différentielles, que nous venons de donner, ne fait autre chose que rappeler la propriété de ces différentielles qui fait l'objet du théorème fondamental, savoir, que le rapport de deux quelconques

d'entr'elles est encore égal à la limite du rapport des accroissements correspondants des mêmes variables.

En second lieu, et c'est le cas le plus général, les relations qui existent entre les variables x, y,... w peuvent être telles, que plusieurs d'entre ces variables restent *arbitraires* et *indépendantes;* par exemple, x, y, z : les autres étant des fonctions de celles-là. Et comme les accroissements simultanés et infiniment petits de deux variables qui ne dépendent pas l'une de l'autre, sont dans un rapport arbitraire qui ne converge vers aucune limite déterminée, la définition générale ci-dessus paraît n'avoir aucun sens.

Mais, sans rien changer au fond des choses, on peut les présenter sous un point de vue qui nous ramène au premier cas. Il est visible, en effet, qu'au lieu de considérer les variables indépendantes x, y, z comme recevant des valeurs arbitraires, il revient au même de les regarder comme des *fonctions* d'une certaine variable nouvelle t, pourvu que nous ne précisions nullement la nature de ces fonctions, que nous les regardions comme pouvant recevoir toutes les formes possibles; comme étant, en un mot, des fonctions *arbitraires*. Par cette hypothèse, les variables x, y, z... u, v, w deviendront toutes des fonctions d'une même variable *indépendante* t; seulement, parmi ces fonctions, il y en aura un certain nombre à qui l'on pourra attribuer telle forme qu'on voudra. Dès lors, nous sommes ramenés au premier cas, celui où toutes les variables dépendent d'une variable unique; nous pouvons donc appliquer la définition primitive des différentielles, et nous devons remarquer

1° Qu'il y a toujours *au moins une* différentielle qui reste indéterminée;

2° *Que le rapport des différentielles de deux variables quelconques est toujours égal* (44) *à la limite du rapport des accroissements infiniment petits correspondants de ces variables*, ce qui achève de justifier l'extension que nous avons donnée à l'idée des différentielles et la définition générale adoptée ci-dessus;

3° Que les différentielles des variables x, y, z, ou leurs dérivées par rapport à t, restent arbitraires aussi longtemps qu'on ne particularise point les relations indéterminées que l'on a supposées entre x, y, z et t.

Il va sans dire que l'auxiliaire t, introduite uniquement pour l'unité des principes, ne figurera même pas dans les formules, et qu'on pourra toujours choisir, pour jouer ce rôle, l'une des variables de la question, x par exemple.

Pour éclaircir ces notions par un exemple, supposons que

$$z = f(x, y)$$

soit l'équation d'une surface : x et y sont ici deux variables indépendantes dont z est une fonction déterminée. Mais on peut tout aussi bien considérer x comme la variable indépendante, et y comme une fonction, mais une fonction arbitraire, de x : cela revient évidemment à admettre que la projection du point (x, y, z) sur le plan horizontal, au lieu de se déplacer sans aucune loi, se déplace le long d'une ligne de forme arbitraire, ce qui est bien la même chose. Et il y aura cet avantage, que les relations établies entre les différentielles dx, dy, dz sous ce point de vue général, s'appliqueront d'elles-mêmes aux courbes tracées sur la surface donnée.

46. Désignons par u une fonction de plusieurs variables $x, y, z,..$, dépendantes ou indépendantes. On peut toujours concevoir que l'on fasse varier une seule des quantités $x, y, z,...$, les autres demeurant constantes : u sera ainsi considéré successivement comme fonction de x seul, de y seul, etc. *L'accroissement* de la fonction u, dû à un accroissement donné ainsi à une seule des variables $x, y,...$ dont elle dépend, se nomme sa *différence partielle* par rapport à x, à y, etc., et se désigne par $\Delta_x u$, $\Delta_y u$, etc. On a donc, en posant $u = f(x, y, z)$,

$$\Delta_x u = f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z), \qquad \Delta_y u = f(x, y+\Delta y, z) - f(x, y, z),$$

etc...

De même, les dérivées et les différentielles de u, considéré ainsi successivement comme fonction de x seul, ou de y seul,..., se nomment ses *dérivées partielles* et ses *différentielles partielles*, et on les désigne, les premières par

$$D_x u, \qquad D_y u, \qquad D_z u, \ldots;$$

les dernières par

$$d_x u, \qquad d_y u, \qquad d_z u, \ldots$$

En vertu de ces définitions, on a les relations

$$lim\, \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = D_x u = \frac{d_x u}{dx},$$

$$lim\, \frac{\Delta_y u}{\Delta y} = D_y u = \frac{d_y u}{dy},$$

et ainsi de suite.

Il importe de distinguer ces différences et ces différentielles *partielles* de la fonction u, de l'accroissement et de la différentielle de cette fonction, rapportés à l'hypothèse où toutes les variables $x, y, z,..$ sont censées dépendre d'une même variable auxiliaire, et varier toutes simultanément, comme nous l'avons expliqué ci-dessus (45). C'est pourquoi l'accroissement et la différentielle de u, pris sous ce dernier point de vue, se nomment sa *différence* et sa *différentielle totales*, et se désignent simplement par Δu, du.

47. L'opération qui a pour but la détermination des dérivées ou des différentielles des fonctions, se nomme *différentiation ;* l'ensemble des méthodes créées pour cet objet constitue le *calcul différentiel*.

La recherche des différentielles dans tous les cas est extrêmement simplifiée par l'usage d'un théorème remarquable, qui donne l'expression de la différentielle totale d'une fonction au moyen de ses différentielles partielles, et qui ramène ainsi tout le problème au calcul des différentielles des fonctions simples. Nous allons exposer d'abord ce théorème.

§ 2. EXPRESSION DE LA DIFFÉRENTIELLE TOTALE D'UNE FONCTION DE PLUSIEURS VARIABLES.

48. Soient $F(u, v)$ une fonction de deux variables u, v, indépendantes ou fonctions elles-mêmes d'autres variables; $F_1(u, v) = D_u F$, $F_2(u, v) = D_v F$ ses dérivées partielles par rapport à u et v. D'après la théorie exposée plus haut, pour calculer la différentielle totale de $F(u, v)$, nous devons toujours regarder u et v comme dépendant d'une certaine variable auxiliaire t, dont l'accroissement infiniment petit engendre les accroissements infiniment petits Δu, Δv de ces variables, et l'accroissement ΔF de la fonction proposée. Or, ce dernier,

$$\Delta F = F(u + \Delta u, v + \Delta v) - F(u, v)$$

peut s'écrire

$$\Delta F = [F(u + \Delta u, v) - F(u, v)] + [F(u + \Delta u, v + \Delta v) - F(u + \Delta u, v)],$$

ou encore, suivant les notations adoptées ci-dessus,

$$\Delta F = \Delta_u F(u, v) + \Delta_v F(u + \Delta u, v).$$

Mais on a, d'après la propriété démontrée (45),

$$\Delta_u F(u, v) = [F_1(u, v) + \omega] \Delta u,$$

ω étant infiniment petit avec Δu; et de même

$$\Delta_v F(u+\Delta u, v) = [F_2(u+\Delta u, v)+\omega_1]\,\Delta v,$$

ω_1 tendant vers zéro avec Δv. D'autre part, la dérivée $F_2(u, v)$ étant supposée fonction continue de u et de v, $F_2(u+\Delta u, v)$ ne peut différer de $F_2(u, v)$ que d'une quantité ω_2 qui tend vers zéro avec Δu. On a donc, en substituant,

$$\Delta F = [F_1(u, v)+\omega]\,\Delta u + [F_2(u, v)+\omega_2+\omega_1]\,\Delta v;$$

d'où, divisant toute l'équation par Δt, faisant converger Δt vers zéro et par conséquent Δu, Δv, puis remplaçant chaque terme par sa limite,

$$\frac{dF}{dt} = F_1(u, v)\cdot\frac{du}{dt} + F_2(u, v)\,\frac{dv}{dt}.$$

Multipliant par dt et remplaçant F_1 et F_2 par D_uF, D_vF, il vient enfin

$$dF = D_uF\cdot du + D_vF\cdot dv,$$

ce qui est l'expression de la différentielle totale de $F(u, v)$ en fonction de ses dérivées partielles par rapport à u et v.

Le même raisonnement s'étend sans difficulté à une fonction de trois, quatre variables, et pour une fonction $F(u, v, w,\ldots)$ d'un nombre quelconque de variables, indépendantes ou non, l'on aura

$$(1)\qquad dF = D_uF\cdot du + D_vF\cdot dv + D_wF\cdot dw + \cdots,$$

ou plus simplement, en employant la notation des différentielles partielles,

$$(2)\qquad dF = d_uF + d_vF + d_wF + \cdots$$

La différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables est donc toujours égale à la somme de ses différentielles partielles, par rapport à chacune des variables prise séparément.

Nous allons développer les conséquences nombreuses de ce théorème.

49. On sait que l'accroissement infiniment petit d'une fonction et sa différentielle ne diffèrent que d'une quantité qui est infiniment petite par rapport à l'accroissement de la variable indépendante. On peut donc tirer de l'équation (2) celle-ci :

$$\Delta F = \Delta_uF + \Delta_vF + \Delta_wF + \cdots + \varepsilon,$$

ε étant infiniment petit par rapport à Δu, Δv, Δw,..., car il est infiniment petit par rapport à Δt, et comme u, v, w,... sont toujours considérés comme fonctions de la variable auxiliaire t, leurs accroissements Δu, Δv,... sont implicitement regardés comme étant du même ordre que Δt, du moins en général (40).

50. *Différentielles d'une somme, d'un produit, etc., de plusieurs variables.* — Remarquons d'abord que, si a est une constante, on a

$$\Delta(u+a)=\Delta u, \quad \lim \frac{\Delta(u+a)}{\Delta u}=\frac{d(u+a)}{du}=1.$$

d'où

$$d(u+a)=du,$$

c'est-à-dire *qu'on peut ajouter une constante quelconque à une fonction sans modifier sa différentielle.*

Ensuite, comme on a

$$\Delta(au)=a\Delta u, \quad \lim \frac{\Delta(au)}{\Delta u}=\frac{d(au)}{du}=a,$$

d'où

$$d(au)=adu,$$

on conclut que *la différentielle du produit d'une fonction par une constante est le produit de la constante par la différentielle de la fonction.* Soit $a=\pm 1$,

$$d(\pm u)=\pm du.$$

Cela posé, attribuons, dans l'équation (2) du n° 48, diverses formes à la fonction $F(u, v, w,...)$, et soit d'abord

$$F(u, v, w,...)=u\pm v\pm w\pm\cdots$$

La différentielle de F, prise en faisant varier u seulement, est égale, d'après la première remarque, à du; de même, $d_v F$ se réduit à $d(\pm v)=\pm dv$, etc., et l'équation (2) devient

$$dF=d(u\pm v\pm w\pm\cdots)=du\pm dv\pm dw\pm\cdots$$

La différentielle de la somme algébrique de plusieurs variables est la somme algébrique des différentielles de ces variables.

Soit, en second lieu,

$$F(u, v, w,...)=uvw...$$

D'après la seconde remarque ci-dessus, l'on a

$$d_u F = vw\ldots du, \qquad d_v F = uw\ldots dv, \quad \text{etc.},$$

et le théorème général donne

$$dF = d.uvw\cdots = vw\cdots du + uw\cdots dv + uv\cdots dw + \cdots \text{(1)},$$

ou encore

$$d.uvw\cdots = uvw\cdots\left(\frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \cdots\right).$$

Cette règle sert à différentier le produit d'un nombre quelconque de variables. Pour deux variables u et v, l'on a

$$d.uv = vdu + udv.$$

Pour m variables égales à u, l'on a

$$d.u^m = u^m \cdot m\frac{du}{u} = mu^{m-1}du.$$

Soit enfin

$$F = \frac{u}{v}.$$

On tire de là

$$u = vF, \qquad du = Fdv + vdF,$$

et par suite

$$dF = \frac{1}{v}(du - Fdv) = \frac{1}{v}\left(du - \frac{u}{v}dv\right),$$

d'où enfin

$$dF = d.\frac{u}{v} = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Telle est la formule que l'on emploie pour trouver la différentielle d'un quotient de deux fonctions. Il peut arriver que l'une d'elles se réduise à une constante a, auquel cas sa différentielle est nulle ; on a ainsi

$$d\left(\frac{a}{v}\right) = -\frac{adv}{v^2}, \qquad d\left(\frac{u}{a}\right) = \frac{du}{a}.$$

---

(1) On indique par un point, placé après le signe d, que ce signe se rapporte à tout le monôme qui le suit.

51. Il importe de remarquer que la formule (2), et celles que nous en avons déduites, s'appliquent également à des variables u, v, w,... qui sont indépendantes les unes des autres, ou fonctions d'une même variable, ou même de plusieurs autres variables : et cela, à cause de la généralité du point de vue sous lequel nous avons envisagé les différentielles.

Si, en particulier, u, v, w,... sont des fonctions d'une seule variable x (auquel cas celle-ci remplace notre auxiliaire t), il suffira de diviser par dx l'équation (1) et celles qui s'en déduisent, pour que les dérivées remplacent partout les différentielles; ce qui donnera les formules

$$\frac{d\mathrm{F}(u, v, w,\ldots)}{dx} = \mathrm{D}_u\mathrm{F}\cdot\frac{du}{dx} + \mathrm{D}_v\mathrm{F}\cdot\frac{dv}{dx} + \mathrm{D}_w\mathrm{F}\cdot\frac{dw}{dx} + \cdots$$

$$\frac{d(u \pm v \pm w\ldots)}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx} \pm \cdots,$$

$$\frac{d(uvw\ldots)}{dx} = uvw\ldots\left(\frac{1}{u}\frac{du}{dx} + \frac{1}{v}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{w}\frac{dw}{dx} + \cdots\right),$$

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \left(v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}\right)\frac{1}{v^2}, \quad \text{etc.}$$

La fonction F $(u, v, w,\ldots)$ étant ce qu'on appelle une *fonction composée* de x, la première de ces équations constitue la *règle des fonctions composées.*

Corollaire. Considérons deux fonctions de x, $\mathrm{F}(x)$ et $\mathrm{f}(x)$, dont les dérivées sont égales, en sorte que l'on ait, pour toutes les valeurs de x comprises dans un intervalle donné,

$$\mathrm{F}'(x) = \mathrm{f}'(x).$$

D'après la règle pour différentier une somme, nous aurons

$$\mathrm{D}_x[\mathrm{F}(x) - \mathrm{f}(x)] = \mathrm{F}'(x) - \mathrm{f}'(x) = 0,$$

et la fonction $\mathrm{F}(x) - \mathrm{f}(x)$, ayant sa dérivée nulle, ne peut être qu'une constante (41, II). Donc, *deux fonctions d'une même variable x, qui ont des dérivées égales pour toute valeur de x comprise dans un intervalle déterminé, ne peuvent différer l'une de l'autre, dans cet intervalle, que par une constante.*

Cette remarque est importante.

CHAPITRE III.

DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS EXPLICITES D'UNE SEULE VARIABLE.

§ 1. DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS SIMPLES.

52. Le théorème général sur la différentielle totale ramenant la différentiation de toute fonction explicite à celle des fonctions simples d'une variable x, c'est de celles-ci que nous allons nous occuper.

On a d'abord, d'après ce qui précède,

$$d(a \pm x) = \pm dx.$$

En second lieu, soit

$$y = x^a,$$

l'exposant a étant une constante réelle quelconque, positive ou négative, rationnelle ou irrationnelle. On aura, en donnant à x l'accroissement infiniment petit Δx,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^a - x^a}{\Delta x} = \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^a - 1}{\Delta x} x^a.$$

Représentons par α l'infiniment petit $\frac{\Delta x}{x}$; il vient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(1 + \alpha)^a - 1}{\alpha} \cdot x^{a-1} = \frac{\beta}{\alpha} x^{a-1},$$

en posant

$$(1 + \alpha)^a - 1 = \beta,$$

d'où

$$(1 + \alpha)^a = 1 + \beta, \quad a\,\mathrm{l.}(1 + \alpha) = \mathrm{l.}(1 + \beta), \quad \frac{\mathrm{l.}(1 + \beta)}{\mathrm{l.}(1 + \alpha)} = a.$$

Comme β est infiniment petit en même temps que α, on a, d'après une propriété démontrée (26),

$$lim\,\frac{\mathrm{l.}(1 + \beta)}{\beta} = 1, \qquad lim\,\frac{\mathrm{l.}(1 + \alpha)}{\alpha} = 1,$$

et par suite (28)

$$lim\,\frac{\beta}{\alpha} = lim\,\frac{\text{l}.(1+\beta)}{\text{l}.(1+\alpha)} = a.$$

On aura donc la limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ en remplaçant, dans l'expression de ce rapport, $\frac{\beta}{\alpha}$ par sa limite a, et par conséquent on trouvera

$$lim\,\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{D}_x y = ax^{a-1},$$

pour la dérivée de la fonction y ou x^a. De là

$$d.x^a = ax^{a-1}dx.$$

On rencontre fréquemment les cas $a=2$, $a=\frac{1}{2}$, où l'on a

$$d.x^2 = 2xdx, \qquad d.\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}.$$

Remarque. Lorsque a est une fraction irréductible à dénominateur pair, la fonction x^a implique un double signe qui, comme on le voit sans peine, affectera sans renversement le facteur x^{a-1} dans la dérivée.

53. Cherchons la dérivée de la fonction

$$y = \text{l}.x,$$

l. indiquant toujours un logarithme népérien. On a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{l}.(x+\Delta x) - \text{l}.x}{\Delta x} = \frac{\text{l}.x\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) - \text{l}.x}{\Delta x} = \frac{\text{l}.\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x},$$

ou encore, en posant $\frac{\Delta x}{x} = \alpha$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{l.(1+\alpha)}{\alpha}\cdot\frac{1}{x}.$$

Or, α tend vers zéro avec Δx, et $\frac{l(1+\alpha)}{\alpha}$ tend alors vers l'unité (26) ; donc ,

$$lim\,\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{D}_x y = \frac{1}{x},$$

et par suite

$$dy = d.lx = \frac{dx}{x}\cdot$$

Si le logarithme se rapportait à un système dont la base serait A, on aurait

$$A^{\log x} = e^{l.x},$$

d'où

$$\log x = \frac{l.x}{l.A}, \qquad d.\log x = \frac{dx}{x\,l.A}\cdot$$

54. *Fonctions circulaires.* — I. Prenons d'abord

$$y = \sin x,$$

d'où

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}.$$

Transformant le numérateur en produit par la formule trigonométrique

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{1}{2}(p - q) \cos \frac{1}{2}(p + q),$$

il vient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Le rapport de l'arc infiniment petit $\frac{\Delta x}{2}$ à son sinus ayant pour limite l'unité, le second membre de l'équation a pour limite $\cos x$; donc

$$lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \cos x,$$

et, en remplaçant y par son expression, on a

$$d. \sin x = \cos x dx.$$

II. Pour différentier la fonction $\cos x$, il suffira de se rappeler la relation

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

d'où

$$d.\cos x = d.\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot d\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

en remplaçant x par $\frac{\pi}{2} - x$ dans la formule ci-dessus. Mais on a

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \quad d\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -dx,$$

donc enfin

$$d.\cos x = -\sin x dx.$$

III. On a encore

$$\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

d'où, en appliquant la règle pour différentier un quotient,

$$d.\operatorname{tang} x = \frac{\cos x\, d.\sin x - \sin x\, d.\cos x}{\cos^2 x} = \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)\, dx}{\cos^2 x},$$

d'où enfin

$$d.\operatorname{tang} x = \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

IV. La relation

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

donne également

$$d.\sec x = -\frac{d.\cos x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x dx}{\cos^2 x},$$

ou encore

$$d.\sec x = \operatorname{tg} x \sec x dx.$$

V. La relation

$$\cot x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

combinée avec la règle III, donne

$$d.\cot x = d.\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{d\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)},$$

ou bien

$$d.\cot x = -\frac{dx}{\sin^2 x}.$$

VI. Enfin, la relation

$$\operatorname{cosec} x = \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

donne de même

$$d.\operatorname{cosec} x = d.\sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cdot\sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) d\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

ou

$$d.\operatorname{cosec}. x = - \cot x \operatorname{cosec} x dx.$$

55. *Fonction exponentielle.* Posons

$$y = A^x,$$

d'où

$$x = \log y.$$

On a donc, d'après la formule du n° 53,

$$dx = \frac{dy}{y\mathrm{l}.A},$$

d'où l'on tire, en remplaçant y par sa valeur,

$$dy = d.A^x = A^x\mathrm{l}.A dx.$$

Dans le cas particulier où A est égal à e, l.A est l'unité; on a conséquemment

$$d.e^x = e^x dx.$$

La fonction e^x jouit donc de la propriété d'être égale à sa propre dérivée.

56. *Fonctions circulaires inverses.* — I. Appliquons la même méthode à la recherche des dérivées de $\arcsin x$, $\arccos x$, etc. Si nous posons d'abord

$$y = \operatorname{arc.sin} x,$$

nous en déduirons

$$x = \sin y, \qquad dx = \cos y\, dx,$$

d'où

$$dy = \frac{dx}{\cos y}.$$

Or, pour exprimer dy en fonction de x seul, il suffit de remarquer que

$$\cos y = \pm\sqrt{1 - \sin^2 y} = \pm\sqrt{1 - x^2};$$

il vient donc, enfin,

$$d.\ \text{arc}\sin x = \pm \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Le double signe dont cette expression est affectée résulte de ce que la fonction $\text{arc}\sin x$ est à détermination multiple, car il y a une infinité d'arcs qui correspondent à un sinus donné, et parmi ces arcs, les uns ont un cosinus positif, les autres un cosinus négatif. Pour reconnaître immédiatement le signe que l'on doit prendre, il suffit de voir si, dans le quadrant où y varie, l'arc y et le sinus x croissent ensemble ou varient en sens contraire : on sait, en effet, que la dérivée $\frac{dy}{dx}$, positive dans le premier cas, est négative dans le second (41, III).

Au reste, pour achever de déterminer la fonction $\text{arc}\sin x$, il convient de fixer la valeur qu'elle doit avoir pour une valeur donnée de x : car, comme elle doit varier d'une manière continue avec x, elle n'admet plus alors qu'une seule valeur pour chaque valeur de x. Habituellement, et à moins de stipulation contraire, on suppose que la fonction $\text{arc}\sin x$ soit assujétie à s'annuler pour $x=0$: y est alors compris entre $\pm\frac{\pi}{2}$, et l'on a

$$d.\ \text{arc}\sin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

II. Soit ensuite

$$y = \text{arc}\ \text{tg}\ x, \qquad \text{d'où} \qquad x = \text{tg}\ y;$$

on aura, d'après ce qui précède (54, III),

$$dx = \frac{dy}{\cos^2 y},$$

d'où

$$dy = \cos^2 y \cdot dx = \frac{dx}{1+\text{tg}^2 y} = \frac{dx}{1+x^2};$$

donc enfin

$$d.\ \text{arc}\ \text{tg}\ x = \frac{dx}{1+x^2}.$$

III. Soit encore

$$y = \text{arc}\sec x; \qquad x = \sec y,$$

d'où

$$dx = \text{tg}\ y \sec y\ dy,$$

d'où

$$dy = \frac{dx}{\operatorname{tg} y \sec y}.$$

Mais on a

$$\sec y = x, \qquad \operatorname{tg} y = \pm\sqrt{x^2-1},$$

d'où enfin

$$d.\operatorname{arc}\sec x = \pm\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Le signe du radical dépend des limites entre lesquelles varie arc sec x : ordinairement, on prend le signe $+$, parce qu'on suppose arc sec $1 = 0$.

Des raisonnements semblables conduisent aux formules

$$d.\operatorname{arc}\cos x = \mp\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad d.\operatorname{arc}\cot x = -\frac{dx}{1+x^2},$$

$$d.\operatorname{arc}\cos x = \mp\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Au reste, on voit sans peine que arc sin x, arc cos x, donnent une somme constante, donc leurs différentielles doivent être égales et de signes contraires; et de même pour les autres.

57. Nous donnons ici le tableau des différentielles des fonctions simples :

$d.(a \pm x) = \pm dx$,

$d.x^a = ax^{a-1}dx$,

$d.\mathrm{l}.x = \frac{dx}{x}$,

$d.\log x = \frac{1}{l\mathrm{A}}\frac{dx}{x}$,

$d.\mathrm{A}^x = \mathrm{A}^x\mathrm{l.A}dx$,

$d.e^x = e^x dx$,

$d.\sin x = \cos x dx$,

$d.\operatorname{tg} x = \frac{dx}{\cos^2 x}$,

$d.\sec x = \operatorname{tg} x \sec x\, dx$.

$d.\cos x = -\sin x dx$,

$d.\cot x = -\frac{dx}{\sin^2 x}$,

$d.\operatorname{cosec} x = -\cot x \operatorname{cosec} x dx$,

$d.\operatorname{arc}\sin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

$d.\operatorname{arc}\operatorname{tg} x = \frac{dx}{1+x^2}$,

$d.\operatorname{arc}\sec x = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$,

$d.\operatorname{arc}\cos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

$d.\operatorname{arc}\cot x = -\frac{dx}{1+x^2}$,

$d.\operatorname{arc}\operatorname{cosec} x = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Il est à peine nécessaire d'observer qu'il suffirait, pour tirer de ces formules les dérivées des fonctions, de diviser leurs différentielles par dx. Ainsi l'on aurait

$$D_x \log x = \frac{1}{x\,\mathrm{l}.\mathrm{A}}, \qquad D_x \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x},$$

etc.

§ 2. DIFFÉRENTIELLE D'UNE FONCTION EXPLICITE QUELCONQUE.

58. Les différentielles des fonctions simples d'une variable x étant connues, il sera facile de trouver la différentielle de toute fonction explicite de x, si compliquée qu'elle soit, pourvu qu'il n'y entre que les symboles des opérations qui constituent les fonctions simples considérées jusqu'ici.

En effet, par l'introduction de variables auxiliaires, la fonction proposée deviendra une fonction de plusieurs variables dépendantes de x, et sa différentielle sera donnée par le théorème général (48) en fonction des différentielles de ces variables. En opérant de la même manière sur celles-ci, on finira par être ramené à la différentiation de fonctions simples de x; puis, éliminant les variables auxiliaires et leurs différentielles, ce qui se fera sans difficulté, on obtiendra la différentielle de la fonction proposée, exprimée au moyen de la variable x et de sa différentielle dx. Pour obtenir la dérivée de la fonction, il suffira de diviser par dx.

Exemples. 1° Soit

$$y = \mathrm{l}.\operatorname{tang} x$$

la fonction dont on cherche la différentielle. Posons

$$\operatorname{tg} x = z, \quad y = \mathrm{l}.z;$$

les formules du tableau nous donneront

$$dy = \frac{dz}{z}, \quad dz = \frac{dx}{\cos^2 x},$$

et en éliminant z et dz,

$$dy = d.\,\mathrm{l}.\operatorname{tg} x = \frac{dx}{\operatorname{tg} x \cos^2 x} = \frac{dx}{\sin x \cos x},$$

ce qui est la différentielle cherchée.

2° Soit encore

$$y = (a + bx^n)^m,$$

a, b, m, n étant des constantes. Faisant d'abord

$$a + bx^n = z, \qquad y = z^m,$$

on a

$$dy = mz^{m-1}dz.$$

Soient, en outre,

$$x^n = u, \qquad z = a + bu,$$

les règles établies plus haut donneront

$$dz = bdu, \qquad du = nx^{n-1}dx;$$

d'où enfin, éliminant z, dz, u, du, on trouvera

$$dy = d.(a + bx^n)^m = mnb(a + bx^n)^{m-1}x^{n-1}dx.$$

59. On arrive rapidement, avec un peu d'exercice, à se dispenser d'écrire les lettres z, u,... qui représentent les fonctions plus simples dans lesquelles on décompose la fonction donnée, et à faire mentalement cette série de substitutions. Soit à différentier

$$y = \operatorname{arc\,tg} \frac{2x}{1 - x^2}:$$

on regardera $\frac{2x}{1 - x^2}$ comme une variable nouvelle, égale au rapport de deux autres, et en appliquant les règles établies précédemment pour différentier $\operatorname{arc\,tg} x$, $u : v$, x^2, on aura

$$dy = \frac{d\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)}{1 + \left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2} = \frac{(1 - x^2)\,2dx - 2x\,d(1 - x^2)}{(1 - x^2)^2 + (2x)^2}$$

$$= \frac{(1 + x^2)2dx}{1 + 2x^2 + x^4} = \frac{2dx}{1 + x^2};$$

d'où enfin

$$d.\operatorname{arc\,tg} \frac{2x}{1 - x^2} = \frac{2dx}{1 + x^2}.$$

Quand on a à différentier une fonction compliquée de radicaux, il est souvent plus commode de remplacer ceux-ci par les exposants fractionnaires correspondants, et d'appliquer la règle pour différentier les puissances. Soit

$$y = \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}} = \left[x + (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

On aura

$$dy=\frac{1}{2}\left[x+(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{-\frac{1}{2}}d\left[x+(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[x+(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{-\frac{1}{2}}\left[1+x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\right]dx=\frac{1}{2}\left[x+(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}}dx.$$

Si la fonction à différentier est le produit de plusieurs fonctions élevées à des puissances positives ou négatives, on simplifie le calcul en prenant d'abord le logarithme de la fonction, et appliquant la règle qui sert à différentier un logarithme.

Soit

$$y=\frac{(x-2)^9}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}};$$

on aura

$$\text{l}.y=9\text{l}.(x-2)-\frac{5}{2}\text{l}.(x-1)-\frac{11}{2}\text{l}.(x-3).$$

Egalant les différentielles des deux membres, on a

$$\frac{dy}{y}=9\frac{dx}{x-2}-\frac{5}{2}\frac{dx}{x-1}-\frac{11}{2}\frac{dx}{x-3},$$

ou, en réduisant au même dénominateur,

$$\frac{dy}{y}=\frac{x^2-7x+1}{(x-2)(x-1)(x-3)}dx.$$

Remplaçant y par sa valeur, il vient

$$dy=\frac{(x-2)^8}{(x-1)^{\frac{7}{2}}(x-3)^{\frac{13}{2}}}(x^2-7x+1)\,dx.$$

Soit encore à différentier une expression de la forme

$$y=u^v,$$

u et v étant des fonctions données de x. On appliquera la règle

$$dy=d_uy+d_vy;$$

v étant constant dans la première différentiation, et u dans la seconde,

on aura, par les règles connues,

$$d_u y = v u^{v-1} du, \qquad d_v y = u^v \mathrm{l}.u dv,$$

d'où

$$dy = u^v \left(\frac{v}{u} du + \mathrm{l}.u dv\right).$$

Par exemple, on a

$$d.(\mathrm{tg}\, x)^{\sin x} = (\mathrm{tg}\, x)^{\sin x} \left(\frac{1}{\cos x} + \cos x\, \mathrm{l}.\, \mathrm{tg}\, x\right) dx.$$

Exercices.

1. $y = \left(\frac{b^2}{2} - bx + x^2\right)\left(\frac{b^2}{2} + bx + x^2\right)$; R. $dy = 4x^3 dx$.

2. $y = \frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2}{a + bx + cx^2}$; R. $dy = \frac{(a\beta - b\alpha) + 2(a\gamma - c\alpha)x + (b\gamma - c\beta)x^2}{(a + bx + cx^2)^2} dx$.

3. $y = (9a^2 - 6abx + 5b^2x^2)(a + bx)^{\frac{2}{3}}$; R. $dy = \frac{40}{3} \frac{b^3 x^2}{(a + bx)^{\frac{1}{3}}} dx$.

4. $y = \mathrm{tg}\, x + \frac{1}{3} \mathrm{tg}^3 x$; R. $dy = \frac{dx}{\cos^4 x}$.

5. $y = e^{ax} \cos bx$; R. $dy = e^{ax}(a \cos bx - b \sin bx)\, dx$.

6. $y = \frac{3}{2} x + \left(\frac{3}{2} \cos x + \cos^3 x\right) \sin x$; R. $dy = 4 \cos^4 x dx$.

7. $y = x \cos\left(\mathrm{l}.x - \frac{\pi}{4}\right)$; R. $dy = \sqrt{2} \cos(\mathrm{l}.x)\, dx$.

8. $y = \left(x^3 - \frac{96}{25} x + \frac{288}{125}\right)(4 - 5x)^{-2} + \frac{12}{125} \mathrm{l}.(4 - 5x)$; R. $dy = \frac{5x^3 dx}{(5x - 4)^3}$.

9. $y = \left(x - \frac{1}{2} \mathrm{arc\,tg}\, x\right) \mathrm{arc\,tg}\, x - \frac{1}{2} \mathrm{l}.(1 + x^2)$; R. $dy = \frac{x^2\, \mathrm{arc\,tg}\, x}{1 + x^2} dx$.

10. $y = \mathrm{l}.\frac{\alpha e^x - \beta}{\alpha e^x + \beta}$, R. $dy = \frac{2\alpha\beta\, dx}{\alpha^2 e^x - \beta^2 e^{-x}}$.

11. $y = \mathrm{l}.\frac{\sqrt{\alpha + \beta x} - \sqrt{\alpha - \beta x}}{\sqrt{\alpha + \beta x} + \sqrt{\alpha - \beta x}}$; R. $dy = \frac{\alpha dx}{x\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 x^2}}$.

12. $y = \mathrm{l}.\frac{\alpha + \beta\, \mathrm{tg}\, x}{\alpha - \beta\, \mathrm{tg}\, x}$; R. $dy = \frac{2\alpha\beta dx}{\alpha^2 \cos^2 x - \beta^2 \sin^2 x}$.

13. $y = \dfrac{(x+4)^{\frac{13}{21}}(x-3)^{\frac{13}{28}}}{(x+1)^{\frac{1}{12}}}$; R. $dy = \dfrac{(x^2+x+1)\,dx}{(x+4)^{\frac{8}{21}}(x-3)^{\frac{15}{28}}(x+1)^{\frac{13}{12}}}$.

14. $y = \text{arc tg}\left(\sqrt{\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\,\text{tg}\,\dfrac{x}{2}\right)$; R. $dy = \dfrac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{2}\,\dfrac{dx}{\alpha+\beta\cos x}$.

15. $y = \dfrac{\sin x \cos x}{\sqrt{\alpha\cos^2 x + \beta\sin^2 x}}$; R. $dy = \dfrac{\alpha\cos^4 x - \beta\sin^4 x}{(\alpha\cos^2 x+\beta\sin^2 x)^{\frac{3}{2}}}\,dx$.

16. $y = \dfrac{x\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}}{(x^2+a)^n}$;

R. $dy = \dfrac{a\alpha - [(2n-1)\alpha - 2a\beta]x^2 - [(2n-2)\beta - 3a\gamma]x^4 - (2n-3)\gamma x^6}{(x^2+a)^{n+1}}\,dx$.

17. $y = [\text{l.}(1+x^2)]^{\text{arc tg}\,x}$; R. $dy = \left[\text{l.l.}(1+x^2) + \dfrac{2x\,\text{arc tg}\,x}{\text{l.}(1+x^2)}\right]\dfrac{[\text{l.}(1+x^2)]^{\text{arc tg}\,x}}{1+x^2}\,dx$.

18. Constater, par le signe de la dérivée, que l'on a pour toute valeur positive de x,

$$\text{l.}(1+x) < x, \qquad \text{l.}(1+x) > x - \frac{x^2}{2}.$$

19. *Propriété des fonctions homogènes.* On dit qu'une fonction $F(x, y, z,...)$ de plusieurs variables est *homogène* de degré m, lorsque, chaque variable étant multipliée par une indéterminée t, la fonction est simplement multipliée par t^m; en sorte que l'on a

$$F(tx, ty, tz,...) = t^m F(x, y, z,...).$$

(*Exemple :* La fonction

$$xy^2 + 2xyz \log\frac{y}{x} + z^3$$

est homogène du 3me degré.)

Posons

$$tx = u, \qquad ty = v, \qquad tz = w,...,$$

et prenons les dérivées des deux membres de l'équation par rapport à t d'après la règle des fonctions composées, en regardant $x, y, z,...$ comme constants. Nous aurons

$$D_u F(u, v, w, .)\cdot x + D_v F(u, v, w..)\cdot y + D_w F(u, v, w,...)\,z = m t^{m-1} F(x, y, z,...).$$

Si dans cette équation on pose $t = 1$, d'où $u = x$, $v = y$,..., et par suite

$$D_u F(u, v, w,...) = D_x F(x, y, z,..), \text{ etc.}$$

il viendra

$$xD_x F(x, y, z,...) + yD_y F(x, y,...) + zD_z F(x, y,..) = mF(x, y, z,...).$$

Cette équation constitue une propriété remarquable des fonctions homogènes.

CHAPITRE IV.

DÉRIVÉES, DES DIFFÉRENTIELLES ET DES DIFFÉRENCES SUCCESSIVES D'UNE FONCTION D'UNE SEULE VARIABLE.

80. La dérivée d'une fonction y ou $f(x)$ de la variable x étant elle-même une fonction de x, on peut se proposer de former sa dérivée : celle-ci est la *dérivée seconde* de y par rapport à x. La dérivée de cette dérivée seconde sera la *dérivée troisième* de y, et ainsi de suite. Ces dérivées successives se désignent par

$$f'(x),\quad f''(x),\ldots\quad f^n(x),\ldots$$

ou par

$$D_x y,\quad D^2{}_x y,\ldots\quad D^n{}_x y,\ldots$$

Le rapport $\frac{dy}{dx}$ des différentielles de x et de y étant seul déterminé, l'une de ces différentielles peut être choisie à volonté et même supposée indépendante de x : ordinairement, c'est la différentielle de la variable indépendante que l'on prend ainsi constante. Mais la différentielle dy est une variable dont on peut chercher la différentielle, que l'on nomme la *différentielle seconde* de y et que l'on désigne par d^2y ; la différentielle de d^2y est la différentielle *troisième* de y, ou d^3y, et ainsi de suite(1).

81. Il existe, entre les dérivées et les différentielles de même ordre de y, une relation très-simple, lorsque l'on suppose constante la différentielle dx de la variable indépendante. On a d'abord, par définition,

$$dy = D_x y\cdot dx,\quad d.D_x y = D^2{}_x y\cdot dx,\quad d.D^2{}_x y = D^3{}_x y\cdot dx,\ \text{etc.}\ldots$$

Ensuite, dx étant constant,

$$d^2y = d.dy = d(D_x y\cdot dx) = D^2{}_x y\cdot dx^2;$$
$$d^3y = d.d^2y = d(D^2{}_x y\cdot dx^2) = D^3{}_x y\cdot dx^3;$$

et en général

$$d^n y = D^n{}_x y\cdot dx^n,$$

(1) On ne confondra pas ces différentielles successives d^2y, d^3y,.... avec les puissances de dy, savoir : dy^2, dy^3....; ni avec les différentielles premières des puissances successives de y, savoir : $d.y^2$, $d.y^3$, etc.

d'où

$$(1)\qquad \frac{dy}{dx}=D_xy,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=D^2{}_xy,\ldots\quad \frac{d^ny}{dx^n}=D^n{}_xy.$$

c'est-à-dire *que la dérivée $n^{ième}$ de y par rapport à x, est égale à sa différentielle $n^{ième}$, divisée par la puissance $n^{ième}$ de la différentielle de x, prise constante.*

62. Cette relation simple n'a plus lieu lorsque l'on regarde dx, non plus comme une constante, mais comme une variable, dont les différentielles successives sont aussi représentées par d^2x, d^3x, etc.

Dans ce cas, effectuant les différentiations successives d'après les règles connues, et observant toujours que $d.D^n{}_xy = D_x{}^{n+1}y\cdot dx$, on trouve

$$dy = D_xy\cdot dx;$$

$$d^2y = d(D_xy\cdot dx) = D^2{}_xy\cdot dx^2 + D_xy\cdot d^2x;$$

$$d^3y = d(D^2{}_xy\cdot dx^2 + D_xy\cdot d^2x) = D^3{}_xy\cdot dx^3 + 3D^2{}_xy\cdot dxd^2x + D_xy\cdot d^3x;$$

etc. D'où l'on tire successivement

$$(2)\qquad \begin{cases} D_xy = \dfrac{dy}{dx}; \\[2ex] D^2{}_xy = \dfrac{d^2y - D_xy\cdot d^2x}{dx^2} = \dfrac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^3}; \\[2ex] D^3{}_xy = \dfrac{d^3y - 3D^2{}_xydxd^2x - D_xyd^3x}{dx^3} \\[2ex] \qquad = \dfrac{(dxd^3y - dyd^3x)dx - 3(dxd^2y - dyd^2x)d^2x}{dx^5}; \end{cases}$$

et ainsi de suite. La loi générale est assez compliquée (1).

Ces formules sont particulièrement utiles lorsque, x et y étant considérés comme des fonctions d'une même variable indépendante t, dont la différentielle dt est prise comme constante, on a en vue d'exprimer les dérivées successives de y par rapport à x, en fonction des dérivées de x et de y par rapport à t. Il est évident, en effet, que dans ce cas dx, d^2x,... sont des fonctions de t, de même que dy, d^2y,..., et que les équations (2)

(1) SCHLÖMILCH, *Compendium der Höheren Analysis*, t. II, p. 16.

sont seules applicables. En divisant les seconds membres haut et bas par dt, dt^3, dt^5,... et ayant égard aux relations (1), on trouvera

$$D_x y = \frac{D_t y}{D_t x}, \quad D^2_x y = \frac{D_t x \cdot D^2_t y - D_t y D^2_t x}{D_t x^3}, \text{ etc....}$$

ce qui résout la question.

Les formules (2) renferment aussi le cas où l'on choisirait, pour différentielle constante, la différentielle dy de la fonction. On devrait y faire alors $d^2y = 0$, $d^3y = 0$, etc., et l'on trouverait

$$D_x y = \frac{dy}{dx}, \quad D^2_x y = -\frac{dy d^2x}{dx^3}, \quad D^3_x y = \frac{dy(3d^2x^2 - dxd^3x)}{dx^5},..$$

62. La *différence* Δy de la fonction, correspondant à un accroissement Δx de la variable, est elle-même une fonction de x, en général; et sa différence $\Delta(\Delta y)$ ou $\Delta^2 y$, se nomme la *différence seconde* de y. La différence de $\Delta^2 y$ est la *différence troisième* de y et se désigne par $\Delta^3 y$, et ainsi de suite. On suppose ordinairement que l'accroissement Δx de la variable reste le même dans toutes ces opérations successives.

Dans cette hypothèse, il existe entre les différences et les dérivées de même ordre de la fonction y, une relation importante que nous allons établir. Posons $\Delta x = h$, et rappelons la formule du n° 41

$$(\alpha) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \mathrm{M}_x^{x+h} f'(x).$$

Appliquons cette même formule à la fonction Δy, en observant que, h étant constant par hypothèse, la dérivée de $f(x+h)$ par rapport à x se réduit à $f'(x+h)$. Nous aurons

$$\frac{\Delta(\Delta y)}{\Delta x} = \frac{\Delta[f(x+h) - f(x)]}{h} = \mathrm{M}_x^{x+h} [f'(x+h) - f'(x)].$$

Dans la fonction sous le signe M, où la variable x est censée parcourir toutes les valeurs entre deux limites données x et $x+h$, remplaçons-la, pour plus de clarté, par z; divisons tout par h, il viendra

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = \frac{1}{h} \mathrm{M}_x^{x+h} [f'(z+h) - f'(z)] = \mathrm{M}_x^{x+h} \frac{f'(z+h) - f'(z)}{h}.$$

Mais la même équation (α) nous donne

$$\frac{f'(z+h) - f'(z)}{h} = \mathrm{M}_z^{z+h} f''(z);$$

et il faut, dans les deux limites de cette moyenne, donner à z successivement toutes les valeurs depuis x jusqu'à $x+h$, ce qui fait passer $z+h$ par toutes les valeurs depuis $x+h$ jusqu'à $x+2h$. La fonction $f''(z)$ passe donc par toutes les valeurs qu'elle affecte depuis $z=x$ jusqu'à $z=x+2h$, et $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$ est, d'après ce qui précède, une moyenne entre toutes ces valeurs; on peut donc écrire

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}=\mathrm{M}_x^{x+2h} f''(z).$$

Ce raisonnement peut être continué indéfiniment. Ainsi l'on a

$$\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}=\frac{\Delta^2[f(x+h)-f(x)]}{\Delta x^3}=\mathrm{M}_x^{x+2h}\frac{f''(z+h)-f''(z)}{h},$$

et comme

$$\frac{f''(z+h)-f''(z)}{h}=\mathrm{M}_z^{z+h} f'''(z),$$

il vient

$$\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}=\mathrm{M}_x^{x+3h} f'''(z).$$

On aura donc, en général, en rétablissant Δx au lieu de h,

$$\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}=\mathrm{M}_x^{x+n\Delta x} f^n(z).$$

L'accroissement Δx a été supposé quelconque : supposons qu'il soit infiniment petit, en sorte que $n\Delta x$ tende vers zéro. La limite supérieure $x+n\Delta x$ se rapprochant indéfiniment de la limite inférieure x, il est clair que la moyenne se rapproche indéfiniment de la valeur que la dérivée $f^n(z)$ affecte à l'origine des accroissements, c'est-à-dire de $f^n(x)$, et l'on a, conséquemment,

$$\lim\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}=f^n(x)=\frac{d^n y}{dx^n}.$$

Ainsi, *la dérivée $n^{ième}$ d'une fonction est la limite du rapport de la différence $n^{ième}$ de la fonction, à la puissance $n^{ième}$ de la différence de la variable.*

On conclut de là, en désignant par ω une quantité infiniment petite avec Δx,

$$\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}=\frac{d^n y}{dx^n}+\omega,$$

ou

$$\Delta^n y = \frac{d^n y}{dx^n}\Delta x^n + \omega \Delta x^n.$$

En général, $D^n_x y$ est fini et différent de zéro; le premier terme du second membre est donc de l'ordre n par rapport à Δx; le second terme est infiniment petit par rapport à Δx^n; $\Delta^n y$ est donc de l'ordre n, et en prenant $dx = \Delta x$, on aura

$$\Delta^n y = d^n y,$$

si l'on néglige $\omega \Delta x^n$ comme infiniment petit par rapport à $\Delta^n y$.

64. Le résultat de toute différentiation effectuée sur une fonction explicite de x, étant une nouvelle fonction explicite, la recherche des dérivées ou différentielles successives de cette fonction se ramènera aux règles déjà connues : nous l'effectuerons pour quelques fonctions simples.

I. On a trouvé

$$d.x^a = ax^{a-1}dx;$$

a et dx étant constants, on trouvera de même

$$d^2.x^a = adx\,d.x^{a-1} = a(a-1)x^{a-2}dx^2;$$

et ainsi de suite. En général

$$d^n.x^a = a(a-1)\cdots(a-n+1)x^{a-n}dx^n,$$

d'où

$$\frac{d^n.x^a}{dx^n} = D^n_x x^a = a(a-1)\cdots(a-n+1)x^{a-n}.$$

II. La formule

$$d\,\mathrm{l}.x = \frac{dx}{x}$$

donne immédiatement, d'après la règle ci-dessus,

$$d^n\mathrm{l}.x = d^{n-1}(x^{-1}dx) = (-1)(-2)\cdots(-n+1)x^{-n}dx^n,$$

ou

$$d^n\mathrm{l}.x = (-1)^{n-1}.\frac{1\cdot 2\cdots(n-1)}{x^n}dx^n.$$

Pour avoir $d^n \log x$, il suffira de multiplier par le facteur constant $\frac{1}{\mathrm{l.A}}$.

III. La formule

$$dA^x = A^x\mathrm{l}.A dx,$$

dans laquelle $1. Adx$ est un facteur constant, donne immédiatement

$$d^n A^x = A^x (1.A)^n dx^n.$$

Comme cas particulier, on a

$$d^n e^x = e^x dx^n, \qquad D^n{}_x e^x = e^x.$$

IV. Pour obtenir la loi générale des dérivées successives de $\sin x$, $\cos x$, observons que

$$d.\sin x = \cos x dx = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) dx.$$

Il suffit donc d'ajouter $\frac{\pi}{2}$ à l'arc et de multiplier par dx. La répétition de cette observation conduit facilement à la formule

$$d^n \sin x = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) dx^n.$$

On aura de même

$$d.\cos x = -\sin x dx = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) dx,$$

$$d^n \cos x = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) dx^n.$$

V. On a souvent à former la dérivée n^{me} du produit uv de deux fonctions d'une même variable x. Partant de l'équation.

$$d.uv = udv + vdu$$

et répétant la même opération, on trouve

$$d^2.uv = ud^2v + 2dudv + vd^2u;$$

$$d^3.uv = ud^3v + 3dud^2v + 3d^2udv + vd^3u;$$

et l'analogie de ces formules avec les puissances successives d'un binôme conduit à la loi générale suivante, qui se démontre comme celle du binôme par le passage de n à $n+1$:

$$d^n.uv = ud^nv + ndud^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} d^2ud^{n-2}v + \cdots + vd^nu.$$

On peut l'écrire *symboliquement*

$$d^n.uv = (du + dv)^n,$$

pourvu qu'après le développement du second membre suivant la for-

mule de Newton on change les exposants de du, dv, en indices de différentiation, et que l'on rétablisse, dans les termes extrêmes, les facteurs $(du)^0 = u$ et $(dv)^0 = v$.

Exercices.

Trouver la différentielle $n^{ième}$ des fonctions suivantes :

1. $y = (a + bx)^m$; R. $d^n y = m(m-1)\cdots(m-n+1)\, b^n (a+bx)^{m-n}\, dx^n$.

2. $y = e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)$, θ étant constant.
R. $d^n y = e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta + n\theta)\, dx^n$.

3. $y = e^{ax}\cos bx$; Se ramène au cas précédent en faisant

$$a = \rho\cos\theta, \qquad b = \rho\sin\theta;$$

$$d^n y = \rho^n e^{ax}\cos(bx + n\theta)\, dx^n.$$

4. $y = x^n(1-x)^n$; R. $d^n y = 1\cdot 2\cdots n(1-x)^n \left\{ 1 - \left(\frac{n}{1}\right)^2 \frac{x}{1-x} \right.$

$$\left. + \left[\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\right]^2 \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 - \left[\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\right]^2 \left(\frac{x}{1-x}\right)^3 + \cdots \right\} dx^n.$$

5. $y = \frac{1.x}{x}$; R. $d^n y = (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 2\cdots n}{x^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - 1.x\right) dx^n$.

6. $y = \frac{1}{a^2 - b^2x^2}$; R. $d^n y = \frac{1\cdot 2\cdots n\cdot b^n}{2a}\, dx^n \left[\frac{1}{(a-bx)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(a+bx)^{n+1}}\right]$.

7. Trouver la dérivée n^{me} de la fonction

$$y = \operatorname{arctg} x.$$

Partant de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2},$$

et posant $x = \cot\varphi$, on trouve d'abord

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\sin^2\varphi, \quad \frac{dy}{dx} = \sin^2\varphi;$$

puis successivement

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin^2\varphi\cdot\sin 2\varphi, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 1\cdot 2\cdot\sin^3\varphi\cdot\sin 3\varphi, \cdots$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = (-1)^{n-1}\, 1\cdot 2\cdots(n-1)\sin^n\varphi\cdot\sin n\varphi = (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 2\cdots(n-1)}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}\sin(n\operatorname{arc}\cot x).$$

8. Trouver la dérivée $(n+1)^{ième}$ de

$$y = \text{arc} \sin x.$$

On a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}} = uv.$$

Appliquant la formule qui donne $d^n uv$, et observant que

$$\frac{d^k u}{dx^k} = (-1)^k \frac{1\cdot 3 \cdots (2k-1)}{2^k}(1+x)^{-k-\frac{1}{2}}, \quad \frac{d^k v}{dx^k} = \frac{1\cdot 3 \cdots (2k-1)}{2^k}(1-x)^{-k-\frac{1}{2}},$$

on trouve, après réductions,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1\cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n} \frac{(1-x)^{-n}}{\sqrt{1-x^2}} \left[1 - \frac{n}{1}\frac{1}{2n-1}\frac{1-x}{1+x} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{1\cdot 3}{(2n-1)(2n-3)}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 \right.$$
$$\left. - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3 + \cdots \pm \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n\right].$$

9. Démontrer la formule

$$\frac{d^n \cdot e^{x^2}}{dx^n} = (2x)^n e^{x^2}\left[1 + \frac{n(n-1)}{1}\frac{1}{(2x)^2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{(2x)^4} + \cdots\right].$$

10. Étant donnés

$$y = \sin^{2n-1} z, \quad x = \cos z,$$

démontrer que l'on a

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3 \cdots (2n-1)}{n}\sin nz.$$

CHAPITRE V.

DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES PARTIELLES SUCCESSIVES DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES.

65. Soit $u = \mathrm{F}(x, y)$ une fonction de deux variables. Considérons d'abord y comme constant, et x comme seule variable; la différence *partielle* de u sera $\Delta_x u$. Cette différence étant elle-même une fonction de x, y en général, on peut y fait varier y seul, x étant constant, et prendre sa différence par rapport à y, ou $\Delta_y \Delta_x u$; et ces opérations peuvent être répétées un nombre quelconque de fois, en supposant d'ailleurs que les accroissements Δx, Δy des variables soient indépendants de x et de y.

Si l'on avait opéré dans l'ordre inverse, on aurait obtenu $\Delta_x \Delta_y u$. Mais on a

$$u + \Delta_x u = \mathrm{F}(x + \Delta x, y),$$

d'où, changeant y en $y + \Delta y$,

$$u + \Delta_y u + \Delta_x u + \Delta_y \Delta_x u = \mathrm{F}(x + \Delta x, y + \Delta y);$$

et en opérant dans l'ordre inverse

$$u + \Delta_x u + \Delta_y u + \Delta_x \Delta_y u = \mathrm{F}(x + \Delta x, y + \Delta y).$$

La comparaison de ces deux équations donne

$$(1) \qquad \Delta_y \Delta_x u = \Delta_x \Delta_y u;$$

c'est-à-dire que l'on peut intervertir l'ordre des deux opérations successives marquées par Δ_x, Δ_y, sur une même fonction, sans que le résultat soit changé.

66. De même, la dérivée partielle de u par rapport à x, ou $\mathrm{D}_x u$, est une nouvelle fonction de (x, y), dont on peut prendre la dérivée partielle par rapport à y, x étant constant; on la désigne par $\mathrm{D}_y \mathrm{D}_x u$. On peut dériver celle-ci à son tour par rapport à x ou à y, et ainsi de suite.

On aura d'ailleurs

$$\mathrm{D}_x \Delta_y u = \mathrm{D}_x [\mathrm{F}(x, y + \Delta y) - \mathrm{F}(x, y)] = \mathrm{D}_x \mathrm{F}(x, y + \Delta y) - \mathrm{D}_x \mathrm{F}(x, y),$$

ou

$$(2) \qquad \mathrm{D}_x \Delta_y u = \Delta_y \mathrm{D}_x u,$$

en sorte qu'il est permis de permuter l'ordre des caractéristiques D_x, Δ_y.

Enfin, si l'on prend la différentielle partielle de u par rapport à x, $d_x u$, et qu'on différentie cette expression (qui est fonction de x, y) partiellement par rapport à y, on aura $d_y d_x u$; et ainsi de suite; et dans ces différentiations partielles successives, l'on prendra dx, dy constants, pour simplifier.

67. Comme, dans toutes ces opérations successives, on ne fait jamais varier à la fois qu'une seule des quantités x, y, on peut toujours appliquer les relations établies entre les différences, différentielles et dérivées des fonctions d'une seule variable. Ainsi l'on a immédiatement

$$\mathrm{D}_x u = \frac{d_x u}{dx}, \qquad \mathrm{D}_y \mathrm{D}_x u = \frac{d_y (\mathrm{D}_x u)}{dy} = \frac{d_y}{dy}\left(\frac{d_x u}{dx}\right) = \frac{d_y d_x u}{dy\, dx},$$

puisque dx n'est pas fonction de y; etc.

De même

$$\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \mathop{\mathrm{M}}_{x}^{x+\Delta x} \mathrm{D}_x u; \qquad \frac{\Delta_y \Delta_x u}{\Delta y \Delta x} = \frac{\Delta_x \Delta_y u}{\Delta x \Delta y} = \frac{1}{\Delta y} \mathop{\mathrm{M}}_{x}^{x+\Delta x} \mathrm{D}_x \Delta_y u$$

$$= \frac{1}{\Delta y} \mathop{\mathrm{M}}_{x}^{x+\Delta x} \Delta_y \mathrm{D}_x u = \mathop{\mathrm{M}}_{x}^{x+\Delta x} \frac{\Delta_y \mathrm{D}_x u}{\Delta y} = \mathop{\mathrm{M}}_{x}^{x+\Delta x} \mathop{\mathrm{M}}_{y}^{y+\Delta y} \mathrm{D}_y \mathrm{D}_x u,$$

d'où, évidemment,

$$\frac{\Delta_y \Delta_x u}{\Delta y \Delta x} = \mathop{\mathrm{M}}_{x,\, y}^{x+\Delta x,\, y+\Delta y} \mathrm{D}_y \mathrm{D}_x u, \text{ etc...}$$

Si l'on suppose maintenant que Δx, Δy soient infiniment petits, on conclut de ces relations

$$lim\, \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \mathrm{D}_x u = \frac{d_x u}{dx}; \quad lim\, \frac{\Delta_y \Delta_x u}{\Delta y \Delta x} = \mathrm{D}_y \mathrm{D}_x u = \frac{d_y d_x u}{dy dx}.$$

Enfin, si l'on divise par $\Delta x \Delta y$ les deux membres de l'équation (1) et que l'on passe aux limites, on a

$$lim\, \frac{\Delta_y \Delta_x u}{\Delta y \Delta x} = lim\, \frac{\Delta_x \Delta_y u}{\Delta x \Delta y},$$

ou bien

$$(3) \qquad \mathrm{D}_y \mathrm{D}_x u = \mathrm{D}_x \mathrm{D}_y u,$$

ou encore, en multipliant par $dxdy$ les deux membres,

$$(4) \qquad d_y d_x u = d_x d_y u.$$

On peut donc, sans changer le résultat, intervertir l'ordre soit des caractéristiques D_x, D_y; *soit des caractéristiques* d_x, d_y.

De là résulte une conséquence importante. Concevons que l'on ait effectué sur la fonction u un nombre quelconque de dérivations partielles successives, les unes par rapport à x, les autres par rapport à y, et dans un ordre quelconque : on pourra toujours, sans changer le résultat, intervertir l'ordre de deux opérations consécutives, et par conséquent ranger ces opérations dans tel ordre que l'on voudra. On pourra, par exemple, faire en sorte que toutes les dérivations relatives à une même variable soient faites consécutivement, et indiquées par une seule caractéristique affectée d'un indice convenable, ce qui simplifiera l'écriture. Ainsi l'on aura

$$\mathrm{D}_x \mathrm{D}_y \mathrm{D}_x \mathrm{D}_x \mathrm{D}_y u = \mathrm{D}_x \mathrm{D}_x \mathrm{D}_y \mathrm{D}_x \mathrm{D}_y u = \mathrm{D}_x \mathrm{D}_x \mathrm{D}_x \mathrm{D}_y \mathrm{D}_y u = \mathrm{D}^3{}_x \mathrm{D}^2{}_y u.$$

Et la même remarque s'appliquera aux différentielles partielles successives; ainsi

$$d_y d_x d_y d_y d_x u = d^2{}_x d^3{}_y u = d^3{}_y d^2{}_x u.$$

En général, *l'ordre dans lequel on effectue les différentiations partielles successives sur une même fonction est indifférent, et pourvu que le nombre des opérations qui se rapportent à une même variable ne change pas, le résultat sera le même.* En sorte que l'expression

$$\mathrm{D}^2{}_x \mathrm{D}^3{}_y u \qquad \text{ou} \qquad d^2{}_x d^3{}_y u$$

indiquera le résultat de cinq dérivations ou différentiations partielles successives, deux par rapport à x et trois par rapport à y, se succédant dans un ordre quelconque.

D'ailleurs, comme on a toujours

$$\mathrm{D}^2{}_x \mathrm{D}^3{}_y u = \frac{d^2{}_x d^3{}_y u}{dx^2 dy^3},$$

et que les exposants de dx et dy au dénominateur indiquent assez combien de différentiations partielles portent sur x et combien sur y, pour que l'on puisse au numérateur supprimer les indices et écrire $d^5 u$ au lieu de $d^2{}_x d^3{}_y u$, on est convenu de représenter aussi la dérivée partielle $\mathrm{D}^2{}_x \mathrm{D}^3{}_y u$ par

$$\frac{d^5 u}{dx^2 dy^3}.$$

Nous suivrons cette notation généralement adoptée; ainsi nous écrirons $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{d^2 u}{dxdy}$, au lieu de $\mathrm{D}_x u$, $\mathrm{D}_y u$, $\mathrm{D}_x \mathrm{D}_y u$; par suite, comme nous avons les relations

$$d_x u = \mathrm{D}_x u \cdot dx, \qquad d_y u = \mathrm{D}_y u \cdot dy, \qquad d^2{}_x d^3{}_y u = \mathrm{D}^2{}_x \mathrm{D}^3{}_y u \cdot dx^2 dy^3,$$

nous pourrons aussi écrire ces différentielles partielles de la manière suivante :

$$d_x u = \frac{du}{dx}\, dx, \qquad d_y u = \frac{du}{dy}\, dy, \qquad d^2{}_x d^3{}_y u = \frac{d^5 u}{dx^2 dy^3}\, dx^2 dy^3.$$

On devra bien se garder, lorsqu'on emploiera ces notations, de supprimer, comme facteurs aux deux termes de la fraction, dx, ou dy, ou $dx^2 dy^3$, dont la présence est nécessaire pour restituer aux numérateurs du, $d^5 u$, leur véritable signification de *différentielles partielles,* et pour éviter toute confusion avec les différentielles totales de u dont nous parlerons plus loin.

Remarque. Les définitions, notations et propriétés précédentes s'étendent si facilement à des fonctions de trois ou d'un plus grand nombre de variables, qu'il est superflu d'entrer dans des détails à cet égard. Et quant au calcul des dérivées partielles des fonctions explicites, il ne peut offrir aucune difficulté, et se ramène aux règles relatives aux fonctions d'une seule variable. Nous nous bornons à citer quelques exemples.

Exercices.

1. $u=\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}};\qquad D_x u=\frac{du}{dx}=\frac{2xy^2}{\sqrt{(x^2-y^2)(x^2+y^2)^3}};$

$$\frac{du}{dy}=-\frac{2x^2y}{\sqrt{(x^2-y^2)(x^2+y^2)^3}};\quad D_xD_yu=\frac{d^2u}{dxdy}=\frac{4xy(x^4-x^2y^2+y^4)}{\sqrt{(x^2-y^2)^3(x^2+y^2)^5}};$$

$$D^2{}_xu=\frac{d^2u}{dx^2}=-\frac{2y^2(y^4+3x^4-2x^2y^2)}{\sqrt{(x^2-y^2)^3(x^2+y^2)^5}};\ \text{etc.}$$

2. $u=x^ay^b;\qquad \frac{d^{m+n}u}{dx^mdy^n}=a(a-1)\cdots(a-m+1)\,b\,(b-1)\cdots(b-n+1)x^{a-m}y^{b-n}.$

3. $u=\sin(\alpha x+\beta y+\gamma);\qquad \frac{d^{m+n}u}{dx^mdy^n}=\alpha^m\beta^n\sin\left(\alpha x+\beta y+\gamma+\frac{m+n}{2}\pi\right).$

4. $u=\text{l.}\,\frac{\cos x}{\cos y}$; prouver que l'on a

$$\left[1+\left(\frac{du}{dx}\right)^2\right]\frac{d^2u}{dy^2}-2\frac{du}{dx}\frac{du}{dy}\frac{d^2u}{dxdy}+\left[1+\left(\frac{du}{dy}\right)^2\right]\frac{d^2u}{dx^2}=0.$$

5. $u=\frac{x^2y}{a^2-z^2};\quad \frac{du}{dx}=\frac{2xy}{a^2-z^2};\quad \frac{d^2u}{dxdy}=\frac{2x}{a^2-z^2};\quad \frac{d^2u}{dxdz}=\frac{4xyz}{(a^2-z^2)^2};$

$$\frac{d^3u}{dxdydz}=\frac{4xz}{(a^2-z^2)^2},\ldots$$

6. $u=\text{arc tg}\,\frac{y}{x}$. — En posant $r=\sqrt{x^2+y^2}$, on a

$$x=r\cos u,\quad y=r\sin u,\quad \frac{du}{dx}=-\frac{\sin u}{r},\quad \frac{dr}{dx}=\frac{x}{r}=\cos u,$$

et l'on trouve facilement.

$$\frac{d^mu}{dx^m}=(-1)^m\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(m-1)}{r^m}\sin mu.$$

Ensuite, comme on a

$$\frac{du}{dy}=\frac{\cos u}{r}, \quad \frac{dr}{dy}=\sin u,$$

on trouve encore sans difficulté

$$\frac{d^{m+1}u}{dx^m dy}=(-1)^m\, 1\cdot2\cdot3\cdots(m-1)\left[\frac{m\cos mu\cos u}{r^{m+1}}-\frac{m\sin mu\sin u}{r^{m+1}}\right]$$

$$=(-1)^m\frac{1\cdot2\cdots(m-1)\,m}{r^{m+1}}\sin\left(\overline{m+1}\,u+\frac{\pi}{2}\right),\quad \text{etc.},$$

et en général

$$\frac{d^{m+n}u}{dx^m dy^n}=(-1)^m\frac{1\cdot2\cdots(m+n-1)}{(x^2+y^2)^{\frac{m+n}{2}}}\sin\left(\overline{m+n}\,u+n\frac{\pi}{2}\right).$$

CHAPITRE VI.

DIFFÉRENTIELLES TOTALES SUCCESSIVES DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES.

68. Nous devons considérer maintenant les différentielles totales successives d'une fonction de plusieurs variables. Soit

$$u=F(x,\, y)$$

une fonction de deux variables x, y, qui sont, ou indépendantes, ou fonctions elles-mêmes d'une ou de plusieurs variables. Nous avons défini (45, 46) ce que l'on entend par sa différentielle totale du, et montré qu'elle s'exprime au moyen des différentielles de x et de y par l'équation

$$(1) \qquad du=D_x u\cdot dx+D_y u\cdot dy.$$

Si l'on considère du comme une nouvelle variable, dont on prend la différentielle totale $d.du$ ou d^2u, on aura la *différentielle totale du second ordre* de u; la différentielle totale de d^2u, ou d^3u, sera la différentielle troisième de u, etc. Les mêmes définitions et notations s'appliquent, s'il y a lieu, aux différentielles successives des variables x et y.

Le but que nous nous proposons est *d'exprimer les différentielles totales successives de u, en fonction des dérivées partielles successives de u par rapport à x et à y, et des différentielles successives de x et de y.*

Or, si l'on différentie l'expression (1) d'après les règles du N° 50, dont nous avons fait remarquer la généralité, on trouve

$$d.\,du = d^2u = d(D_xu)\cdot dx + D_xu\cdot d^2x + d(D_yu)\cdot dy + D_yu\cdot d^2y.$$

Mais comme D_xu, D_yu sont fonctions de x, y, on a par l'équation (1)

$$d(D_xu) = D^2{}_xu\cdot dx + D_yD_xu\cdot dy,$$

$$d(D_yu) = D_xD_yu\cdot dx + D^2{}_yu\cdot dy,$$

d'où, substituant, comme $D_yD_xu = D_xD_yu$, on trouve

(2) $d^2u = D^2{}_xu\cdot dx^2 + 2D_xD_yu\cdot dxdy + D^2{}_yu\cdot dy^2 + D_xu\cdot d^2x + D_yu\cdot d^2y.$

En formant de nouveau la différentielle totale de cette expression d'après les mêmes règles, on obtiendrait l'expression de d^3u en fonction des dérivées partielles de u jusqu'au 3me ordre, et des différentielles dx, dy, d^2x, d^2y, d^3x, d^3y; et ainsi de suite. Mais ces formules générales seraient de peu d'utilité, parce que, dans les applications, la fonction u, et celles qui en dérivent par la différentiation, se présentent sous la forme de fonctions *explicites* de x, y, dx, dy, d^2x,..., et qu'il est toujours plus simple d'appliquer directement à l'expression dont on veut former la différentielle totale les règles pour différentier une somme, un produit etc...

Remarquons que, dans le système de notations adopté, les équations (1) et (2) devront s'écrire

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy;$$

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2u}{dxdy}dxdy + \frac{d^2u}{dy^2}dy^2 + \frac{du}{dx}d^2x + \frac{du}{dy}d^2y.$$

69. Nous avons, pour plus de généralité, considéré x et y comme des variables dépendantes, et leurs différentielles dx, dy comme variables. Si l'une d'elles, x par exemple, était la variable indépendante, on prendrait dx constant, et d^2x, d^3x,... seraient nuls.

Si x, y étaient deux variables indépendantes, on pourrait faire dx, dy constants et d^2x, d^2y,... nuls : du ne changerait pas, mais on aurait simplement

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2u}{dxdy}dxdy + \frac{d^2u}{dy^2}dy^2.$$

Il est même facile, dans ce cas, d'obtenir une expression *symbolique* de la différentielle d'ordre quelconque $d^n u$. En effet, l'égalité

$$du = d_x u + d_y u$$

peut s'écrire symboliquement

$$du = (d_x + d_y)u.$$

Pour former $d^2 u$, on devra différentier partiellement du en x et en y, car dx et dy étant constants, ne doivent plus être différentiés. Donc, l'on pourra écrire

$$d^2 u = d.du = d_x(du) + d_y(du) = (d_x + d_y)du,$$

d'où

$$d^2 u = (d_x + d_y)(d_x + d_y)u = (d_x + d_y)^2 u.$$

En poursuivant le même raisonnement, on voit que pour former $d^3 u$ il suffit de multiplier encore symboliquement par $d_x + d_y$, et qu'en général on aura

$$d^n u = (d_x + d_y)^n u.$$

Les produits et les puissances des caractéristiques d_x, d_y sont ici de purs symboles d'opérations à effectuer : il faudra, pour tirer de cette formule sa vraie signification, développer, par la formule du binôme, $(d_x + d_y)^n$ comme si d_x, d_y représentaient des quantités; écrire le facteur u à la suite de chaque terme, et interpréter le résultat conformément aux notations des différentielles partielles. Ainsi l'on trouvera

$$d^2 u = (d_x + d_y)^2 u = (d^2_x + 2d_x d_y + d^2_y)u = d^2_x u + 2d_x d_y u + d^2_y u,$$

ce qui est, sous une forme différente, la valeur de $d^2 u$ trouvée plus haut.

70. Il est parfois commode, quand on a pour but de trouver les dérivées partielles successives d'une fonction de deux variables (x, y), de former d'abord ses différentielles totales, en traitant x, y comme des variables indépendantes. On obtient des résultats de la forme

$$du = pdx + qdy, \quad d^2 u = rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2, \ldots,$$

p, q, r, s, t désignant des fonctions connues de x et de y. Comparant ces résultats aux formules générales ci-dessus, et observant que les quantités dx, dy sont indéterminées, on aura

$$\frac{du}{dx} = p, \quad \frac{du}{dy} = q, \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = r, \quad \frac{d^2 u}{dxdy} = s, \quad \frac{d^2 u}{dy^2} = t, \ldots,$$

ce qui résout la question.

Tout ce que nous avons dit des fonctions de deux variables s'étend, sans difficulté, à des fonctions de trois ou d'un plus grand nombre de variables, dépendantes ou indépendantes.

Exercices.

1. Soient u, v deux fonctions de x, y; (dx, dy), $(\delta x, \delta y)$ deux systèmes de valeurs attribuées aux différentielles des variables; (du, dv), $(\delta u, \delta v)$, les systèmes correspondants de différentielles des fonctions. On a

$$\frac{du\delta v - dv\delta u}{dx\delta y - dy\delta x} = \frac{du}{dx}\frac{dv}{dy} - \frac{du}{dy}\frac{dv}{dx}.$$

2. Étant donnés

$$u = \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}, \quad u = \mathrm{l}.\frac{\cos x}{\cos y},$$

calculer du, d^2u, en supposant dx, dy constants.

3. Etant donné

$$u = e^{ax} \cos by,$$

trouver $d^n u$.

R. $$d^n u = e^{ax}\left[a^n \cos by dx^n + na^{n-1}b \cos\left(by + \frac{\pi}{2}\right)dx^{n-1}dy\right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} a^{n-2} b^2 \cos\left(by + 2\frac{\pi}{2}\right)dx^{n-2}dy^2 + \cdots + b^n \cos\left(by + \frac{n\pi}{2}\right)dy^n\right].$$

4. Soit

$$u = \frac{yz + zx + xy}{x + y + z};$$

$$du = \frac{(y^2 + yz + z^2)\,dx + (z^2 + zx + x^2)\,dy + (x^2 + xy + y^2)\,dz}{(x + y + z)^2}.$$

5. Soit

$$u = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x};$$

démontrer la formule

$$d^n u = (-1)^n \frac{1\cdot 2\cdots(n-1)}{(x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}}}\left[\sin nu\cdot dx^n - n \sin\left(nu + \frac{\pi}{2}\right) dx^{n-1}dy\right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} \sin\left(nu + 2\frac{\pi}{2}\right) dx^{n-2}dy^2 - \cdots \pm \sin\left(nu + \frac{n\pi}{2}\right)dy^n\right].$$

CHAPITRE VII.

DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS IMPLICITES.

71. Il serait impossible d'établir des règles générales pour différentier toute espèce de fonctions implicites : nous considèrerons ici seulement le cas où elles sont liées aux variables dont elles dépendent par des équations, dont les deux membres sont des fonctions explicites des variables. On peut d'ailleurs supposer que les seconds membres de ces équations se réduisent à zéro.

Ainsi défini, le problème se ramène facilement aux principes déjà connus.

§ 1. ÉQUATIONS A DEUX VARIABLES.

72. Considérons deux variables, x et y, liées entr'elles par une équation

$$F(x, y) = 0.$$

Il s'agit de déterminer la dérivée ou la différentielle de la fonction implicite y, sans qu'on soit obligé de résoudre l'équation. Pour cela, observons que si x, y varient simultanément sans cesser de satisfaire à l'équation donnée, la fonction $F(x,y)$ de ces deux variables restant constamment nulle, sa différentielle totale est nulle aussi. On a donc $dF = 0$, ou

$$(1) \qquad \frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy = 0.$$

Cette différentielle totale s'obtiendra par les règles qui conviennent aux fonctions explicites, et l'on aura ainsi une équation du 1er degré entre dx et dy, de laquelle on tirera, soit dy, soit $D_x y$.

Exemple. Soit l'équation

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0;$$

la règle précédente donne

$$dF = 3y^2dy - 3axdy - 3aydx + 3x^2dx = 0,$$

d'où

$$(x^2 - ay)\,dx + (y^2 - ax)\,dy = 0,$$

et par suite

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}.$$

Les différentielles seconde, troisième, etc., de y, s'obtiennent aussi facilement. La différentielle dF étant nulle pour toutes les valeurs de (x,y) qui vérifient l'équation, sa différentielle d^2F sera nulle aussi ; on aura donc

$$d^2\mathrm{F} = 0,$$

ou, en développant cette différentielle et supposant dx constant,

$$(2) \quad \frac{d^2\mathrm{F}}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2\mathrm{F}}{dxdy}dxdy + \frac{d^2\mathrm{F}}{dy^2}dy^2 + \frac{d\mathrm{F}}{dy}d^2y = 0.$$

Remplaçant dy par sa valeur déjà connue, on aura d^2y en fonction de x,y et dx^2. En différentiant totalement l'équation (2), ou en posant $d^3\mathrm{F} = 0$, on aurait d^3y, et ainsi de suite. On pourrait donner, sous forme générale, les résultats auxquels on parvient, mais ces formules servent peu dans la pratique : il est plus simple de former directement, par les règles ordinaires, les différentielles successives de la fonction donnée F, et de les égaler à zéro.

Comme on a surtout en vue de former les dérivées successives de y par rapport à x, on simplifie le calcul en divisant par dx chacune des équations à mesure qu'on les obtient : de cette façon elles renferment, au lieu des différentielles dy, d^2y,..., les dérivées $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$,...

73. Les dérivées obtenues par cette voie renferment, en général, non-seulement x, mais la fonction y elle-même : il arrive fréquemment d'ailleurs que leur expression peut être simplifiée au moyen de l'équation donnée

$$\mathrm{F}(x, y) = 0.$$

Reprenons l'exemple ci-dessus. En formant la différentielle du 1er membre, divisant par dx et égalant à zéro, on obtient

$$x^2 - ay + (y^2 - ax)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Différentiant de nouveau, et divisant par dx qui est constant, on a

$$2x - a\frac{dy}{dx} + \left(2y\frac{dy}{dx} - a\right)\frac{dy}{dx} + (y^2 - ax)\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Tirons de là la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ et substituons à $\frac{dy}{dx}$ son expression connue; il vient

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2\frac{x(y^2-ax)^2 + a(x^2-ay)(y^2-ax) + y(x^2-ay)}{(y^2-ax)^3},$$

ou, après réduction tirée de l'équation primitive,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2a^3xy}{(y^2-ax)^3}.$$

74. On a souvent à calculer les valeurs des dérivées d'une fonction explicite pour $x=0$; pour cela, on cherche une équation du premier degré entre cette fonction et ses premières dérivées, équation que l'on traite ensuite par la méthode précédente.

Soit, par exemple,

$$y = \cos(m \operatorname{arc}\sin x);$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{m\sin(m \operatorname{arc}\sin x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

ou

$$\sqrt{1-x^2}\frac{dy}{dx} + m\sin(m \operatorname{arc}\sin x) = 0.$$

Différentiant de nouveau cette équation, l'on a

$$\sqrt{1-x^2}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\frac{dy}{dx} + \frac{m^2\cos(m \operatorname{arc}\sin x)}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$

ou bien

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + m^2y = 0.$$

Formons la dérivée n^{me} du premier membre de cette équation d'après la règle connue (64, V) : il vient

$$(1-x^2)\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}} - (2n+1)x\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} - (n^2-m^2)\frac{d^ny}{dx^n} = 0.$$

Cette relation entre trois dérivées successives de la fonction proposée se réduit, pour $x=0$, à celle-ci :

$$\left(\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}\right)_0 = (n^2-m^2)\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_0,$$

et comme $D_x y$ s'annule pour $x=0$, il en sera de même de $D^3_x y$, $D^5_x y$, etc. Quant aux dérivées d'ordre pair, on aura, $(y)_0$ étant égal à l'unité,

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 = -m^2, \quad \left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_0 = -m^2(2^2-m^2),$$

$$\left(\frac{d^6y}{dx^6}\right)_0 = -m^2(2^2-m^2)(4^2-m^2),$$

et ainsi de suite.

Exercices.

1. $e^{3x^2-y^2}+\sin(ax+by)=0$; $\quad \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{a-6x\,\mathrm{tg}\,(ax+by)}{b+2y\,\mathrm{tg}\,(ax+by)}$.

2. $x\mathrm{l}.y-y\mathrm{l}.x=0$; $\quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2}{x^2}\,\dfrac{\mathrm{l}.x-1}{\mathrm{l}.y-1}$.

3. $y^3-3axy+x^3=0$; $\quad \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x^4-ay}{y^4-ax}$; $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{6axy(x^3y^3+2a^2)}{(y^4-ax)^3}$.

4. $\arcsin\dfrac{x}{h}+\arcsin\dfrac{y}{k}=a$; $\quad \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\sqrt{k^2-y^2}}{\sqrt{h^2-x^2}}$, $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{x\sqrt{k^2-y^2}+y\sqrt{h^2-x^2}}{(h^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

5. $\mathrm{l}.\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}=\mathrm{arc\,tg}\,\dfrac{y}{x}$; $\quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y}{x-y}$; $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$.

6. $4y^3-3y+\sin x=0$; $\quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\cos x}{3(1-4y^2)}=\dfrac{y\cos x}{3(\sin x-2y)}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{12y^3\sin x-6y^2(1+\sin^2 x)+y\sin x\,(2+\sin^2 x)}{9(2y-\sin x)^3}.$$

7. Étant donné

$$y=\mathrm{arc\,tg}\,x,$$

prouver que l'on a

$$\left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right)_0+n(n-1)\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_0=0,$$

et en déduire les valeurs des dérivées de y pour $x=0$.

8. Soit $y=\arcsin x$; on a

$$\left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right)_0-(n-1)^2\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_0=0.$$

9. Soit

$$y=\frac{x}{e^x-1},$$

on a la relation

$$n\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_0+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right)_0+\cdots+n\left(\frac{dy}{dx}\right)_0+y_0=0,$$

pour toute valeur de $n>2$.

§ 2. ÉQUATIONS RENFERMANT TROIS OU UN PLUS GRAND NOMBRE DE VARIABLES.

75. Il n'y a pas plus de difficulté à différentier les équations qui renferment plus de deux variables. Soit donnée une équation entre trois variables

$$F(x, y, z)=0;$$

x, y étant choisis comme variables indépendantes, z sera une fonction implicite de x et de y. Or, la fonction $F(x, y, z)$ restant constante, pour toutes les valeurs de x, y, z qui satisfont à l'équation, sa différentielle totale, qui se forme d'après les règles données pour les fonctions explicites, est nulle, et l'on a

$$dF=\frac{dF}{dx}dx+\frac{dF}{dy}dy+\frac{dF}{dz}dz=0.$$

Dans cette équation, dz est la différentielle totale de la fonction z (48), et l'équation fera connaître sa valeur en fonction de x, y, z et de dx, dy.

De même, dF étant constamment égal à zéro, sa différentielle totale d^2F sera nulle aussi, et dans cette seconde différentiation, on pourra supposer constantes les différentielles dx, dy des variables indépendantes, puisque ces quantités sont indéterminées (45, 3°) : dF étant alors une fonction de x, y, z, dz, sa différentielle renfermera d^2z, et l'équation $d^2F=0$ fournira la valeur de d^2z en fonction de x, y, z, dx, dy; et ainsi de suite.

Connaissant les différentielles totales successives de z, on en déduira immédiatement ses dérivées partielles (70).

Soit, comme exemple, l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Égalant à zéro la différentielle du premier membre, on a

$$\frac{xdx}{a^2}+\frac{ydy}{b^2}+\frac{zdz}{c^2}=0,$$

d'où

$$dz=-\frac{c^2}{z}\left(\frac{x}{a^2}dx+\frac{y}{b^2}dy\right).$$

Différentions une seconde fois l'équation : il vient

$$\frac{dx^2}{a^2}+\frac{dy^2}{b^2}+\frac{dz^2}{c^2}+\frac{zd^2z}{c^2}=0;$$

d'où, tirant la valeur de d^2z et remplaçant dz^2 par son expression, on a

$$d^2z=-\frac{c^2}{z}\left[\left(\frac{1}{a^2}+\frac{c^2x^2}{a^4z^2}\right)dx^2+2\frac{c^2xy}{a^2b^2z^2}dxdy+\left(\frac{1}{b^2}+\frac{c^2y^2}{b^4z^2}\right)dy^2\right]$$

$$=-\frac{c^4}{z^3}\left[\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dx^2}{a^2}+\frac{2xy}{a^2b^2}dxdy+\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dy^2}{b^2}\right],$$

ou enfin, en ayant égard à l'équation donnée,

$$d^2z=-\frac{c^4}{a^2b^2z^3}[(b^2-y^2)dx^2+2\,xydxdy+(a^2-x^2)dy^2].$$

Ainsi dz, d^2z sont connus; si l'on cherche les dérivées partielles de z, on aura

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{c^2x}{a^2z},\quad \frac{dz}{dy}=-\frac{c^2y}{b^2z},\quad \frac{d^2z}{dx^2}=-\frac{c^4(b^2-y^2)}{a^2b^2z^3},\quad \text{etc...}$$

76. Si l'on a plusieurs équations entre les mêmes variables, les mêmes principes s'appliquent sans difficulté. Soient

$$F(x,y,z,u)=0,$$
$$F_1(x,y,z,u)=0,$$

deux équations entre quatre variables x, y, z, u; deux variables, z et u par exemple, seront fonctions des autres, x, y, que l'on regardera comme indépendantes. Il s'agit d'exprimer les différentielles totales dz, du, d^2z, d^2u,... en fonction de x, y, z, u et des différentielles dx, dy, supposées *constantes* puisqu'elles sont arbitraires.

En raisonnant comme plus haut, nous sommes conduits à poser les égalités

$$dF=\frac{dF}{dx}dx+\frac{dF}{dy}dy+\frac{dF}{dz}dz+\frac{dF}{du}du=0,$$

$$dF_1=\frac{dF_1}{dx}dx+\frac{dF_1}{dy}dy+\frac{dF_1}{dz}dz+\frac{dF_1}{du}du=0,$$

qui sont du premier degré en dz, du. Il suffira donc de résoudre ces deux équations par rapport à dz, du pour obtenir ces différentielles totales, sous la forme $pdx+qdy$.

Posant ensuite $d^2F = 0$, $d^2F_1 = 0$, ou différentiant les équations ci-dessus par rapport à toutes les variables x, y, z, u, dz, du, qu'elles renferment, nous formerons deux nouvelles équations du premier degré en d^2z, d^2u, et nous en déduirons, après substitution des valeurs de dz, du, les valeurs de d^2z, d^2u sous la forme $rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2$. Et ainsi de suite. On écrirait facilement, en formules générales, les résultats de ces différentiations successives, mais cela n'offrirait que peu d'utilité pour les applications.

77. En général, soient n variables liées entr'elles par k équations

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} F_1(x, y, \ldots u, v, \ldots) = 0, \\ F_2(x, y, \ldots u, v, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ F_k(x, y, \ldots u, v, \ldots) = 0, \end{array} \right.$$

k étant $< n$. En vertu de ces équations, k variables u, v,... pourront être considérées comme fonctions des $n - k$ variables restantes x, y,..., qui seront arbitraires; et la recherche des différentielles totales successives des variables dépendantes se ramènera toujours à ces trois principes simples :

1° Les fonctions F_1, F_2,..., F_k des n variables étant assujéties, par la nature de la question, à rester constamment égales à zéro, leurs différentielles premières, secondes, troisièmes, etc., seront nulles.

2° La différentielle totale d'une fonction, quelque soit le nombre des variables, est la somme des différentielles partielles de la fonction par rapport à toutes les variables.

3° Les différentielles dx, dy,... des variables indépendantes étant des quantités arbitraires, on les choisira constantes dans les différentiations successives, ce qui facilitera les différentiations et le passage des différentielles aux dérivées partielles de u, v,...

L'application directe de ces règles résoudra la question. Les k équations

$$dF_1 = 0, \quad dF_2 = 0, \ldots, \quad dF_k = 0,$$

fourniront du, dv,... par la résolution d'un système d'équations du premier degré. Une seconde différentiation donnera k nouvelles équations du premier degré en d^2u, d^2v,..., d'où l'on tirera les valeurs de ces inconnues. Et ainsi de suite.

Les dérivées partielles successives de u, v,... seront faciles à déduire de là : ainsi, pour obtenir $D^2_x D_y u$, il suffira de chercher le coefficient de dx^2dy dans l'expression de d^3u, et de le diviser par 3 (70).

78. Il peut se faire que l'on ait $k = n - 1$; dans ce cas, une seule variable, x par exemple, reste arbitraire : les autres sont toutes des fonctions de x, en vertu des $n - 1$ équations qui les lient. On opèrera du reste comme dans le cas général, en regardant dx comme une constante. Seulement, il sera plus commode, afin d'avoir immédiatement des équations où entrent les dérivées des fonctions, de diviser par dx chaque équation en même temps qu'on la différentie.

Exercices.

1. $2axz + 2byz + cz^2 = k^3$; $\quad dz = -\dfrac{adx + bdy}{ax + by + cz}$,

$$d^2z = \frac{k^3 (adx + bdy)^2}{(ax + by + cz)^3}.$$

2. $z^3 + xy^2 - x = 0$; $\quad dz = \dfrac{z}{3x}dx - \dfrac{2xy}{3z^2}dy$;

$$d^2z = -\frac{2}{9}\left[\frac{z}{x^2}dx^2 + \frac{2y}{z^2}dxdy + \frac{x^2(y^2+3)}{z^5}dy^2\right];$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dy^2} - \left(\frac{d^2z}{dydx}\right)^2 = \frac{4}{27z^4}.$$

3. $x^x y^y z^z = a$; $\quad \dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{1 + \mathrm{l}.x}{1 + \mathrm{l}.z}$, $\quad \dfrac{dz}{dy} = -\dfrac{1 + \mathrm{l}.y}{1 + \mathrm{l}.z}$;

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{x(1+\mathrm{l}.x)^2 + z(1+\mathrm{l}.z)^2}{xz(1+\mathrm{l}.z)^3}, \quad \frac{d^2z}{dxdy} = -\frac{(1+\mathrm{l}.x)(1+\mathrm{l}.y)}{(1+\mathrm{l}.z)^3}, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = \cdots.$$

4. $x + y + z = a$, $\quad x^2 + y^2 + z^2 = b^2$;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{z - x}{y - z}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{y - x}{z - y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3b^2 - a^2}{(z - y)^3}, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{3b^2 - a^2}{(y - z)^3}.$$

5. $\left\{\begin{array}{l} uv - [\alpha(a - x) + \beta(b - y) + \gamma(c - z)] = 0, \\ (a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2 - v^2 = 0. \end{array}\right.$

Former les dérivées partielles de u, v, par rapport à x, y, z, et montrer que l'on a

$$(a - x)\frac{du}{dx} + (b - y)\frac{du}{dy} + (c - z)\frac{du}{dz} = 0,$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{2u}{v^2}.$$

6. Etant données deux équations entre quatre variables

$$F_1(x, y, u, v) = 0, \qquad F_2(x, y, u, v) = 0,$$

on peut y considérer u, v comme fonctions de x, y, ou bien x, y comme fonctions de u, v. Les quatre dérivées partielles qui répondent au premier cas, et les quatre dérivées partielles qui répondent au second, satisfont aux relations

$$\frac{dx}{du}\frac{du}{dx}+\frac{dx}{dv}\frac{dv}{dx}=1, \qquad \frac{dx}{du}\frac{du}{dy}+\frac{dx}{dv}\frac{dv}{dy}=0.$$

$$\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}+\frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx}=0, \qquad \frac{dy}{du}\frac{du}{dy}+\frac{dy}{dv}\frac{dv}{dy}=1.$$

7. Soient u, v des fonctions implicites de quatre variables x, y, α, β, définies par deux équations de la forme

$$u = \alpha + x\varphi(u, v), \qquad v = \beta + y\psi(u, v).$$

On a, en désignant par $f(u, v)$ une fonction quelconque de u, v,

$$\frac{df}{dx} = \varphi(u, v)\frac{df}{d\alpha}, \qquad \frac{df}{dy} = \psi(u, v)\frac{df}{d\beta}.$$

CHAPITRE VIII.

DU CHANGEMENT DES VARIABLES.

§ 1. FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE.

79. Soit y une fonction, *généralement inconnue,* de la variable x, et

$$V = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\right)$$

une expression renfermant, en général, les variables x et y, ainsi que les dérivées de y jusqu'à un ordre déterminé. On se propose de résoudre l'un des deux problèmes suivants :

1[er] *problème.* Eliminer, de l'expression donnée, la variable x, pour introduire à sa place une nouvelle variable t, liée avec x par une équation donnée, et à la place des dérivées de y par rapport à x, ses dérivées par rapport à t. Ce problème est celui du *changement de la variable indépendante.*

On exprimera d'abord $D_x y$, $D^2_x y$,... en fonction des dérivées de x et y par rapport à t, au moyen des relations (62)

$$(1) \qquad D_x y = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \qquad D^2_x y = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}, \qquad \text{etc.}$$

L'équation donnée entre x et t fera connaître explicitement les dérivées de x par rapport à t, et en remplaçant dans V les dérivées $D_x y$, $D^2_x y$,... par leurs valeurs, puis éliminant x à l'aide de l'équation entre x et t, on aura V en fonction de y, t, $D_t y$, $D^2_t y$,..., ce qui était le but qu'on se proposait.

Exemple. On demande de transformer *l'équation différentielle* entre x et y

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + a^2 y = 0,$$

en une équation entre y et t, d'après la relation

$$x = \cos t.$$

On a

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\cos t;$$

les formules (1) deviennent

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin t}\frac{dy}{dt}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\sin^2 t}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{\cos t}{\sin^3 t}\frac{dy}{dt};$$

substituant et éliminant x de l'équation donnée, on obtient

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a^2 y = 0,$$

pour l'équation différentielle entre y et t.

Exercices.

1. $V = (a^2 + x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx}$;

$$x = \frac{a}{2}(e^t - e^{-t}); \quad V = \frac{d^2y}{dt^2}.$$

2. $(a + x)^3\frac{d^3y}{dx^3} + 3(a + x)^2\frac{d^2y}{dx^2} + (a + x)\frac{dy}{dx} + by = 0.$

Transformer par la relation $a + x = e^t$.

$$\text{R.}\quad \frac{d^3y}{dt^3} + by = 0.$$

2. Transformer, en prenant y pour variable indépendante, les équations

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{mx}{y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + n\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0;\quad \text{R.}\quad \frac{d^2x}{dy^2} - n\frac{dx}{dy} - \frac{mx}{y^2} = 0.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + e^y\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0;\quad \text{R.}\quad \frac{d^2x}{dy^2} + x = e^y.$$

80. 2me *Problème. — Changement de toutes les variables.* — On demande d'éliminer de l'expression donnée

$$V = f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \cdots\right)$$

les variables x, y, pour introduire à leur place deux nouvelles variables u, t, liées aux premières par deux équations données, et substituer aux dérivées de y par rapport à x celles de u par rapport à t.

Les équations données

$$F(x, y, u, t) = 0,\quad F_1(x, y, u, t) = 0,$$

jointes à la relation inconnue entre x et y, permettent de regarder x, y, u comme des fonctions de t, variable indépendante. En différentiant ces équations, on en tirera $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, en fonction des variables et de $\frac{du}{dt}$. Différentiant une seconde fois, on aura deux équations qui donneront $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, en fonction des mêmes quantités et de $\frac{d^2u}{dt^2}$; et ainsi de suite.

D'autre part, les équations (1) nous permettent d'exprimer les dérivées successives de y par rapport à x, en fonction des dérivées de même ordre de x et de y par rapport à t. Remplaçant ces dernières par leurs valeurs déjà trouvées, et portant les résultats dans l'expression V, il ne restera plus qu'à éliminer x et y pour avoir la valeur de V transformée en u, t, $\frac{du}{dt}$, $\frac{d^2u}{dt^2}$, etc...

Ce cas est celui qui se présente lorsque l'on a obtenu l'expression d'une certaine grandeur géométrique, en fonction des coordonnées rectangulaires x et y d'une courbe, et qu'on veut la transformer en coordonnées

polaires. Les nouvelles variables, r et θ, dépendent des premières par les relations

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

On a donc

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos\theta\frac{dr}{d\theta} - r\sin\theta, \qquad \frac{dy}{d\theta} = \sin\theta\frac{dr}{d\theta} + r\cos\theta;$$

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} = \cos\theta\frac{d^2r}{d\theta^2} - 2\sin\theta\frac{dr}{d\theta} - r\cos\theta,$$

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} = \sin\theta\frac{d^2r}{d\theta^2} + 2\cos\theta\frac{dr}{d\theta} - r\sin\theta; \quad \text{etc.}$$

Les équations (1) deviennent, en remplaçant t par θ,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\theta\frac{dr}{d\theta} + r\cos\theta}{\cos\theta\frac{dr}{d\theta} - r\sin\theta}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{r^2 + 2\frac{dr^2}{d\theta^2} - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{\left(\cos\theta\frac{dr}{d\theta} - r\sin\theta\right)^3},$$

et ainsi de suite. On voit comment les dérivées de y par rapport à x s'exprimeraient en fonction de celles de r par rapport à θ. Substituant ensuite dans l'expression donnée V, et remplaçant x, y par leurs valeurs en r et θ, la transformation serait effectuée.

Si la relation entre les anciennes et les nouvelles variables était exprimée par des équations différentielles, on pourrait encore, dans certains cas, au moyen de telles équations, faire l'élimination demandée.

Exercices.

1. Transformer, à l'aide des relations $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, les expressions

$$V = \frac{x\frac{dy}{dx} - y}{x + y\frac{dy}{dx}}, \qquad V_1 = \frac{x\frac{dy}{dx} - y}{\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}}, \qquad V_2 = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

R. $$V = r\frac{d\theta}{dr}, \qquad V_1 = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}}}, \qquad V_2 = \frac{\left(r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\frac{dr^2}{d\theta^2} - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}.$$

2. Transformer l'expression de V_2 (ex. 1) en u et t, à l'aide des relations

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} t, \qquad dx^2 + dy^2 = du^2.$$

R. $$V_2 = \frac{du}{dt}.$$

8. Même problème, les relations étant

$$t=\frac{dy}{dx},\quad u=y-tx.$$

$$\text{R.}\quad V_2=-(1+t^2)^{\frac{3}{2}}\frac{d^2u}{dt^2}.$$

§ 2. FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES.

81. Les fonctions de plusieurs variables indépendantes donnent lieu à des problèmes analogues aux précédents. Soit d'abord z une fonction, ordinairement inconnue, de deux variables indépendantes x et y; et

$$V=f\left(x,\ y,\ z,\ \frac{dz}{dx},\ \frac{dz}{dy},\ \frac{d^2z}{dx^2}\cdots\right)$$

une expression qui renferme, outre les variables, les dérivées partielles successives de z par rapport à x et à y.

Le premier problème, celui du *changement des variables indépendantes*, consiste à éliminer de la fonction V les variables x, y, pour introduire deux nouvelles variables u, t, liées à x et à y par deux équations données, et les dérivées partielles de z par rapport à u, t, au lieu des dérivées par rapport à x, y.

Il faut donc, d'abord, chercher à exprimer D_xz, D_yz, D^2_xz,..., en fonction des dérivées partielles de z par rapport à u, t. Pour cela, on pourrait considérer z comme fonction immédiate de u, t, et ces dernières variables comme dépendant de x, y : on formerait alors D_xz par la règle des fonctions composées, etc. Mais la méthode suivante, plus élégante, est aussi plus commode dans les principaux cas où ce problème se présente.

Si l'on regarde z comme fonction de x et de y, et que l'on forme sa différentielle totale, on a

$$dz=\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy.$$

Les variables x, y étant données en fonction de u, t, on en déduit

$$dx=\alpha du+\beta dt,$$
$$dy=\alpha_1du+\beta_1dt,$$

α, α_1, β, β_1, étant des fonctions connues de u, t; d'où

$$dz=\left(\alpha\frac{dz}{dx}+\alpha_1\frac{dz}{dy}\right)du+\left(\beta\frac{dz}{dx}+\beta_1\frac{dz}{dy}\right)dt.$$

Mais, d'autre part, si l'on regarde z comme dépendant immédiatement de u et t, l'on a

$$dz = \frac{dz}{du}du + \frac{dz}{dt}dt,$$

et, égalant ces deux valeurs de dz, observant que du, dt, sont des quantités indéterminées, on obtient

$$\alpha\frac{dz}{dx} + \alpha_1\frac{dz}{dy} = \frac{dz}{du},$$

$$\beta\frac{dz}{dx} + \beta_1\frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dt},$$

équations d'où l'on tire $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, en fonction de u, t, $\frac{dz}{du}$, $\frac{dz}{dt}$.

De même, si l'on forme d^2z, en considérant z comme fonction de u et t, soit médiatement par l'intermédiaire de x, y, soit immédiatement, l'on a

$$\left\{\begin{aligned} d^2z &= \frac{d^2z}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2z}{dxdy}dxdy + \frac{d^2z}{dy^2}dy^2 + \frac{dz}{dx}d^2x + \frac{dz}{dy}d^2y; \\ d^2z &= \frac{d^2z}{du^2}du^2 + 2\frac{d^2z}{dudt}dudt + \frac{d^2z}{dt^2}dt^2. \end{aligned}\right.$$

Mais en différentiant de nouveau x et y, et prenant du, dt constants, on a

$$d^2x = \gamma du^2 + 2\delta dudt + \varepsilon dt^2,$$

$$d^2y = \gamma_1 du^2 + 2\delta_1 dudt + \varepsilon_1 dt^2,$$

γ, δ,... étant des fonctions connues de u, t.

La substitution des valeurs de dx, dy, d^2x, d^2y dans la première expression de d^2z lui donnera la forme $\text{M}du^2 + \text{N}dudt + \text{P}dt^2$; on égalera les deux valeurs de d^2z, et on observera que les coefficients de du^2, $dudt$, dt^2 doivent être égaux de part et d'autre. Cela fournira les trois équations

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha^2\frac{d^2z}{dx^2} + 2\alpha\alpha_1\frac{d^2z}{dxdy} + \alpha_1^2\frac{d^2z}{dy^2} + \gamma\frac{dz}{dx} + \gamma_1\frac{dz}{dy} = \frac{d^2z}{du^2}, \\ &\alpha\beta\frac{d^2z}{dx^2} + (\alpha\beta_1 + \beta\alpha_1)\frac{d^2z}{dxdy} + \alpha_1\beta_1\frac{d^2z}{dy^2} + \delta\frac{dz}{dx} + \delta_1\frac{dz}{dy} = \frac{d^2z}{dudt}, \\ &\beta^2\frac{d^2z}{dx^2} + 2\beta\beta_1\frac{d^2z}{dxdy} + \beta_1^2\frac{d^2z}{dy^2} + \varepsilon\frac{dz}{dx} + \varepsilon_1\frac{dz}{dy} = \frac{d^2z}{dt^2}, \end{aligned}\right.$$

desquelles on tirera $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$. Et ainsi de suite.

Il ne restera plus qu'à porter, dans l'expression de V, les valeurs trouvées pour $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, etc., puis à remplacer encore x et y par leurs valeurs en u et t, et le problème proposé sera résolu.

Exemple. Soient

$$V=\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d^2z}{dy^2},$$

r, θ deux nouvelles variables; et

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta.$$

On a

$$dx=\cos\theta dr-r\sin\theta d\theta,\quad dy=\sin\theta dr+r\cos\theta d\theta,$$

$$d^2x=-2\sin\theta\, drd\theta-r\cos\theta d\theta^2,\quad d^2y=2\cos\theta drd\theta-r\sin\theta d\theta^2.$$

La méthode précédente conduit aux équations

$$\cos\theta\frac{dz}{dx}+\sin\theta\frac{dz}{dy}=\frac{dz}{dr},$$

$$-\sin\theta\frac{dz}{dx}+\cos\theta\frac{dz}{dy}=\frac{1}{r}\frac{dz}{d\theta},$$

d'où l'on tirerait D_xz et D_yz; puis aux suivantes :

$$\cos^2\theta\frac{d^2z}{dx^2}+2\sin\theta\cos\theta\frac{d^2z}{dxdy}+\sin^2\theta\frac{d^2z}{dy^2}=\frac{d^2z}{dr^2},$$

$$r^2\sin^2\theta\frac{d^2z}{dx^2}-2r^2\sin\theta\cos\theta\frac{d^2z}{dxdy}+r^2\cos^2\theta\frac{d^2z}{dy^2}-r\cos\theta\frac{dz}{dx}-r\sin\theta\frac{dz}{dy}=\frac{d^2z}{d\theta^2}.$$

Il suffit d'ajouter ces deux équations membre à membre, après avoir multiplié la première par r^2, et d'avoir égard à la valeur ci-dessus de $\frac{dz}{dr}$, pour trouver

$$r^2\left(\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d^2z}{dy^2}\right)-r\frac{dz}{dr}=r^2\frac{d^2z}{dr^2}+\frac{d^2z}{d\theta^2},$$

d'où

$$V=\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d^2z}{dy^2}=\frac{d^2z}{dr^2}+\frac{1}{r^2}\frac{d^2z}{d\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{dz}{dr}.$$

La forme des équations données a permis ici de simplifier quelque peu la marche générale.

82. On peut aussi avoir à *changer toutes les variables*. Soit toujours

$$V = f\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dx^2}, \ldots\right)$$

l'expression à transformer, et supposons trois nouvelles variables v, u, t, liées à x, y, z par trois équations données. Comme d'ailleurs z est une fonction de x et de y, il n'y a que deux variables indépendantes, et si l'on choisit comme telles u et t, les quatre autres seront fonctions de celles-là. Il s'agit d'introduire, dans l'expression de V, les nouvelles variables v, u, t, ainsi que les dérivées partielles de v par rapport à u, t.

Pour exprimer d'abord les dérivées partielles de z en fonction de celles de v, reprenons l'équation

$$(1) \qquad dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy.$$

Les variables x, y, z étant données en fonction de v, u, t, on aura, en les différentiant, des expressions de la forme

$$(2) \qquad \begin{cases} dx = \alpha dv + \beta du + \gamma dt, \\ dy = \alpha_1 dv + \beta_1 du + \gamma_1 dt, \\ dz = \alpha_2 dv + \beta_2 du + \gamma_2 dt, \end{cases}$$

α, β, ... étant des fonctions connues de v, u, t. Enfin, l'on a

$$dv = \frac{dv}{du}du + \frac{dv}{dt}dt.$$

Substituant cette valeur de dv dans les équations précédentes, puis remplaçant dx, dy, dz par les valeurs ainsi obtenues dans l'équation (1), ses deux membres auront la forme $Mdu + Ndt$; et comme du, dt sont arbitraires, leurs coefficients devront être respectivement égaux dans ces deux membres. On aura ainsi deux équations du premier degré qui feront connaître $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ en fonction de $\frac{dv}{du}$, $\frac{dv}{dt}$, et des variables v, u, t.

On procède de la même manière pour les dérivées d'ordre supérieur. Considérant z comme fonction de x, y, on a

$$d^2z = \frac{d^2z}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2z}{dxdy}dxdy + \frac{d^2z}{dy^2}dy^2 + \frac{dz}{dx}d^2x + \frac{dz}{dy}d^2y.$$

On remplace dx, dy, d^2x, d^2y, d^2z par leurs valeurs tirées des équations (2), différentiées en regardant du, dt comme constants, mais dv

comme variable, puisque v est fonction de u et de t. On substitue ensuite, dans l'équation résultante, à dv sa valeur ci-dessus, et à d^2v sa valeur

$$d^2v = \frac{d^2v}{du^2}du^2 + 2\frac{d^2v}{dudt}dudt + \frac{d^2v}{dt^2}dt^2,$$

et l'on voit sans peine que les deux membres de l'équation prendront la forme $Pdu^2 + 2Qdudt + Rdt^2$. Les coefficients de du^2, $dudt$, dt^2 devant être respectivement égaux de part et d'autre, il résultera de là trois équations qui fourniront $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$, exprimés en fonction de $\frac{dv}{du}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{d^2v}{du^2}$, $\frac{d^2v}{dudt}$, $\frac{d^2v}{dt^2}$, et des variables. Et ainsi de suite.

Si l'on reporte ensuite, dans la fonction V, les valeurs trouvées pour $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, etc., et si l'on remplace x, y, z par leurs valeurs en v, u, t, la transformation demandée sera effectuée.

83. Les méthodes précédentes pour le changement, soit des variables indépendantes, soit des variables et de la fonction elle-même, s'étendent facilement au cas où il y aurait trois ou un plus grand nombre de variables indépendantes.

Exercices.

1. Transformer $V = x\frac{dz}{dy} - y\frac{dz}{dx}$ en prenant pour variables indépendantes r, θ; on a

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

$$\text{R.} \quad V = \frac{dz}{d\theta}.$$

2. Faire la même transformation sur $V = x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy}$.

$$\text{R.} \quad V = r\frac{dz}{dr}.$$

3. Transformer l'équation

$$\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{d^2z}{dy^2} = 0,$$

en posant

$$x + y = u, \qquad x - y = t. \qquad \text{R.} \quad \frac{d^2z}{dudt} = 0.$$

4. Transformer $V = \frac{d^2z}{dx^2}\frac{d^2z}{dy^2} - \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2$, étant donné

$$x = \alpha u + \beta t, \qquad y = \alpha_1 u + \beta_1 t.$$

R. $$\frac{d^2z}{dx^2}\frac{d^2z}{dy^2} - \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2 = \frac{1}{(\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1)^2}\left[\frac{d^2z}{du^2}\frac{d^2z}{dt^2} - \left(\frac{d^2z}{dudt}\right)^2\right].$$

Cette propriété peut être généralisée.

5. Transformer l'équation

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0,$$

les nouvelles variables r, θ, ψ étant données par les équations

$$x = r\sin\theta\cos\psi, \qquad y = r\sin\theta\sin\psi, \qquad z = r\cos\theta.$$

R. $$\frac{d\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right)}{dr} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{d\left(\sin\theta\frac{d\varphi}{d\theta}\right)}{d\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2\varphi}{d\psi^2} = 0.$$

6. Transformer l'expression

$$V = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2},$$

en introduisant les variables r, θ, ψ, définies dans l'exemple 5.

R. $$V = \frac{\sqrt{\sin^2\theta\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right] + \left(\frac{dr}{d\psi}\right)^2}}{\sin\theta\left(\frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta\right)}.$$

7. Soient λ, μ, ν, trois nouvelles variables liées à x, y, z par les équations

$$x = \frac{\lambda\mu\nu}{bc}, \quad y = \frac{\sqrt{\lambda^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}}, \quad z = \frac{\sqrt{\lambda^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}}.$$

Transformer en λ, μ, ν, l'expression $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

R. $$ds^2 = \frac{(\lambda^2 - \mu^2)(\lambda^2 - \nu^2)}{(\lambda^2 - b^2)(\lambda^2 - c^2)}d\lambda^2 + \frac{(\lambda^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}d\mu^2 + \frac{(\lambda^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}d\nu^2.$$

8. Deux fonctions φ, φ_1 des variables x, y, z vérifient l'équation

$$\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi_1}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{d\varphi_1}{dy} + \frac{d\varphi}{dz}\frac{d\varphi_1}{dz} = 0;$$

Transformer cette équation en prenant pour variables indépendantes λ, μ, ν (ex. 7).

R. $$(\lambda^2 - b^2)(\lambda^2 - c^2)(\mu^2 - \nu^2)\frac{d\varphi}{d\lambda}\frac{d\varphi_1}{d\lambda} + (\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)(\lambda^2 - \nu^2)\frac{d\varphi}{d\mu}\frac{d\varphi_1}{d\mu}$$
$$+ (b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)(\lambda^2 - \mu^2)\frac{d\varphi}{d\nu}\frac{d\varphi_1}{d\nu} = 0.$$

LIVRE DEUXIÈME.

APPLICATIONS ANALYTIQUES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

CHAPITRE IX.

THÉORÈMES DE TAYLOR ET DE MACLAURIN.

§ 1. SÉRIES ORDONNÉES SUIVANT LES PUISSANCES D'UNE VARIABLE.

84. Soit

$$(1) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

une série ordonnée suivant les puissances *entières, positives et croissantes* d'une variable x, les coefficients $a_0, a_1, \cdots a_n, \cdots$ étant positifs ou négatifs. Voici quelques propriétés remarquables des séries de cette forme.

I. *Si, pour une valeur x_1 de x, la valeur absolue du terme général $a_n x^n$ ne croît pas indéfiniment avec n, la série* (1) *est convergente pour toute valeur de x numériquement inférieure à x_1.*

Car, soient α_n, r, r_1 les valeurs absolues respectives de a_n, x, x_1. La série

$$1 + \frac{r}{r_1} + \frac{r^2}{r_1^2} + \cdots + \frac{r^n}{r_1^n} + \cdots$$

étant évidemment convergente lorsque $r < r_1$, si l'on multiplie ses termes respectivement par les facteurs $\alpha_0, \alpha_1 r_1, \alpha_2 r_1^2, \cdots \alpha_n r_1^n, \cdots$, qui, par hypothèse, ne dépassent jamais une limite donnée, on aura une nouvelle série convergente (20, IV)

$$\alpha_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2 + \cdots + \alpha_n r^n + \cdots$$

Cette série n'est autre que (1), dans laquelle on réduit chaque terme à sa valeur absolue : sa convergence entraîne donc (22) celle de la série (1).

Celle-ci est donc convergente pour toute valeur de x telle que l'on ait $r < r_1$. De plus, il ressort de la démonstration que, *entre ces limites*, la série reste encore convergente si l'on réduit chaque terme à sa valeur absolue.

D'après cela, marquons dans la suite des valeurs absolues de x croissant à partir de zéro, la plus grande valeur r_1 de r pour laquelle $\alpha_n r^n$ ne devient pas infini avec n; il suit du théorème précédent que la série

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + .. + a_n x^n + ...$$

sera convergente pour toute valeur de x *numériquement* inférieure à r_1, et divergente pour toute valeur de x numériquement supérieure à r_1; car, dans le dernier cas, le terme général $a_n x^n$ croîtrait indéfiniment. Pour $x = \pm r_1$, il pourra y avoir, soit convergence, soit divergence.

85. II. *La somme de la série* (1) *est une fonction continue de x, dans l'intervalle des valeurs de x où la série est convergente.*

Soit s la somme de la série; posons

$$s_n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}; \quad R_n = a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \cdots;$$

d'où

$$s = s_n + R_n.$$

Pour un accroissement infiniment petit Δx de la variable, l'on a

$$\Delta s = \Delta s_n + \Delta R_n.$$

Or, si nous désignons par ρ une quantité comprise entre r et r_1, la série

$$\alpha_0 + \alpha_1 \rho + \alpha_2 \rho_2 + \cdots + \alpha_n \rho^n + \cdots$$

étant convergente (84), on peut prendre n assez grand pour que l'expression

$$\alpha_n \rho^n + \alpha_{n+1} \rho^{n+1} + \cdots\cdot$$

soit moindre qu'une quantité ε, choisie aussi petite qu'on le veut; et *a fortiori*, pour toute valeur de x numériquement moindre que ρ, on aura

$$\textit{val. abs.}\, [a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \cdots] < \varepsilon.$$

Donc, la valeur absolue de ΔR_n sera moindre que 2ε. D'autre part, s_n étant une fonction entière et continue de x, on pourra, en prenant Δx assez petit, rendre la valeur absolue de Δs_n moindre que ε, et par suite, celle de Δs moindre que 3ε. Et comme ε peut être supposé aussi petit qu'on le veut, on voit que Δs décroît au-dessous de toute grandeur donnée si l'on prend Δx suffisamment petit; donc la fonction s de x est continue.

Remarque. La continuité de la série s'étendra jusqu'à $x = x_1$ inclusivement, si la série $\alpha_0 + \alpha_1 r_1 + \cdots + \alpha_n r_1^n$ est convergente.

86. III. *Deux séries ordonnées suivant les puissances ascendantes d'une même variable x, et qui ont des sommes égales pour toute valeur de x qui assure la convergence de ces séries, sont identiques terme pour terme.*

Soient

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots,$$

les deux séries proposées, convergentes l'une et l'autre pour toute valeur de x numériquement inférieure à une quantité donnée r_1. Posons $x = 0$; l'égalité des sommes des deux séries donne l'équation

$$a_0 = b_0.$$

On a donc, entre les mêmes limites,

$$x(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots) = x(b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + \cdots),$$

et en divisant par x, *supposé différent de zéro,*

$$a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots = b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + \cdots.$$

Concevons que x tende vers zéro : le premier membre, d'après le théorème précédent, a pour limite la valeur de la série pour $x = 0$, c'est-à-dire a_1; pareillement, le second membre tend vers b_1; donc $a_1 = b_1$.

Retranchant a_1 et b_1, et divisant par x, on prouvera de même que $a_2 = b_2$, et ainsi de suite. En général, $a_n = b_n$, et les deux séries sont identiques.

Remarque. Les théorèmes I, II et III, ainsi que leurs démonstrations, s'appliquent même à des séries dans lesquelles a_n, x seraient imaginaires : il suffit de substituer partout le *module* à la *valeur absolue* des quantités.

§ 2. FORMULES DE TAYLOR ET DE MACLAURIN.

87. La *formule de Taylor* a pour objet le développement d'une fonction en série convergente, ordonnée suivant les puissances entières, positives et croissantes de la variable, ou de l'accroissement de la variable à partir d'une valeur donnée. Nous ferons usage du lemme suivant :

Soit $\varphi(z)$ une fonction de la variable z, qui reste continue ainsi que sa

dérivée $\varphi'(z)$ depuis $z=a$ jusqu'à $z=b$, et soit $\varphi(a)=\varphi(b)$: la dérivée $\varphi'(z)$ doit s'annuler pour une valeur de z comprise entre a et b.

En effet, la fonction continue $\varphi(z)$ ne peut reprendre deux fois la même valeur, pour $z=a$ et pour $z=b$, sans être, dans l'intervalle, alternativement croissante et décroissante, ce qui exige que sa dérivée $\varphi'(z)$ change de signe entre $z=a$ et $z=b$; et comme elle est continue, elle passe nécessairement par la valeur zéro.

Soit $F(x)$ une fonction de la variable x; x et $x+h$ deux valeurs quelconques de la variable : nous nous proposons de développer, s'il est possible, $F(x+h)$ en une série convergente qui procède suivant les puissances entières, positives et croissantes de h. Et comme la méthode des coefficients indéterminés indique quelle serait dans ce cas la forme du développement, nous sommes conduits à poser

$$\text{(A)}\quad F(x+h)=F(x)+hF'(x)+\frac{h^2}{1.2}F''(x)+\cdots+\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{n-1}(x)+R_n,$$

ce qui est évidemment possible, quel que soit le nombre n, pourvu que l'on détermine convenablement R_n.

Admettons que la fonction $F(x)$, et ses dérivées successives jusqu'à l'ordre n inclusivement, soient continues par rapport à x depuis x jusqu'à $x+h$; faisons

$$R_n=h^pP,$$

p étant une constante positive, égale ou inférieure à n, et cherchons la valeur qu'il faut attribuer à P.

Pour cela, soit z une variable qui admet toutes les valeurs de 0 à h, et posons

$$\varphi(z)=F(x+z)+(h-z)F'(x+z)+\frac{(h-z)^2}{1\cdot 2}F''(x+z)+\cdots$$
$$+\frac{(h-z)^{n-1}}{1\cdot 2\cdots(n-1)}F^{n-1}(x+z)+(h-z)^pP.$$

Pour $z=0$, $\varphi(z)$ se réduit à $F(x+h)$, d'après l'équation (A); pour $z=h$, $\varphi(z)$ est encore égal à $F(x+h)$: d'ailleurs, il résulte évidemment des conditions supposées que $\varphi(z)$, et sa dérivée $\varphi'(z)$, varient d'une manière continue de $z=0$ à $z=h$. Donc $\varphi'(z)$ s'annule (87) pour une valeur de z comprise entre 0 et h; valeur inconnue, mais que nous pouvons représenter par θh, en désignant par θ une quantité comprise entre zéro et l'unité. On aura ainsi

$$\varphi'(\theta h)=0.$$

Or, en dérivant par les règles ordinaires et effaçant les termes qui se détruisent, on trouve

$$)=\frac{(h-z)^{n-1}}{1\cdot 2\cdots(n-1)}F^n(x+z)-p(h-z)^{p-1}P=(h-z)^{p-1}\left[\frac{(h-z)^{n-p}}{1\cdot 2\cdots(n-1)}F^n(x+z)-pP\right],$$

et comme le facteur $(h-z)^{p-1}$ ne peut s'annuler pour aucune valeur de z comprise entre 0 et h, nous égalerons à zéro le second facteur après avoir remplacé z par θh, ce qui donnera

$$P=\frac{h^{n-p}(1-\theta)^{n-p}}{1\cdot 2\cdots(n-1)p}F^n(x+\theta h).$$

On a donc, pour la valeur cherchée de R_n,

$$R_n=\frac{h^n(1-\theta)^{n-p}}{1\cdot 2\cdots(n-1)p}F^n(x+\theta h).$$

Concevons maintenant que l'on fasse croître n indéfiniment, les conditions de continuité relatives aux dérivées ne cessant pas d'être remplies, et qu'alors R_n tende vers la limite zéro. La somme

$$F(x)+hF'(x)+\cdots+\frac{h^{n-1}}{1\cdot 2\cdots(n-1)}F^{n-1}(x)$$

tendra indéfiniment vers $F(x+h)$, puisqu'elle en diffère d'une quantité R_n tendant vers zéro, ce qui revient à dire que la série indéfinie

$$F(x)+hF'(x)+\frac{h^2}{1\cdot 2}F''(x)+\cdots\cdots$$

est convergente et a pour somme $F(x+h)$. C'est en cela que consiste le théorème de Taylor.

La quantité R_n, qui mesure l'erreur commise en arrêtant la série après le $n^{ième}$ terme, se nomme le *reste*. Ordinairement, p étant arbitraire, on le suppose égal à n, et l'on a

$$R_n=\frac{h^n}{1\cdot 2\cdots n}F^n(x+\theta h).$$

La formule de Taylor prend alors la forme

$$(1)\quad F(x+h)=F(x)+hF'(x)+\frac{h^2}{1\cdot 2}F''(x)+\cdots+\frac{h^{n-1}}{1\cdot 2\cdots(n-1)}F^{n-1}(x)$$
$$+\frac{h^n}{1\cdot 2\cdots n}F^n(x+\theta h).$$

88. *Remarques.* — I. Il résulte d'une remarque faite plus haut (86) que la fonction $F(x+h)$ ne peut être développée que de cette seule manière, en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de h. Toute série remplissant ces conditions serait, en effet, identique avec la série de Taylor, terme pour terme.

II. Il est indispensable, pour appliquer la série de Taylor au développement d'une fonction donnée, de s'assurer que le reste R_n tend vers zéro lorsque n devient infini. Il y a un cas où cette condition est certainement remplie, c'est celui où $F^n(x)$ ne peut dépasser une limite donnée, quelque grand que soit n, pour aucune valeur de x entre x et $x+h$. En effet, soit μ le nombre entier immédiatement supérieur à h; on a

$$\frac{h^n}{1\,2\cdots n}=\frac{h^{\mu-1}}{1\,2\cdots(\mu-1)}\cdot\frac{h}{\mu}\cdot\frac{h}{\mu+1}\cdots\frac{h}{n}<\frac{h^{\mu-1}}{1\,2\cdots(\mu-1)}\cdot\left(\frac{h}{\mu}\right)^{n-\mu+1},$$

et comme ce dernier facteur a pour limite zéro, $\frac{h}{\mu}$ étant <1, le facteur $\frac{h^n}{1\cdot2\cdots n}$ a aussi pour limite zéro, n croissant indéfiniment. D'ailleurs $F^n(x+\theta h)$ ne peut pas croître, par hypothèse, au-delà de toute limite; donc etc....

La principale difficulté consiste donc à reconnaître si $F^n(x)$ peut, quand n devient infini, croître indéfiniment.

III. On ne sait rien de θ, sinon que cette quantité est comprise entre zéro et l'unité. Cependant l'expression du reste suffit pour faire connaître deux limites de l'erreur que l'on commet, en prenant seulement n termes de la série. Car, soient A et B la plus petite et la plus grande des valeurs par lesquelles passe la fonction $F^n(x)$, lorsque la variable passe de la valeur x à la valeur $x+h$. On aura

$$F^n(x+\theta h)=M\,(A,\,B),$$

et par suite

$$R_n=M\left(\frac{h^n}{1\cdot2\cdots n}A,\ \frac{h^n}{1\cdot2\cdots n}B\right).$$

IV. Si, dans l'équation (1), on fait n égal à l'unité, on obtient

$$F(x+h)-F(x)=hF'(x+\theta h),$$

formule souvent employée, et qui se déduit aussi du théorème du n° 41.

V. Dans certains cas, la forme adoptée ci-dessus pour R_n permet difficilement de reconnaître si le reste converge vers zéro. On recourt alors

à la suivante, qui s'obtient en faisant $p = 1$ dans l'expression générale obtenue d'abord :

$$(\alpha) \qquad R_n = \frac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{1\cdot 2\cdots(n-1)} F^n(x+\theta h).$$

89. On peut écrire de diverses manières la formule de Taylor. Si la fonction $F(x)$ est désignée par y, et si k est l'accroissement qu'elle reçoit lorsque l'on change x en $x+h$, l'équation (1) prend la forme

$$(2)\ y+k=y+\frac{dy}{dx}h+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\frac{h^{n-1}}{1\cdot 2\cdots(n-1)}+\frac{h^n}{1\cdot 2\cdots n}\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_{x+\theta h}.$$

Si, dans l'équation (1), on remplace par x_0, x les deux valeurs quelconques de la variable qui y sont désignées par x, $x+h$, on aura $h=x-x_0$, et il viendra

$$(3)\ \left\{\begin{aligned} F(x)=F(x_0)+(x-x_0)F'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{1\ 2}F''(x_0)+\cdots+\frac{(x-x_0)^{n-1}}{1\ 2\cdot(n-1)}F^{n-1}(x_0)\\ +\frac{(x-x_0)^n}{1\cdot 2\cdot n}F^n[x_0+\theta(x-x_0)].\end{aligned}\right.$$

On peut prendre $x_0=0$, et l'on a

$$(4)\ F(x)=F(0)+xF'(0)+\frac{x^2}{1\cdot 2}F''(0)+\cdots+\frac{x^{n-1}}{1\cdot 2\cdots(n-1)}F^{n-1}(0)+\frac{x^n}{1\cdot 2\cdots n}F^n(\theta x),$$

θ étant toujours compris entre 0 et 1.

Cette formule est celle de *Maclaurin*. Elle fournit le développement d'une fonction $F(x)$ suivant les puissances ascendantes de la variable x, mais à la condition, résultant de ce qui précède, 1° que la fonction et ses dérivées restent continues depuis $x=0$ jusqu'à la valeur de x que l'on considère; 2° que le *reste*

$$R_n = \frac{x^n}{1\cdot 2\cdot n}F^n(\theta x)$$

tende vers zéro lorsque n croît indéfiniment. Ce reste peut aussi se mettre sous la forme

$$(\beta) \qquad R_n = \frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{1\ 2\ (n-1)}F^n(\theta x),$$

que l'on obtient en remplaçant x par 0 et h par x dans l'expression donnée plus haut (α).

Les remarques faites au sujet de la série de Taylor s'appliquent nécessairement à celle de Maclaurin. Ainsi, le développement n'est possible que d'une manière, etc.

§ 3. APPLICATIONS.

90. Si l'on prend $F(x) = A^x$, on a, d'après une formule connue (64, III),

$$F^n(x) = A^x (\mathrm{l.A})^n.$$

La fonction et toutes ses dérivées restent continues, quel que soit x. La formule de Maclaurin donne donc

$$A^x = 1 + x\,\mathrm{l.A} + \frac{x^2}{1 \cdot 2}(\mathrm{l.A})^2 + \cdots + \frac{x^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot (n-1)}(\mathrm{l.A})^{n-1} + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdots n}(\mathrm{l.A})^n A^{\theta x}.$$

On a vu plus haut (88, II) que l'expression

$$\frac{(x\,\mathrm{l.A})^n}{1 \cdot 2 \cdots n}$$

tend vers zéro lorsque n devient infini; le facteur $A^{\theta x}$ a une valeur finie comprise entre 1 et A^x; donc le reste a pour limite zéro, et l'on a

$$A^x = 1 + \frac{(x\,\mathrm{l.A})}{1} + \frac{(x\,\mathrm{l.A})^2}{1 \cdot 2} + \frac{(x\,\mathrm{l.A})^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots,$$

quelque valeur que l'on attribue à x. Le cas particulier où $A = e$ donne $\mathrm{l.A} = 1$, et par suite

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

91. Supposons, en second lieu, $F(x) = \sin x$, d'où l'on tire

$$F^n(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Cette dérivée étant toujours continue et au plus égale à 1, quel que soit x, pour toute valeur de n, on voit immédiatement que la série de Maclaurin sera toujours applicable. Elle donnera

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^7}{1 \cdot 2 \cdots 7} + \cdots,$$

le reste étant, lorsqu'on s'arrête au terme affecté de x^{n-1},

$$\frac{x^n}{1\cdot 2\cdots n}\sin\left(\theta x + n\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{M}\left(\pm\frac{x^n}{1\cdot 2\cdots n}\right).$$

On trouverait, par des raisonnements semblables,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\ 6} + \cdots,$$

quelle que soit la valeur attribuée à x.

92. Si nous posons $\mathrm{F}(x) = \mathrm{l}.(1 + x)$, nous trouvons

$$\mathrm{F}'(x) = \frac{1}{1+x},\ \mathrm{F}''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \cdots,\ \mathrm{F}^n(x) = (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 2\cdots(n-1)}{(1+x)^n}.$$

Toutes ces dérivées sont continues si $x > -1$. On a donc, par la formule de Maclaurin,

$$\mathrm{l}.(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \pm \frac{x^{n-1}}{n-1} + \mathrm{R}_n,$$

et, en adoptant pour R_n la seconde forme (β),

$$\mathrm{R}_n = \pm\frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{(1+\theta x)^n} = \pm\frac{x}{1+\theta x}\cdot\left(\frac{x-\theta x}{1+\theta x}\right)^{n-1}.$$

La convergence de la série exige d'abord que la limite du rapport $\left[-(n-1)\frac{x}{n}\right]$ du terme de rang n au précédent soit moindre que l'unité en valeur absolue, ce qui exige que l'on ait

$$x = \mathrm{M}(-1, +1).$$

Si x est >0 et <1, le facteur $\frac{x}{1+\theta x}$ a une valeur finie moindre que x; la fraction $\frac{x-\theta x}{1+\theta x}$ est >0 et $<x$, donc $\left(\frac{x-\theta x}{1+\theta x}\right)^{n-1}$ a pour limite zéro quand n devient infini; *lim* $\mathrm{R}_n = 0$. Si $x<0$ et >-1, en faisant $x = -r$, il vient

$$\mathrm{R}_n = \pm\frac{r}{1-\theta r}\cdot\left(\frac{r-\theta r}{1-\theta r}\right)^{n-1};$$

le premier facteur a une valeur finie $<\frac{r}{1-r}$, le second tend vers zéro

avec $\frac{1}{n}$, car $\frac{r-\theta r}{1-\theta r}$ est toujours moindre que r. Donc R_n a encore pour limite zéro.

Ainsi pour toute valeur de x comprise entre -1 et $+1$, la fonction proposée est développable en série convergente par la formule de Maclaurin, et l'on a

$$1.(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots.$$

93. Cette formule ne s'appliquant pas aux valeurs de x supérieures à l'unité, il est utile de la transformer. Posons

$$x=\frac{p-q}{p+q},$$

d'où

$$\frac{p}{q}=\frac{1+x}{1-x},$$

et supposons que p, q soient tels que $x=\mathrm{M}(-1,\ +1)$.

Nous aurons, en changeant x en $-x$ dans la série trouvée plus haut,

$$1.(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots,$$

$$1.p-1.q=1.(1+x)-1.(1-x)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right);$$

ou, en mettant pour x sa valeur,

$$1.p=1.q+2\left[\frac{p-q}{p+q}+\frac{1}{3}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^5+\cdots\right].$$

En choisissant p et q de manière que $(p-q)$ soit très-petit et $(p+q)$ très-grand, on obtiendra une série très-convergente, qui donnera $1.p$, si $1.q$ est connu.

Exemples : $p=2,\quad q=1,$

$$1.2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\cdots\cdots\right);$$

$p=10,\quad q=8,$

$$1.10=31.2+2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{9^5}+\cdots\right).$$

Pour passer les logarithmes népériens aux logarithmes vulgaires, il

suffira de multiplier les premiers par le module M, dont la valeur $(l.\,10)^{-1}$ peut être calculée à l'aide de la dernière série. On trouve

$$M = 0{,}434294481\ldots.$$

94. Proposons-nous encore de développer la fonction

$$F(x) = (1 + x)^a,$$

a étant une constante quelconque. Les dérivées

$$F'(x) = a(1 + x)^{a-1}, \qquad F''(x) = a(a-1)(1 + x)^{a-2}, \ldots$$
$$F^n(x) = a(a-1)\cdots(a-n+1)(1+x)^{a-n}, \ldots$$

restent continues tant que $x > -1$. On a donc

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{1\cdot 2}x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+2)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}x^{n-1} + Rn.$$

Pour que la série soit convergente, il faut que le rapport $\frac{a-n+1}{n}x$ tende vers une limite numériquement moindre que l'unité, ce qui exige que x soit compris entre -1 et $+1$. Il suffit donc de considérer ce cas.

En adoptant la seconde forme (β) du reste, on trouve

$$R_n = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}\, x^n \cdot (1 + \theta x)^{a-1} \cdot \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}.$$

Le premier facteur tend vers zéro quand n devient infini, car la série qui a pour terme général $\frac{(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}\,x^n$ est convergente, comme on s'en assure sans peine, pourvu que x^2 soit < 1. Le second facteur, $(1+\theta x)^{a-1}$, a une valeur finie, puisque $1 + \theta x > 0$ dans notre hypothèse. Le troisième facteur, $\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}$ est moindre que l'unité, car si $x > 0$, on a $1 + \theta x > 1 > 1 - \theta$; si $x < 0$, on aura $x = -r$, r étant compris entre 0 et 1, donc $\theta r < \theta$, $1 - \theta r > 1 - \theta$; dans les deux cas on a donc

$$\frac{1-\theta}{1+\theta x} \begin{matrix} > 0 \\ < 1 \end{matrix}.$$

Le reste R_n, étant composé de trois facteurs dont l'un a pour limite zéro, les deux autres ne croissant pas indéfiniment, a pour limite zéro;

la série de Maclaurin est donc applicable, et l'on a, pour toute valeur de x comprise entre -1 et $+1$, quel que soit a,

$$\text{(B)}\quad (1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots$$

Si x est, en valeur absolue, plus grand que l'unité, la série est divergente et par conséquent inapplicable, à moins que a ne soit entier et positif : dans ce cas, la dérivée $(a+1)^{ième}$ de $(1+x)^a$ étant nulle, le reste R_{a+1} est nul aussi, et la formule de Maclaurin donne le développement de $(1+x)^a$ en un polynôme de $a+1$ termes ordonnés suivant les puissances croissantes de x, pour toute valeur de x.

Si x est égal à ± 1, la formule (B), dite du *binôme*, est encore exacte sous certaines conditions, qui exigent une discussion spéciale.

Les cas particuliers suivants se rencontrent fréquemment :

$$a = -1\,;\ (1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

$$a = -\frac{1}{2},\quad x = -z^2,\quad z^2 < 1 :$$

$$(1-z^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = 1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1\ 3}{2\ 4}z^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}z^6 + \cdots$$

95. En posant $F(x) = \operatorname{arc\,tg} x$, on aurait, d'après l'expression connue de $F^n(x)$ (ch. IV, ex. 7),

$$F^n(0) = (-1)^{n-1}\, 1\cdot 2 \cdots (n-1) \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots;$$

la série est convergente ou divergente suivant que x^2 est $<$ ou $>$ 1. Dans le premier cas, le reste

$$R_n = \pm \frac{x^n}{n} \frac{\sin(n \operatorname{arc\,cot} \theta x)}{(1+\theta^2 x^2)^{\frac{n}{2}}}$$

converge vers zéro en même temps que $\frac{1}{n}$, la somme de la série est donc égale à $\operatorname{arc\,tg} x$. Il en est encore de même si $x = 1$, et l'on a

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Cette formule étant trop peu convergente pour le calcul de π, on a recours à la suivante : posons

$$z = \text{arc tg}\,\frac{1}{5}, \qquad \frac{\pi}{4} = 4z - u,$$

d'où

$$\text{tg}\,u = \text{tg}\left(4z - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\text{tg}\,4z - 1}{1 + \text{tg}\,4z};$$

en calculant tg $4z$, nous trouverons $\frac{120}{119}$, d'où

$$\text{tg}\,u = \frac{1}{239}, \qquad \frac{\pi}{4} = 4\,\text{arc tg}\,\frac{1}{5} - \text{arc tg}\,\frac{1}{239},$$

d'où enfin

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \cdots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot 239^3} + \frac{1}{5\cdot 239^5} - \cdots\right).$$

96. La vérification de la condition *lim* $R_n = 0$ offre souvent des difficultés, puisqu'elle exige que l'on sache former l'expression de la dérivée $n^{ième}$ de la fonction à développer. Mais on peut dans plusieurs cas s'en dispenser.

Ainsi, lorsque l'on sait d'avance que la fonction $F(x)$ est développable en série convergente de la forme

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

comme on sait aussi (88, I) que ce développement doit coïncider, terme pour terme, avec celui que fournit la formule de Maclaurin, il est clair que R_n doit tendre vers zéro. On peut alors se borner à calculer les coefficient a_0, a_1,..., soit par la méthode des coefficients indéterminés, soit en formant $F'(0)$, $F''(0)$,.., $F^n(0)$ de proche en proche, par la méthode indiquée au n° 74.

Si l'on a à développer une fonction composée, la formation des dérivées successives sera généralement très-laborieuse, et il vaudra mieux développer les fonctions plus simples dont la proposée se compose, puis combiner, à l'aide des règles connues, les séries trouvées. Soit, par exemple,

$$F(x) = \frac{\text{l.}(1+x)}{1+x}, \qquad x = M(-1, +1).$$

On a

$$1.(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots,$$

$$(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+\cdots,$$

et ces deux séries restent convergentes (84) si l'on réduit chaque terme à sa valeur absolue. On a donc, d'après la règle de multiplication des séries (25, XIII),

$$\frac{1.(1+x)}{1+x}=x-\left(1+\frac{1}{2}\right)x^2+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)x^4+\cdots,$$

pour les valeurs de x comprises entre -1 et $+1$.

Exercices.

1. Développer, par la série de Maclaurin, $F(x)=\sin^2 x$.

R. $$\sin^2 x=\frac{1}{2}\left[\frac{(2x)^2}{1\cdot2}-\frac{(2x)^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{(2x)^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}-\cdots\right].$$

On a

$$R_n=-\frac{(2x)^n}{1\cdot2\cdots n}\cdot\frac{1}{2}\cos\left(2\theta x+n\frac{\pi}{2}\right);$$

la série est exacte quel que soit x.

2. Développer $e^{ax}\cos bx$. — En posant $a=r\cos\varphi$, $b=r\sin\varphi$, on trouve

$$e^{ax}\cos bx=1+rx\cos\varphi+\frac{r^2x^2}{1\cdot2}\cos2\varphi+\frac{r^3x^3}{1\cdot2\cdot3}\cos3\varphi+\cdots,$$

$$R_n=\frac{(rx)^n}{1\cdot2\cdots n}e^{a\theta x}\cos(b\theta x+n\varphi);$$

la série est exacte pour toute valeur de x.

Cas particulier où $a=b=1$, $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

On développe de même $e^{ax}\sin bx$.

3. Développer $y=(\text{arc tg } x)^2$.

On voit sans peine que le développement est possible, et que l'on a

$$\left(\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}\right)_0+2n^2\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_0+n(n-1)^2(n-2)\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right)_0=0,$$

ce qui permet de calculer tous les coefficients de la série en partant des trois premiers.

4. Développer $\frac{1}{1+x+x^2+x^3}$. — R. On met la fonction sous la forme $\frac{1-x}{1-x^4}$,

et l'on trouve

$$\frac{1}{1+x+x^2+x^3}=1-x+x^4-x^5+x^8-x^9+\cdots,$$

pour toute valeur de x comprise entre -1 et $+1$.

5. Développer la fonction

$$x \operatorname{arc\,tg} x - \mathrm{l}.\sqrt{1+x^2}.$$

R. On a, x étant compris entre -1 et $+1$, la série convergente

$$\frac{x^2}{1\cdot 2}-\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^6}{5\cdot 6}-\frac{x^8}{7\cdot 8}+\cdots$$

6. Démontrer, en s'appuyant sur la formule de Taylor, que l'on a

$$lim\,\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}=F'(x), \qquad lim\,\frac{\Delta^2 F(x)}{\Delta x^2}=F''(x), \qquad \text{etc.},$$

Δx tendant vers la limite zéro.

§ 4. EXPONENTIELLES IMAGINAIRES.

97. On a établi, pour toute valeur réelle de la variable x, les équations

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots,$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\cdots,$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\frac{x^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 7}+\cdots,$$

et, d'après une remarque déjà faite (84), ces séries restent convergentes lorsqu'on réduit leurs différents termes à leurs valeurs absolues. Concevons qu'on remplace, dans ces trois séries, x par une quantité imaginaire

$$z=x+y\sqrt{-1}=r(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta);$$

on aura des séries imaginaires convergentes, car les séries

$$1+r+\frac{r^2}{1\cdot 2}+\cdots,\quad 1+\frac{r^2}{1\cdot 2}+\frac{r^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots,\quad r+\frac{r^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{r^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\cdots,$$

obtenues en réduisant chaque terme à son module, sont convergentes d'après l'observation faite ci-dessus; et nous avons démontré (24, X) qu'une série imaginaire est convergente lorsqu'elle satisfait à cette condition.

Cela posé, nous représenterons encore les sommes de ces séries imaginaires respectivement par $e^{x+y\sqrt{-1}}$, $\cos(x+y\sqrt{-1})$, $\sin(x+y\sqrt{-1})$, en sorte que nous aurons, *par définition*, pour toute valeur imaginaire de z,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} e^z &= 1 + z + \frac{z^2}{1\cdot 2} + \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots, \\ \cos z &= 1 - \frac{z^2}{1\cdot 2} + \frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{z^6}{1\cdot 2\cdots 6} + \cdots, \\ \sin z &= z - \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{z^5}{1\cdot 2\cdots 5} - \frac{z^7}{1\cdot 2\cdots 7} + \cdots. \end{aligned}\right.$$

De là résultent quelques conséquences importantes. Si, dans la première équation, on remplace z par $z\sqrt{-1}$, on a

$$e^{z\sqrt{-1}} = 1 + z\sqrt{-1} - \frac{z^2}{1\cdot 2} - \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3}\sqrt{-1} + \frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{z^5\sqrt{-1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \cdots,$$

résultat identique à celui qu'on obtient en ajoutant terme à terme la seconde série à la troisième multipliée par $\sqrt{-1}$. On a donc

$$(2)\qquad e^{z\sqrt{-1}} = \cos z + \sqrt{-1}\sin z,$$

et en changeant z en $-z$,

$$(3)\qquad e^{-z\sqrt{-1}} = \cos z - \sqrt{-1}\sin z.$$

On déduit de ces égalités les suivantes :

$$(4)\quad \cos z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

qui ont lieu, comme les précédentes, pour toute valeur réelle ou imaginaire de z; et aussi celles-ci :

$$e^{\pm\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} = \pm\sqrt{-1}, \qquad e^{\pm\pi\sqrt{-1}} = -1.$$

98. On démontre sans peine que les propriétés fondamentales des fonctions e^x, $\cos x$, $\sin x$, subsistent quand la variable devient imaginaire. On a d'abord, z, z' étant imaginaires,

$$\begin{aligned} e^z\cdot e^{z'} &= \left(1 + z + \frac{z^2}{1\cdot 2} + \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots\right)\left(1 + z' + \frac{z'^2}{1\cdot 2} + \frac{z'^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots\right) \\ &= 1 + (z+z') + \frac{(z+z')^2}{1\cdot 2} + \frac{(z+z')^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots, \end{aligned}$$

en effectuant la multiplication des séries d'après la règle du n° 25, puisque les modules de leurs termes forment deux séries convergentes. Or, cette dernière série n'est autre chose que $e^{z+z'}$; on a donc

$$(5) \qquad e^{z} \cdot e^{z'} = e^{z+z'}.$$

On verrait de même, à l'aide des formules (2), (3), (4), (5), que l'on a $e^{mz} = (e^z)^m$,

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1, \qquad \cos(z+z') = \cos z \cos z' - \sin z \sin z', \quad \text{etc.}$$

D'après cela, nous pouvons sommer les séries (1), ou trouver les quantités imaginaires représentées par e^z, $\cos z$, $\sin z$, z étant égal à $x+y\sqrt{-1}$. Nous aurons d'abord, d'après les équations (5) et (2),

$$e^{x+y\sqrt{-1}} = e^x \cdot e^{y\sqrt{-1}} = e^x(\cos y + \sqrt{-1}\sin y).$$

Ensuite

$$\cos(x+y\sqrt{-1}) = \frac{e^{(x+y\sqrt{-1})\sqrt{-1}} + e^{-(x+y\sqrt{-1})\sqrt{-1}}}{2} = \frac{e^{-y+x\sqrt{-1}} + e^{y-x\sqrt{-1}}}{2},$$

d'où, en vertu de l'équation précédente,

$$\cos(x+y\sqrt{-1}) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}\cos x - \sqrt{-1}\,\frac{e^y - e^{-y}}{2}\sin x.$$

On aurait de même

$$\sin(x+y\sqrt{-1}) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}\sin x + \sqrt{-1}\,\frac{e^y - e^{-y}}{2}\cos x,$$

en sorte que les fonctions e^z, $\cos z$, $\sin z$, sont ramenées à la forme type $X+Y\sqrt{-1}$ (1).

99. Les formules ci-dessus sont susceptibles de nombreuses applications. Pour en donner un exemple, si dans l'égalité

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1},$$

qui a lieu, évidemment (5), pour toute valeur réelle ou imaginaire de x,

---

(1) Nous n'empruntons ici à la théorie des fonctions d'une variable imaginaire que quelques formules très-simples dont nous aurons besoin, cette théorie formant une section importante de la seconde partie de ce cours.

on pose $x=e^{\theta\sqrt{-1}}$, on trouve

$$1+e^{\theta\sqrt{-1}}+e^{2\theta\sqrt{-1}}+\cdots+e^{(n-1)\theta\sqrt{-1}}=\frac{e^{n\theta\sqrt{-1}}-1}{e^{\theta\sqrt{-1}}-1}$$

$$=\frac{e^{\frac{n\theta}{2}\sqrt{-1}}-e^{-\frac{n\theta}{2}\sqrt{-1}}}{e^{\frac{\theta}{2}\sqrt{-1}}-e^{-\frac{\theta}{2}\sqrt{-1}}}\cdot e^{\frac{(n-1)}{2}\theta\sqrt{-1}}=\frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\left[\cos(n-1)\frac{\theta}{2}+\sqrt{-1}\sin(n-1)\frac{\theta}{2}\right];$$

et, en décomposant cette équation en deux autres,

$$\left\{\begin{aligned}&1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos(n-1)\theta=\frac{\sin\frac{n\theta}{2}\cos(n-1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}},\\ &\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots+\sin(n-1)\theta=\frac{\sin\frac{n\theta}{2}\sin(n-1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}},\end{aligned}\right.$$

— Soit encore à trouver la valeur du produit

$$\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin(n-1)\frac{\pi}{n}=\prod_{k=1}^{k=n-1}\sin\frac{k\pi}{n}.$$

En mettant pour $\sin\frac{k\pi}{n}$ sa valeur en exponentielles imaginaires, on a sans peine

$$(6)\quad \prod_{k=1}^{k=n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{1}{(2\sqrt{-1})^{n-1}}\prod_{k=1}^{k=n-1}e^{-\frac{k\pi}{n}\sqrt{-1}}\prod_{k=1}^{k=n-1}\left(e^{2\frac{k\pi}{n}\sqrt{-1}}-1\right).$$

Or

$$\prod_{k=1}^{k=n-1}e^{-\frac{k\pi}{n}\sqrt{-1}}=e^{-\frac{\pi}{n}\sqrt{-1}[1+2+\cdots+(n-1)]}=e^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}(n-1)}$$

$$=\left(e^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}\right)^{n-1}=(-\sqrt{-1})^{n-1}.$$

D'autre part, on a vu (9) que toutes les racines de l'équation $x^n-1=0$ s'obtiennent en faisant successivement $k=0,1,2,\ldots,n-1$, dans

l'expression

$$\cos\frac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n} = e^{\frac{2k\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

d'où il suit que

$$x^n - 1 = \prod_{k=0}^{k=n-1}\left(x - e^{\frac{2k\pi}{n}\sqrt{-1}}\right) = (x-1)\prod_{k=1}^{k=n-1}\left(x - e^{\frac{2k\pi}{n}\sqrt{-1}}\right);$$

d'où, comme

$$x^n - 1 = (x-1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}),$$

il vient

$$\prod_{k=1}^{k=n-1}\left(x - e^{\frac{2k\pi}{n}\sqrt{-1}}\right) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}.$$

Faisons $x = 1$ dans cette égalité : nous aurons

$$\prod_{k=1}^{k=n-1}\left(e^{\frac{2k\pi}{n}\sqrt{-1}} - 1\right) = (-1)^{n-1}\cdot n,$$

et en substituant dans l'équation (6), nous trouverons cette formule remarquable :

$$\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin(n-1)\frac{\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}\cdot$$

Exercices.

1. La fonction $\operatorname{tg} z$ étant définie par l'équation

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z},$$

trouver son expression sous la forme $X + Y\sqrt{-1}$.

2. Démontrer les formules

$$\cos\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cdots + \cos(2n-1)\theta = \frac{\sin n\theta\cos n\theta}{\sin\theta},$$

$$\sin\theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta + \cdots + \sin(2n-1)\theta = \frac{\sin^2 n\theta}{\sin\theta}\cdot$$

CHAPITRE X.

VRAIES VALEURS DES FONCTIONS QUI SE PRÉSENTENT SOUS FORME INDÉTERMINÉE.

100. Nous avons déjà remarqué (37) que certaines fonctions, pour une valeur particulière de la variable x dont elles dépendent, se présentent sous une forme qui n'apprend rien, telle que $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, etc., et que, dans ce cas, on cherche la limite vers laquelle tend la fonction, lorsque la variable x s'approche indéfiniment de la valeur particulière a, qui donne lieu à la forme indéterminée. Cette limite se nomme la *vraie valeur* de la fonction pour $x = a$, et nous allons chercher comment on la détermine, au moyen du *lemme* suivant :

Soient $f(x)$, $F(x)$ deux fonctions de x; a et x deux valeurs de la variable, entre lesquelles $f(x)$ et $F(x)$ sont continues, et $F(x)$ constamment croissante ou constamment décroissante. Concevons que x passe, par accroissements infiniment petits, de la valeur a à la valeur x, et soient $\Delta_1 f, \Delta_2 f, \ldots, \Delta_n f$; $\Delta_1 F, \Delta_2 F, \cdots, \Delta_n F$ les accroissements correspondants des fonctions, ces derniers tous de même signe. On a

$$\frac{f(x) - f(a)}{F(x) - F(a)} = \frac{\Delta_1 f + \Delta_2 f + \cdots + \Delta_n f}{\Delta_1 F + \Delta_2 F + \cdots + \Delta_n F} = M\left(\frac{\Delta_1 f}{\Delta_1 F}, \frac{\Delta_2 f}{\Delta_2 F}, \ldots, \frac{\Delta_n f}{\Delta_n F}\right)$$

n étant indéfiniment croissant. Mais le rapport $\frac{\Delta f}{\Delta F}$ a pour limite, comme on l'a vu (44), $\frac{D_x f}{D_x F}$ ou $\frac{f'(x)}{F'(x)}$; on en conclut, à la limite ou pour n infini,

$$(1) \qquad \frac{f(x) - f(a)}{F(x) - F(a)} = \mathop{M}_a^x \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

Cette égalité ne suppose aucune condition de continuité pour les dérivées $f'(x)$, $F'(x)$, entre a et x.

101. Considérons d'abord les fonctions qui affectent la forme $\frac{0}{0}$. Si, pour une valeur a de x, on a

$$f(a) = 0, \quad F(a) = 0,$$

la fraction $\frac{f(x)}{F(x)}$ se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ pour $x = a$. L'équation (1) devient, x étant supposé différer infiniment peu de a,

$$(2) \qquad \frac{f(x)}{F(x)} = \mathrm{M}_a^x \frac{f'(x)}{F'(x)};$$

la limite du premier membre est la vraie valeur cherchée; quant à celle du second, évidemment, *si* $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ *tend vers une limite déterminée* quand x tend vers a, cette limite sera aussi celle de la valeur *moyenne*, et l'on aura, par conséquent,

$$(3) \qquad lim\,\frac{f(x)}{F(x)} = lim\,\frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

Si $f'(x)$, $F'(x)$ sont finis et différents de zéro pour $x = a$, la vraie valeur cherchée est $\frac{f'(a)}{F'(a)}$; si $f'(x)$ est nul, ou $F'(x)$ infini pour $x = a$, la vraie valeur est zéro; si $f'(x)$ est infini ou $F'(x)$ nul, c'est l'infini.

Si l'on avait encore $f'(a) = 0$, $F'(a) = 0$, la limite de $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ se présenterait à son tour sous la forme $\frac{0}{0}$, mais on lui appliquerait la même règle qu'à la proposée, et l'on aurait

$$lim\,\frac{f(x)}{F(x)} = lim\,\frac{f''(x)}{F''(x)}.$$

Si celle-ci était encore indéterminée de forme, on lui appliquerait le même procédé, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on tombe sur deux dérivées qui ne s'annulent pas simultanément pour $x = a$.

Exemple : la fonction $\frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$ a la forme $\frac{0}{0}$ pour $x = 0$. En lui appliquant la règle ci-dessus, on trouve successivement

$$lim\,\frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} = lim\,\frac{e^x - e^{\sin x}\cos x}{1 - \cos x} = lim\,\frac{e^x - e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x)}{\sin x}$$

$$= lim\,\frac{e^x - e^{\sin x}(\cos^3 x - 3\sin x\cos x - \cos x)}{\cos x} = 1.$$

La vraie valeur cherchée est donc égale à l'unité.

On simplifie souvent les opérations par des artifices convenables : soit, par exemple, la fraction

$$\frac{\mathrm{l}.(1+x+x^2)+\mathrm{l}.(1-x+x^2)}{\sec x-\cos x}$$

dont on demande la vraie valeur pour $x=0$. Après l'avoir mise sous la forme $\frac{\mathrm{l}.(1+x^2+x^4)}{1-\cos^2 x}\cos x$, comme le facteur $\cos x$ tend vers l'unité, il suffira de chercher

$$lim\,\frac{\mathrm{l}.(1+x^2+x^4)}{\sin^2 x}=lim\,\frac{1+2x^2}{(1+x^2+x^4)\cos x}\cdot\frac{x}{\sin x}.$$

On voit de même que le premier facteur de ce produit a pour limite 1, x tendant vers zéro. La vraie valeur cherchée est donc $lim\,\frac{x}{\sin x}$, c'est-à-dire l'unité.

La règle subsistant quel que soit a, on prévoit qu'elle s'appliquera même pour $a=\infty$, c'est-à-dire lorsque, les fonctions $\mathrm{f}(x)$, $\mathrm{F}(x)$ ayant pour limite zéro quand x croît indéfiniment, on voudra connaître la limite de leur rapport. Soit, en effet, a une valeur de x très-grande ; dans l'équation (1), faisons croître x indéfiniment, et remplaçons $lim\,\mathrm{F}(x)=0$, $lim\,\mathrm{f}(x)=0$. Il vient

$$\frac{\mathrm{f}(a)}{\mathrm{F}(a)}=\mathrm{M}_a^\infty\,\frac{\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{F}'(x)},$$

et comme, dans cette équation, a peut être supposé aussi grand qu'on le veut, on aura, en faisant tendre a vers l'infini,

$$lim\,\frac{\mathrm{f}(a)}{\mathrm{F}(a)}=lim\,\frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{F}(x)}=lim\,\frac{\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{F}'(x)}.$$

102. Lorsque, pour $x=a$, $\mathrm{f}(x)$ et $\mathrm{F}(x)$ deviennent infinis, le rapport $\frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{F}(x)}$ prend la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$. Pour connaître sa vraie valeur, posons

$$a_1=a+\varepsilon,$$

ε étant très-petit, mais invariable. La continuité des fonctions f et F entre $a+\varepsilon$ et x permet l'emploi de la formule (1), et l'on a

$$\frac{\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(a_1)}{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(a_1)}=\mathrm{M}_{a_1}^x\,\frac{\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{F}'(x)}.$$

Divisons haut et bas, dans le premier membre, par $F(x)$, et faisons tendre x vers la limite a; $F(x)$ croissant alors indéfiniment, $\frac{f(a_1)}{F(x)}$, $\frac{F(a_1)}{F(x)}$ ont pour limite zéro, et le premier membre se réduit à $lim\frac{f(x)}{F(x)}$. On a donc

$$lim\frac{f(x)}{F(x)}=\mathrm{M}_{a_1}^{a}\frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

Mais, comme ε peut être pris aussi petit qu'on le veut, a et $a+\varepsilon$ diffèrent aussi peu qu'on le veut, sans que cela influe en rien sur la valeur du premier membre; on peut donc, sans difficulté, supposer ε infiniment petit, et l'on a, x ayant pour limite a,

$$lim\frac{f(x)}{F(x)}=lim\frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

Cette démonstration subsiste, lors même que la vraie valeur de la fraction est nulle ou infinie, et il suffirait, pour l'étendre au cas où $a=\infty$, de regarder a_1 comme une constante ayant une valeur aussi grande qu'on le veut.

Nous sommes donc ramenés, pour déterminer les vraies valeurs des fonctions de forme $\frac{\infty}{\infty}$, à la même règle que dans le premier cas; mais il y a ici à observer que la dérivée d'une fonction qui devient infinie pour une valeur finie $x=a$, étant aussi infinie pour $x=a$, la fonction $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ aura pour $x=a$, la forme $\frac{\infty}{\infty}$; il en serait de même de $\frac{f''(x)}{F''(x)}$, etc., en sorte que la même difficulté se reproduirait indéfiniment. Néanmoins, on pourra généralement effectuer sur ces nouvelles fonctions des simplifications, et déterminer la limite de l'une d'entr'elles, lorsque x tend vers a; cette limite sera, en vertu de l'égalité ci-dessus, la vraie valeur cherchée.

Soit à trouver la valeur de $\frac{\mathrm{l.}\left(\frac{1}{x}\right)}{\cot. x}$ pour $x=0$. Nous aurons

$$lim\frac{\mathrm{l.}\left(\frac{1}{x}\right)}{\cot x}=lim\frac{\left(-\frac{1}{x}\right)}{\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}=lim\frac{\sin^2 x}{x}=0.$$

103. Les autres indéterminations apparentes se ramènent aux précédentes. Si $f(a) = 0$, $F(a) = \infty$, le produit $f(x) \cdot F(x)$ prend, pour $x = a$, la forme $0 \cdot \infty$. Mais on a identiquement

$$f(x) \cdot F(x) = \frac{f(x)}{\left[\frac{1}{F(x)}\right]} = \frac{F(x)}{\left[\frac{1}{f(x)}\right]},$$

et ces deux rapports se présentent, le premier sous la forme $\frac{0}{0}$, le second sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$, ce qui nous ramène aux règles données plus haut.

Si $f(a) = \infty$, $F(a) = \infty$, la fonction $f(x) - F(x)$ prend la forme $\infty - \infty$: on lui donne la forme $\frac{0}{0}$ par une réduction au même dénominateur, et on la traite comme précédemment. Soient $a = 0$, $f(x) - F(x) = \frac{1}{x} - \cot x$, on aura

$$lim\left(\frac{1}{x} - \cot x\right) = lim\ \frac{\sin x - x\cos x}{x \sin x} = lim\ \frac{x \sin x}{\sin x + x\cos x} = 0.$$

Enfin, si l'on a $f(a) = 0$, $F(a) = 0$; ou $f(a) = 0$, $F(a) = \infty$; ou $f(a) = \infty$, $F(a) = 1$, la fonction $F(x)^{f(x)}$ prend l'une des formes 0^0, ∞^0, 1^∞. On pose

$$\varphi(x) = F(x)^{f(x)}, \qquad \text{d'où} \qquad \text{l.}\ \varphi(x) = f(x)\ \text{l.}\ F(x),$$

et, pour $x = a$, $\text{l.}\,\varphi(x)$ prendra, dans les trois cas, la forme $0 \cdot \infty$. Sa vraie valeur se déterminera par la méthode indiquée, et fera connaître celle de $\varphi(a)$.

104. *Remarques.* — 1° Il est parfois plus simple, dans le cas où les deux termes d'un rapport s'évanouissent pour $x = a$, de développer en séries convergentes le numérateur et le dénominateur, d'effectuer les réductions, puis de faire $x = a$. Soit à chercher la vraie valeur, pour $x = 0$, de la fraction

$$\frac{1}{x^5}\left(x - \frac{2}{3}\sin x - \frac{1}{3}\operatorname{tg} x\right).$$

On peut lui appliquer la méthode du n° 101, mais il vaut mieux lui donner la forme

$$\frac{(3x - 2\sin x)\cos x - \sin x}{3x^5 \cos x}$$

$$= \frac{1}{3x^5 \cos x}\left[\left(3x - 2x + \frac{2x^3}{1\ 2\cdot 3} - \cdots\right)\left(1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot\cdot 4} - \cdots\right) - \left(x - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots\right)\right.$$

faisant les réductions, supprimant x^5 qui devient facteur commun aux deux termes de la fraction, et posant $x=0$, on trouve pour la vraie valeur demandée

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}-\frac{1}{1\cdot2\cdot3}-\frac{3}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\right)=-\frac{1}{20}.$$

2° Il est essentiel d'observer que l'application de la formule (3)

$$lim\,\frac{f(x)}{F(x)}=lim\,\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

suppose, en premier lieu, que $F'(x)$ reste constamment de même signe quand x tend vers la limite a; en second lieu, que le rapport des dérivées tende vers une limite déterminée, car il pourrait se faire que ce rapport n'eût pas de limite, sans que l'on puisse affirmer pour cela que le rapport $\frac{f(x)}{F(x)}$ n'en a pas. Seulement, la limite de la quantité

$$\mathrm{M}_a^x\,\frac{f'(x)}{F'(x)}\ \text{[équation (2)]}$$

ne pouvant plus être connue, la méthode proposée n'a plus de succès. Cherchons, comme exemple, la valeur de la fraction suivante, qui se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ pour $x=0$:

$$\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\mathrm{l.}(1+x)}=\mathrm{M}_0^x\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)(1+x).$$

Comme la quantité sous le signe *moyenne* ne tend vers aucune limite déterminée quand x tend vers zéro, on ne peut rien connaître de la limite de la moyenne elle-même, ni par conséquent de celle du premier membre de l'équation. Mais en écrivant celui-ci sous la forme

$$\frac{x}{\mathrm{l.}(1+x)}\cdot x\sin\frac{1}{x},$$

on voit qu'il a pour limite zéro.

105. La dérivée d'une fonction implicite y, définie par une équation $F(x, y)=0$, prend la forme $\frac{0}{0}$ lorsque, pour certaines valeurs de x et de y, les dérivées partielles de la fonction F s'annulent à la fois. Le moyen le plus simple de trouver sa vraie valeur consiste à différentier une seconde fois l'équation : le coefficient de d^2y s'annule, car il est égal

à $\frac{dF}{dy}$, et l'on a une équation du second dégré en $\frac{dy}{dx}$ qui, résolue, donne deux valeurs pour cette expression. Par exemple, l'équation

$$y^4 - 96a^2y^2 + 100a^2x^2 - x^4 = 0$$

donne

$$(y^3 - 48a^2y)\frac{dy}{dx} + (50a^2x - x^3) = 0,$$

et pour $x = 0$, $y = 0$, la dérivée de y prend la forme $\frac{0}{0}$. Différentiant de nouveau, et observant que le coefficient de d^2y est nul pour $y = 0$, on a

$$(3y^2 - 48a^2)\frac{dy^2}{dx^2} + 50a^2 - 3x^2 = 0,$$

d'où l'on tire, en faisant x et y nuls,

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{50}{48}} = \pm\sqrt{\frac{25}{24}},$$

ce qui donne les deux valeurs dont $\frac{dy}{dx}$ est susceptible pour $x = 0$.

Ce problème n'est qu'un cas particulier d'un autre, dont nous ne parlerons pas, qui consiste à chercher la limite d'une fonction de deux variables x et y liées par une équation, lorsque cette fonction prend la forme $\frac{0}{0}$ (1).

Exercices.

Trouver les vraies valeurs des expressions suivantes :

1. $\dfrac{x^3 - 4ax^2 + 5a^2x - 2a^3}{x^3 - 3a^2x - 2a^3}$, pour $x = 2$, $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. R. $\dfrac{1}{9}$.

2. $\dfrac{1 - (m+1)x^m + mx^{m+1}}{(1-x)^2}$, pour $x = 1$, $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. R. $\dfrac{m(m+1)}{2}$.

3. $\dfrac{x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{16}x + \frac{9}{32}}{x^4 + \frac{3}{4}x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}}$, pour $x = -\dfrac{3}{4}$, $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. R. $-\dfrac{120}{59}$.

---

(1) Voir, sur ce point, un mémoire de M. P. du Bois Reymond, *Journal de Crelle*, T. 70.

4. $\dfrac{\sqrt{a^2+ax+x^2}-\sqrt{a^2-ax+x^2}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$, pour $x=0$, $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. R. $\sqrt{a}$.

5. $\dfrac{a^x-b^x}{\sin x}$, pour $x=0$, $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. R. $\mathrm{l.}\left(\dfrac{a}{b}\right)$.

6. $\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$, pour $x=0$, $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. — On trouve, par la méthode ordinaire ou par le dévéloppement en série, que la vraie valeur est 2.

7. $\dfrac{x^x-1}{x^m+x^x\,\mathrm{l}.x-1}$, pour $x=1$, $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. R. $\dfrac{1}{m+1}$.

8. $\dfrac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^2(e^x-1)}$, pour $x=0$, $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. R. $\dfrac{1}{6}$.

9. $\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$, pour $x=0$, $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. R. $-\dfrac{e}{2}$.

10. $\dfrac{x\sin(\sin x)-\sin^2 x}{x^6}$, pour $x=0$, $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. R. $\dfrac{1}{18}$.

11. $\dfrac{\mathrm{A}^x}{x^n}$, pour $x=\infty$, $n>0$, $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. R. ∞.

12. $\dfrac{\mathrm{l.}(a+be^x)}{\sqrt{\alpha+\beta x^2}}$, pour $x=\infty$, $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. R. $\dfrac{1}{\sqrt{\beta}}$.

13. $\dfrac{1}{x^2}-\cot^2 x$, pour $x=0$, $(\infty-\infty)$. R. $\dfrac{2}{3}$.

14. $\dfrac{2+\cos x}{x^3\sin x}-\dfrac{3}{x^4}$, pour $x=0$, $(\infty-\infty)$. R. $\dfrac{1}{60}$.

15. $\dfrac{\pi x-1}{2x^2}+\dfrac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1)}$, pour $x=0$, $(\infty-\infty)$. R. $\dfrac{\pi^2}{6}$.

16. $xe^{\frac{1}{x}}$, pour $x=0$, $(0\cdot\infty)$. R. ∞.

17. $x\,\mathrm{l.}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)$, pour $x=\infty$, $(\infty\cdot 0)$. R. $-2a$.

18. x^x pour $x=0$, (0^0). R. 1.

19. $(a+bx^m)^{\frac{1}{\alpha+\beta\,\mathrm{l}.x}}$, pour $x=\infty$, $m>0$, (∞^0). R. $e^{\frac{m}{\beta}}$.

20. $(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$, pour $x=\dfrac{\pi}{4}$, (1^∞). R. $\dfrac{1}{e}$.

21. $(\cos ax)^{\frac{1}{\sin^2 bx}}$ pour $x=0$, (1^∞). R. $e^{-\frac{a^2}{2b^2}}$.

22. $y^3 - 3axy + x^4 = 0$, vraie valeur de $\frac{dy}{dx}$ pour $x=0$, $y=0$. R. 0, ∞.

23. $y^4 + axy^2 - bx^3 + x^4 = 0$, vraie valeur de $\frac{dy}{dx}$ pour $x=0$, $y=0$.

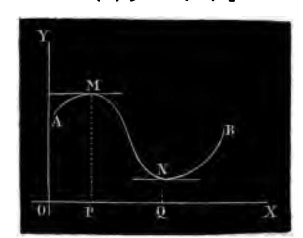
R. ∞, $\sqrt{\frac{b}{a}}$, $-\sqrt{\frac{b}{a}}$.

CHAPITRE XI.

THÉORIE DES MAXIMA ET MINIMA.

§ 1. FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE.

106. On dit qu'une fonction $F(x)$ de la variable x est un *maximum* pour une valeur x_0 de cette variable, lorsque, pour toute valeur de x voisine de x_0, $F(x)$ est moindre que $F(x_0)$. Si, au contraire, on a constamment $F(x) > F(x_0)$ pour toutes les valeurs de x suffisamment voisines de x_0, $F(x_0)$ sera un *minimum* de $F(x)$: l'ordonnée de la courbe AMNB figurant la fonction $F(x)$, celle-ci sera maximum au point M, minimum au point N. Elle peut donc admettre plusieurs maxima et plusieurs minima.



Pour reconnaître les valeurs de x qui rendent une fonction $F(x)$ maximum ou minimum, désignons par h un accroissement infiniment petit, positif ou négatif, de x. En vertu des définitions ci-dessus, la différence $F(x_0 + h) - F(x_0)$ sera *négative*, quel que soit le signe de h, si $F(x_0)$ est un maximum; elle sera *positive*, si $F(x_0)$ est un minimum. En sorte que le caractère commun au maximum et au minimum, est que $F(x_0 + h) - F(x_0)$ reste de même signe, quel que soit le signe de la quantité infiniment petite h.

Mais on a, θ étant compris entre zéro et l'unité,

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = hF'(x_0 + \theta h).$$

Supposons $F'(x_0) \gtrless 0$: θh étant infiniment petit, $F'(x_0 + \theta h)$ diffère infiniment peu de $F'(x_0)$, par suite de la continuité de la fonction $F'(x)$ (58), et est conséquemment de même signe que $F'(x_0)$, quel que soit le signe de h. Le produit $hF'(x_0 + \theta h)$ change donc de signe avec h, il n'y a donc ni maximum ni minimum. *Il faut donc, pour que x_0 corresponde à un maximum ou à un minimum de la fonction, que l'on ait*

$$F'(x_0) = 0.$$

Cette condition étant satisfaite, pour discerner si $F(x_0)$ est un maximum ou un minimum, nous observons que la formule de Taylor donne ici

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \frac{h^2}{2} F''(x_0 + \theta h),$$

et, par la même raison que ci-dessus, $F''(x_0 + \theta h)$ est constamment de même signe que $F''(x_0)$, quel que soit le signe de h. Le facteur $\frac{h^2}{2}$ étant positif, la différence $F(x_0 + h) - F(x_0)$ est de même signe que $F''(x_0)$, que h soit $>$ ou < 0; donc 1° si $F''(x_0) < 0$, on a $F(x_0 + h) - F(x_0) < 0$, et $F(x_0)$ est un *maximum* de la fonction $F(x)$; 2° si $F''(x_0) > 0$, on a aussi $F(x_0 + h) - F(x_0) > 0$, ce qui fait voir que x_0 correspond à un *minimum* de $F(x)$; 3° si $F''(x_0)$ est nul, on ne peut rien conclure, et il faut recourir aux dérivées suivantes.

107. En général, admettons que l'hypothèse $x = x_0$ annulle les $n - 1$ premières dérivées de la fonction, et non la $n^{ième}$. La formule de Taylor donnera la relation

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \frac{h^n}{1 \cdot 2 \cdots n} F^n(x_0 + \theta h),$$

et puisque $F^n(x_0)$ n'est pas nul, $F^n(x_0 + \theta h)$ qui en diffère infiniment peu, sera de même signe que $F^n(x_0)$, quelque signe qu'on attribue à h. Si donc n *est impair*, h^n changeant de signe avec h, le second membre de l'équation, et par suite $F(x_0 + h) - F(x_0)$, changera de signe avec h, et il n'y aura ni maximum ni minimum pour $x = x_0$. Si, au contraire, n *est pair*, h^n est essentiellement positif; le second membre de l'équation a donc même signe que $F^n(x_0)$, quel que soit le signe de h, et il en est de même de la différence $F(x_0 + h) - F(x_0)$. Il y a donc maximum si $F^n(x_0) < 0$, minimum si $F^n(x_0) > 0$.

Observons encore que l'on a

$$d^nF(x) = F^n(x)\, dx^n,$$

dx étant une quantité indéterminée dont les puissances paires sont positives. Rien n'empêche donc de substituer les différentielles aux dérivées de $F(x)$, dans l'énoncé des théorèmes qui précèdent. Ainsi, la valeur x_0 de x devra annuler un nombre impair de différentielles successives de $F(x)$, à partir de la première; et il y aura maximum ou minimum de $F(x)$, selon que la première de ces différentielles qui ne s'annule pas aura, pour $x = x_0$, une valeur négative ou positive. Cet énoncé est quelquefois plus commode.

Examinons l'usage que l'on fera de ces propriétés, dans les divers cas, pour trouver les maxima et minima d'une fonction.

108. — I. Si la fonction $F(x)$ est donnée explicitement, on formera par les règles ordinaires sa dérivée, qu'on égalera à zéro. On déterminera les racines réelles de l'équation

$$F'(x) = 0,$$

puis on les substituera successivement dans la dérivée seconde $F''(x)$, afin de discerner par le signe que prend $F''(x)$ après cette substitution, si l'on a affaire à un maximum ou à un minimum. Si l'une des racines annule $F''(x)$, on passera aux dérivées suivantes, etc. Ensuite, on substituera dans l'expression de $F(x)$ les valeurs de x qui donnent un maximum ou un minimum, pour calculer ce maximum ou minimum lui-même.

Soit, comme exemple,

$$F(x) = x(x-a)^n,$$

n étant entier positif, a positif. On a

$$F'(x) = (x-a)^{n-1}[(n+1)x - a], \qquad F''(x) = n(x-a)^{n-2}[(n+1)x - 2a].$$

On satisfait à l'équation $F'(x) = 0$ en posant

$$1^\circ\ x = \frac{a}{n+1}; \qquad 2^\circ\ x = a.$$

La première valeur de x donne

$$F''(x) = \frac{(-na)^{n-1}}{(n+1)^{n-2}} = (-1)^{n-1}\frac{(na)^{n-1}}{(n+1)^{n-2}},$$

elle rend donc $F(x)$ maximum si n est pair, minimum si n est impair.

La racine $x = a$ annule, comme on le voit sans peine, toutes les dérivées de $F(x)$ jusqu'à l'ordre $n-1$ compris, et l'on a (64)

$$F^n(x) = 1\cdot 2\cdot 3 \cdots n[(n+1)x - na], \quad F^n(a) = 1\cdot 2 \cdots n\cdot a.$$

Si n est impair, la première dérivée qui ne s'annule pas est d'ordre impair, il n'y a donc ni maximum ni minimum pour $x = a$. Si n est pair, $F^n(a)$ étant positif, $F(a)$ est un minimum.

Les valeurs de la fonction qui correspondent aux deux racines de l'équation $F'(x) = 0$ sont ici

$$F\left(\frac{a}{n+1}\right) = (-1)^n n^n \left(\frac{a}{n+1}\right)^{n+1}, \quad F(a) = 0.$$

109. *Remarques.* — 1° Le calcul de la dérivée $F''(x_0)$ peut souvent être évité ou simplifié. Par exemple, $F'(x_0)$ étant nul, si l'on voit que $F'(x_0 - \varepsilon)$ est positif, $F'(x_0 + \varepsilon)$ négatif, ε étant positif et très-petit, il est clair (41, III) que la fonction $F(x)$, croissante jusqu'à $x = x_0$, devient décroissante au-delà, et que $F(x_0)$ est un maximum. Si, au contraire, $F'(x)$ passait du négatif au positif quand x passe de $x_0 - \varepsilon$ à $x_0 + \varepsilon$, il y aurait un minimum pour $x = x_0$.

Dans d'autres cas, la nature de la question fait voir que celle-ci ne comporte qu'une solution, par exemple, un maximum ; et si d'ailleurs l'équation $F'(x) = 0$ n'admet qu'une racine réelle, on est sûr que celle-ci répond à la question, et toute vérification ultérieure est inutile.

2° La théorie précédente suppose évidemment que la fonction $F(x)$, et celles d'entre ses dérivées dont on doit faire usage, soient des fonctions continues de x dans le voisinage de la valeur x_0 qui répond au maximum ou au minimum : sans cela les formules employées ne seraient pas applicables. Il en résulte que des maxima et minima de $F(x)$ pourront correspondre à des valeurs de x qui n'annulent pas $F'(x)$, mais qui rendent discontinue, soit la fonction $F(x)$, soit $F'(x)$. On s'en assurera, comme ci-dessus, en cherchant si la dérivée éprouve un changement de signe lorsque la variable franchit l'une de ces valeurs de x. Soit, comme exemple,

$$F(x) = 1 + x^{\frac{2}{3}}, \quad F'(x) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}.$$

L'équation $F'(x) = 0$ ne donne aucune solution, mais pour $x = 0$, $F'(x)$ devient infini; de plus, $F'(x)$ est < 0 pour $x < 0$, $F'(x) > 0$ pour $x > 0$; la fonction $F(x)$ est donc décroissante en deçà, croissante au-delà de $x = 0$, donc $F(0) = 1$ est un minimum.

Nous ferons abstraction des solutions de cette nature dans l'application de la théorie aux cas suivants.

110. — II. *Fonctions implicites.* Soit y une fonction de x définie par l'équation

$$\varphi(x, y) = 0.$$

Pour trouver les valeurs de x qui rendent y maximum ou minimum, on différentiera l'équation, on en tirera la valeur de dy en x et y, et on l'égalera à zéro. On cherchera les systèmes de valeurs de x, y, qui satisfont à cette équation et à la proposée; on substituera chaque système dans l'expression de d^2y, tirée de l'équation $\varphi(x, y)=0$ par une nouvelle différentiation; il y aura maximum pour y si le résultat est négatif, minimum s'il est positif.

Considérons l'équation

$$4y^3 - 3y + \sin x = 0,$$

qui donne

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{3(1-4y^2)}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{12y^3 \sin x - 6y^2(1+\sin^2 x) + y \sin x(2+\sin^2 x)}{9(2y - \sin x)^3}.$$

On satisfait à l'équation $dy = 0$ en posant $\cos x = 0$, d'où $\sin x = \pm 1$. Si l'on prend $\sin x$ égal à l'unité, l'équation devient

$$4y^3 - 3y + 1 = 0,$$

et a pour racines $y = -1$, $y = \frac{1}{2}$. Le système ($\sin x = 1$, $y = -1$) donne $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{9} > 0$; le système $\left(\sin x = 1, y = \frac{1}{2}\right)$ annule aussi le dénominateur de $\frac{dy}{dx}$, et l'on s'assure facilement que cette dérivée n'est pas nulle.

De même, en posant $\sin x = -1$, on trouve $y = 1$, $y = -\frac{1}{2}$: la seconde valeur ne donne ni maximum ni minimum de y, mais le système ($\sin x = -1$, $y = 1$) rend la dérivée seconde de y égale à $-\frac{1}{9} < 0$.

En résumé, pour toutes les valeurs de x comprises dans la formule $\sin x = +1$, la fonction y admet un minimum égal à -1; pour toutes les valeurs comprises dans la formule $\sin x = -1$, y admet un maximum égal à $+1$.

111. — III. Il arrive fréquemment que l'on ait à chercher les maxima ou minima d'une fonction $f(x, y)$ de deux variables, liées entr'elles par

une équation donnée

$$\varphi(x, y) = 0,$$

en sorte que y est fonction de x, et que f ne dépend toujours que d'une seule variable. La dérivée *totale* de f par rapport à x devant être nulle pour que f soit maximum ou minimum, on aura, pour les valeurs de x et de y qui satisfont à cette condition, les deux équations

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} = 0, \qquad \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{dx} = 0,$$

et, par l'élimination de $\frac{dy}{dx}$, celle-ci

$$\frac{df}{dx}\frac{d\varphi}{dy} - \frac{df}{dy}\frac{d\varphi}{dx} = 0,$$

qui ne renferme plus que x et y. En la combinant avec l'équation $\varphi(x, y) = 0$, on en déduira les systèmes de valeurs de x et de y qui répondent à un maximum ou à un minimum de f, et l'on vérifiera si l'un ou l'autre a lieu, soit à l'aide du signe de d^2f, soit par les conditions particulières du problème que l'on traite.

On pourrait de même chercher les maxima d'une fonction de trois variables liées par deux équations, etc., mais ces questions seront comprises dans une théorie générale qui sera exposée plus loin.

Exercices.

Trouver les maxima et minima de la fonction F (x) dans les cas suivants :

1. $F(x) = x^5 - 75x^3 + 1620x - 1000$. R. $x = -6$, *max.*, $F = -2296$; $x = -3$, *min.* $F = -3078$; $x = 3$, *max.*, $F = 1080$; $x = 6$, *min.* $F = 296$.

2. $F(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$. R. $x = \sqrt{2}$, *min.*, $F = -\frac{2}{(4 + 3\sqrt{2})^2}$; $x = -\sqrt{2}$, *max.*, $F = -\frac{(4 + 3\sqrt{2})^2}{2}$.

3. $F(x) = \left(1 + x^{\frac{2}{3}}\right)(7 - x)^2$. R. $x = 0$, *min.*, $F = 49$; $x = 1$, *max.*, $F = 72$; $x = 7$, *min.*, $F = 0$.

4. $F(x) = \frac{a + bx}{\sqrt{\alpha + \beta x^2}}$. R. $x = \frac{\alpha b}{a\beta}$, *min.* si $a\beta > 0$, *max.* si $\alpha\beta < 0$; $F = \sqrt{\frac{a^2}{\alpha} + \frac{b^2}{\beta}}$.

5. $F(x) = e^x - 2\cos x + e^{-x}$. R. $x=0$, *min.*; $F=0$.

6. $F(x) = \frac{1+2x \operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}$. R. $x=-1$, *max.*, $F=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$; $x=0$, *min.*, $F=1$; $x=1$, *max.*, $F=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$.

7. $F(x) = \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}$. R. L'équation de condition est

$$(2n+1)\sin x \cos(2n+1)x - \sin(2n+1)x\cos x = 0.$$

On y satisfait en posant 1° $x=(2i+1)\frac{\pi}{2}$, i étant un entier quelconque, ce qui donne un maximum $F=1$ si n est pair, un minimum $F=-1$ si n est impair; 2° $x=i\pi$, qui donne un maximum $F=2n+1$; 3° $\operatorname{tg}(2n+1)x=(2n+1)\operatorname{tg} x$, équation dont les racines, que l'on construit par l'intersection de deux courbes, diffèrent peu des valeurs de x comprises dans la loi $x=\frac{(2i+1)\pi}{2(2n+1)}$, et donnent alternativement des maxima et des minima.

8. Dans un levier du second genre en équilibre, quel doit être le bras de levier x de la puissance Q, pour que celle-ci soit un minimum, le moment M de la résistance étant donné?

R. Soit g le poids de l'unité de longueur du levier. — On trouve

$$x=\sqrt{\frac{2M}{g}}, \qquad Q=\sqrt{2Mg}.$$

9. Trouver le rayon x du cercle qui donne le segment maximum sur un arc de longueur donnée $2a$.

R. $x=\frac{2a}{\pi}$; le segment est un demi-cercle.

10. Couper un cône circulaire droit par un plan parallèle à la génératrice, de telle manière que le segment de parabole obtenu soit le plus grand possible.

R. Soit a le rayon de la base du cône, x la portion de ce rayon entre la génératrice et le plan sécant; on trouve

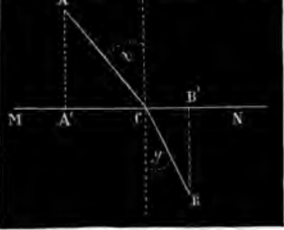
$$x=\frac{a}{2}.$$

11. Chercher, sur une droite OM, la position du point lumineux M, à laquelle répond le maximum d'éclairement d'un élément plan situé en A. On sait que l'éclairement est en raison inverse du carré de la distance AM, et en raison directe du sinus de l'angle que fait AM avec le plan de l'élément éclairé.

R. Soient O le point de rencontre de la droite OM avec le plan de l'élément, $x=OM$, $a=OA$, $a_1=OA_1$ la projection de OA sur OM. On trouve

$$x=\frac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2+8a^2}}{4},$$

ce qui détermine deux points, situés de part et d'autre du plan de l'élément, et qui correspondent tous deux à un maximum.



12. Trouver la route que doit suivre un rayon lumineux, passant d'un milieu A où la vitesse de transmission de la lumière est u, dans un milieu B où elle est v, pour atteindre son point d'arrivée dans le temps le plus court possible.

R. A', B' étant les projections des points A, B sur le plan de séparation MN, soient $AA'=a$, $BB'=b$, $A'B'=c$; x, y les angles du rayon *incident* et du rayon *réfracté* avec la normale au plan MN. Le trajet du rayon est composé de deux droites dans le plan AA'B'B; la fonction qui doit être un minimum est

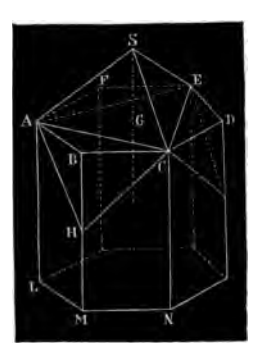
$$\frac{a}{u\cos x}+\frac{b}{v\cos y},$$

et l'on a la relation

$$a\operatorname{tg}x+b\operatorname{tg}y=c.$$

On trouve, pour la condition du minimum,

$$\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{u}{v}.$$



13. Etant donné un prisme hexagonal régulier ABCDEFLMN..., on mène, par un point S pris sur l'axe, trois plans passant par les diagonales AC, CE, EA de la base supérieure, et on remplace cette base par le pointement à trois faces ainsi obtenu. Démontrer que le nouveau solide a même volume que le prisme primitif, quel que soit le point S; choisir ce point de manière à ce que la surface totale du solide soit un minimum (*Alvéoles des abeilles*).

R. En appelant x l'inclinaison des faces du pointement sur la base du prisme, on trouve

$$\sin x=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

§ 2. FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES.

112. Considérons d'abord une fonction $F(x, y)$ de deuxvariables, indépendantes l'une de l'autre. On dit que la fonction devient *maximum* pour un système de valeurs x_0, y_0 des variables, lorsque, pour toutes les valeurs de x voisines de x_0, et pour toutes les valeurs de y voisines de y_0, on a constamment

$$F(x, y) < F(x_0, y_0).$$

Si, dans les mêmes circonstances, $F(x, y)$ restait constamment plus grand que $F(x_0, y_0)$, on aurait un *minimum* pour $x=x_0$, $y=y_0$.

La recherche des maxima et minima d'une fonction de deux variables se ramène au cas déjà traité, à l'aide des considérations développées au N° 45. Au lieu de regarder x, y, dans le voisinage des valeurs x_0, y_0, comme des variables arbitraires, on regarde y comme une fonction de x, fonction dont la forme est indéterminée : il sera nécessaire et suffisant que, pour les valeurs x_0, y_0 des variables, $F(x, y)$, devenu fonction de x seul, soit maximum ou minimum quelle que soit la relation entre x et y.

Or, d'après la règle établie pour les fonctions d'une seule variable, on doit poser $dF = 0$, ou

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy = 0;$$

dx est arbitraire; la relation entre y et x étant indéterminée, il en est de même de la dérivée de y par rapport à x, ou du rapport de dy à dx : cela revient à dire que l'équation précédente doit être satisfaite pour des valeurs quelconques de dx et de dy, et que, par conséquent, *il faut que les équations*

$$\frac{dF}{dx} = 0, \qquad \frac{dF}{dy} = 0,$$

soient satisfaites pour $x = x_0$, $y = y_0$, *sans quoi le système* (x_0, y_0) *ne produirait ni maximum ni minimum de la fonction* $F(x, y)$.

Supposons que cette condition soit remplie : on sait encore que F sera un maximum ou un minimum, suivant que d^2F sera négatif ou positif pour les valeurs x_0, y_0 des variables. On a d'ailleurs

$$d^2F = \frac{d^2F}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2F}{dxdy}dxdy + \frac{d^2F}{dy^2}dy^2 + \frac{dF}{dy}d^2y,$$

dx étant constant. Posons $x = x_0$, $y = y_0$, et soient alors, pour abréger,

$$dx = \xi, \quad dy = \eta, \quad \frac{d^2F}{dx^2} = A, \quad \frac{d^2F}{dy^2} = B, \quad \frac{d^2F}{dxdy} = L,$$

le coefficient de d^2y étant nul par la condition ci-dessus. Il faudra donc que l'expression

$$A\xi^2 + 2L\xi\eta + B\eta^2$$

conserve le même signe, quelles que soient les valeurs de ξ, η. Ecrivons cette expression sous la forme

$$A\left(\xi + \frac{L}{A}\eta\right)^2 + \left(B - \frac{L^2}{A}\right)\eta^2 :$$

il est clair que la condition sera satisfaite si les coefficients A, $B - \frac{L^2}{A}$ sont de même signe; et d'autre part, comme on peut choisir ξ, η de manière à annuler à volonté l'un des deux termes, l'expression pourrait changer de signe si A, $B - \frac{L^2}{A}$, n'avaient pas le même signe. Il faut donc, et il suffit, que l'on ait $AB - L^2 > 0$, *ou que l'expression*

$$\frac{d^2F}{dx^2}\frac{d^2F}{dy^2} - \left(\frac{d^2F}{dxdy}\right)^2,$$

pour $x = x_0$, $y = y_0$, *soit positive;* ce qui exige, tout d'abord, que A et B soient de même signe, et différents de zéro.

Cette condition remplie, le signe de d^2F sera le même que celui de A : si $A < 0$, $F(x_0, y_0)$ sera un maximum de la fonction; si $A > 0$, $F(x_0, y_0)$ sera un minimum.

Si l'on avait à la fois

$$A = 0, \qquad B = 0, \qquad L = 0,$$

d^2F étant nul pour $x = x_0$, $y = y_0$, il faudrait pour qu'il y eût maximum ou minimum (106) que d^3F fût nul aussi, quels que soient ξ, η, c'est-à-dire que les quatre dérivées partielles du 3me ordre de la fonction s'évanouissent; puis, que d^4F restât constamment de même signe pour toutes les valeurs possibles de ξ, η, et ce signe ferait connaître s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum. Et ainsi de suite.

113. Ces principes s'appliquent à des fonctions d'un nombre quelconque de variables indépendantes. Soit $F(x, y, z)$ une fonction de trois variables : pour qu'elle devienne maximum ou minimum pour $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, il faut que sa différentielle totale dF s'annule, pour ces valeurs des variables, quels que soient dx, dy, dz; ce qui conduit aux équations

$$\frac{dF}{dx} = 0, \qquad \frac{dF}{dy} = 0, \qquad \frac{dF}{dz} = 0.$$

Sa différentielle totale du second ordre d^2F se réduit alors, en posant

$$dx = \xi, \quad dy = \eta, \quad dz = \zeta,$$

$$\frac{d^2F}{dx^2} = A, \quad \frac{d^2F}{dy^2} = B, \quad \frac{d^2F}{dz^2} = C, \quad \frac{d^2F}{dxdy} = L, \quad \frac{d^2F}{dxdz} = M, \quad \frac{d^2F}{dydz} = N,$$

à la forme suivante :

$$d^2F = A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 + 2L\xi\eta + 2M\xi\zeta + 2N\eta\zeta,$$

et il faut qu'elle ait un signe invariable, quelques valeurs qu'on attribue à ξ, η, ζ. Mais on peut l'écrire ainsi :

$$d^2F = A\left(\xi + \frac{L}{A}\eta + \frac{M}{A}\zeta\right)^2 + \left(B - \frac{L^2}{A}\right)\eta^2 + 2\left(N - \frac{LM}{A}\right)\eta\zeta + \left(C - \frac{M^2}{A}\right)\zeta^2;$$

ou encore, en posant

$$B - \frac{L^2}{A} = A', \quad N - \frac{LM}{A} = L', \quad C - \frac{M^2}{A} = B',$$

et opérant comme ci-dessus (112),

$$d^2F = A\left(\xi + \frac{L}{A}\eta + \frac{M}{A}\zeta\right)^2 + A'\left(\eta + \frac{L'}{A'}\zeta\right)^2 + \left(B' - \frac{L'^2}{A'}\right)\zeta^2;$$

ou enfin, en posant

$$B' - \frac{L'^2}{A'} = A'',$$

$$d^2F = A\left(\xi + \frac{L}{A}\eta + \frac{M}{A}\zeta\right)^2 + A'\left(\eta + \frac{L'}{A'}\zeta\right)^2 + A''\zeta^2.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que d^2F ne change pas de signe, quels que soient ξ, η, ζ, sera que A, A', A'' soient de même signe, ou que l'on ait

$$AB - L^2 > 0, \quad (AB - L^2)(AC - M^2) - (AN - LM)^2 > 0.$$

On vérifiera donc si les dérivées partielles du second ordre de la fonction F satisfont, pour $x = x_0$, $y = y_0$, etc., à ces conditions, auquel cas $F(x_0, y_0, z_0)$ sera un maximum si $A < 0$, un minimum si $A > 0$.

On voit sans peine que la méthode s'étend à une fonction d'un nombre quelconque de variables.

Nous avons laissé de côté, bien entendu, les maxima qui coïncideraient avec des solutions de continuité de la fonction ou de ses dérivées partielles.

Quant à la vérification du maximum ou du minimum par l'examen de d^2F, on peut souvent y suppléer par des considérations particulières tirées de la nature du problème.

114. — *Fonctions implicites.* Nous aborderons immédiatement un cas général, qui comprend les divers problèmes que l'on peut se poser sur

les maxima et minima des fonctions implicites de plusieurs variables. Soit à chercher les maxima ou minima d'une fonction $f(x, y, \ldots, u)$ de m variables, liées entr'elles par k équations

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi_1(x, y, \ldots, u) = 0, \\ \varphi_2(x, y, \ldots, u) = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \varphi_k(x, y, \ldots, u) = 0, \end{array}\right.$$

en sorte que f dépend de $m - k$ variables indépendantes. D'après la théorie exposée précédemment, tout système de valeurs de ces variables qui rend la fonction f un maximum ou un minimum, satisfait à l'équation $df = 0$. D'autre part, les équations $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0, \ldots$ qui ont lieu entre toutes les valeurs des variables, entraînent les équations $d\varphi_1 = 0$, $d\varphi_2 = 0$, etc... On devra donc poser, pour qu'il y ait maximum ou minimum de la fonction $f(x, y, \ldots, u)$,

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{df}{dx}\,dx + \frac{df}{dy}\,dy + \cdots + \frac{df}{du}\,du = 0, \\ \frac{d\varphi_1}{dx}\,dx + \frac{d\varphi_1}{dy}\,dy + \cdots + \frac{d\varphi_1}{du}\,du = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{d\varphi_k}{dx}\,dx + \frac{d\varphi_k}{dy}\,dy + \cdots + \frac{d\varphi_k}{du}\,du = 0. \end{array}\right.$$

Entre ces $k+1$ équations, on éliminera les k différentielles des variables $u, \ldots$ que l'on regarde comme fonctions des $m - k$ variables indépendantes $x, y, \ldots$, et l'équation résultante

$$Pdx + Qdy + \cdots = 0,$$

devant avoir lieu pour toutes les valeurs possibles des différentielles dx, $dy, \ldots$, se décomposera comme il suit :

$$P = 0, \quad Q = 0, \ldots$$

Ces $m - k$ équations, jointes aux k équations $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0, \ldots$, devront être satisfaites par les systèmes de valeurs de x, $y, \ldots$, u qui donnent un maximum ou un minimum de f, et serviront à les déterminer.

Mais l'élimination des différentielles se fait d'une manière plus élégante, et presque toujours plus commode, par la méthode *des multiplicateurs*. Après avoir multiplié les équations $d\varphi_1 = 0$, $d\varphi_2 = 0, \ldots$, par des facteurs

indéterminés λ_1, λ_2, ..., on les ajoute membre à membre avec l'équation $df = 0$, en ayant soin de réunir les termes affectés du facteur dx, du facteur dy, etc... Si l'on dispose ensuite des k indéterminées $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ de manière à faire évanouir, dans l'équation résultante, les coefficients des k différentielles *dépendantes* $du, \ldots$, il faudra alors, comme il vient d'être dit, égaler à zéro les coefficients des $m - k$ différentielles *indépendantes* dx, $dy, \ldots$; ce qui revient évidemment à égaler à zéro, quoique pour des raisons différentes, les coefficients de toutes les différentielles dx, $dy, \ldots$, du, dans l'équation obtenue par l'addition des premières. On aura ainsi les m équations

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{df}{dx} + \lambda_1 \dfrac{d\varphi_1}{dx} + \lambda_2 \dfrac{d\varphi_2}{dx} + \cdots + \lambda_k \dfrac{d\varphi_k}{dx} = 0, \\ \dfrac{df}{dy} + \lambda_1 \dfrac{d\varphi_1}{dy} + \lambda_2 \dfrac{d\varphi_2}{dy} + \cdots + \lambda_k \dfrac{d\varphi_k}{dy} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{df}{du} + \lambda_1 \dfrac{d\varphi_1}{du} + \lambda_2 \dfrac{d\varphi_2}{du} + \cdots + \lambda_k \dfrac{d\varphi_k}{du} = 0. \end{array}\right.$$

Jointes aux k équations $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0, \ldots$ elles serviront à déterminer les k multiplicateurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, et les valeurs des m inconnues x, $y, \ldots$, u, qui répondent à la question.

Il restera toujours, d'ailleurs, à vérifier par le signe de d^2f, si les valeurs trouvées pour ces inconnues répondent bien à un maximum, ou à un minimum, à moins que la nature particulière de la question ne dispense de cet examen.

115. La théorie précédente comprend le cas où l'on cherche les maxima et minima d'une variable liée à plusieurs variables indépendantes par des équations données : la fonction f se réduit alors à l'une des variables, par exemple, à u.

Elle comprend aussi le cas, indiqué au N° 111, où toutes les variables dépendent d'une seule : le nombre k des équations $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0, \ldots$ est alors égal à $m - 1$. Il n'y a d'ailleurs rien à changer au procédé.

Exercices.

1. Maxima et minima de la fonction

$$F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dy + ex + f.$$

R. Il faut que l'on ait $b^2 - 4ac < 0$; la fonction est un minimum pour

$$x = \frac{2ae - bd}{b^2 - 4ac}, \qquad y = \frac{2cd - be}{b^2 - 4ac}.$$

2. $F(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$

R. On trouve $x=0$, $y=0$ qui donne un maximum; $x = +\sqrt{2}$, $y = -\sqrt{2}$, minimum; $x = -\sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$, minimum.

3. Soit $F(x, y) = a^2x^2y - 2ax^3y + x^4y - 2ax^2y^2 + 2x^3y^2 + x^2y^3$. La fonction est-elle maximum ou minimum pour $x = 0$, $y = 0$?

R. On trouve, dans cette hypothèse, $d^2F = 0$, $d^3F = 6a^2dx^2dy$; il n'y a ni max. ni min.

4. Déterminer les axes de la section faite par un plan passant par le centre de l'ellipsoïde.

R. Appelons l, m, n les cosinus directeurs de la normale au plan sécant; le problème revient à trouver le maximum et le minimum de la fonction

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

les variables satisfaisant aux équations

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad lx + my + nz = 0.$$

La méthode (114) donne les équations

$$x + \lambda_1 \frac{x}{a^2} + \lambda_2 l = 0, \qquad y + \lambda_1 \frac{y}{b^2} + \lambda_2 m = 0, \qquad z + \lambda_1 \frac{z}{c^2} + \lambda_2 n = 0.$$

Multipliant par x, y, z et ajoutant, il vient

$$r^2 + \lambda_1 = 0, \qquad \lambda_1 = -r^2,$$

d'où

$$x = \lambda_2 \frac{la^2}{r^2 - a^2}, \qquad y = \lambda_2 \frac{mb^2}{r^2 - b^2}, \qquad z = \lambda_2 \frac{nc^2}{r^2 - c^2},$$

d'où

$$\frac{a^2l^2}{r^2 - a^2} + \frac{b^2m^2}{r^2 - b^2} + \frac{c^2n^2}{r^2 - c^2} = 0.$$

Cette équation donne deux valeurs pour r^2; ce sont évidemment les carrés des demi-axes de la section. On trouve ensuite

$$\lambda_2 = \left[\frac{a^4l^2}{(r^2 - a^2)^2} + \frac{b^4m^2}{(r^2 - b^2)^2} + \frac{c^4n^2}{(r^2 - c^2)^2}\right]^{-\frac{1}{2}},$$

ce qui achève de déterminer le point (x, y, z), auquel aboutit la direction du rayon maximum ou minimum.

5. Résoudre le même problème pour la surface dont l'équation est

$$(x^2+y^2+z^2)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2.$$

R. $$\frac{l^2}{r^2-a^2}+\frac{m^2}{r^2-b^2}+\frac{n^2}{r^2-c^2}=0.$$

6. Partager un nombre donné a en trois parties x, y, z, telles que $f=x^my^nz^p$ un maximum; m, n, p sont entiers et positifs.

R. $$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}=\frac{a}{m+n+p}.$$

$$d^2f=-f\left(\frac{m}{x^2}dx^2+\frac{n}{y^2}dy^2+\frac{p}{z^2}dz^2\right)<0,\quad max.$$

7. Par un point donné (a, b, c) mener un plan qui fasse, avec les plans coordo rectangulaires, le tétraèdre de plus petit volume V.

R. Soit

$$l(x-a)+m(y-b)+n(z-c)=0$$

l'équation du plan cherché; on aura

$$V=\frac{1}{6}\frac{(la+mb+nc)^3}{lmn},$$

les variables l, m, n satisfaisant à l'équation

$$l^2+m^2+n^2=1.$$

On trouve

$$\frac{l}{\left(\frac{1}{a}\right)}=\frac{m}{\left(\frac{1}{b}\right)}=\frac{n}{\left(\frac{1}{c}\right)}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}},\qquad V=\frac{9}{2}abc;$$

le plan cherché est parallèle au plan passant par les projections du point $(a, b, c$ les axes.

8. Par le point (a, b, c) mener un plan tel, que la diagonale δ du parallélipi construit sur les portions d'axes interceptées, soit un minimum.

R. On trouve

$$\frac{l}{a^{-\frac{1}{3}}}=\frac{m}{b^{-\frac{1}{3}}}=\frac{n}{c^{-\frac{1}{3}}}=\frac{1}{\sqrt{a^{-\frac{2}{3}}+b^{-\frac{2}{3}}+c^{-\frac{2}{3}}}};\qquad \delta=\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

La question ne comporte pas de maximum.

9. Quel est le triangle sphérique de moindre périmètre, parmi ceux qui ont une face donnée?

R. Soient x, y, z les côtés du triangle, $2p$ son périmètre;

$$2p=x+y+z;\qquad \mathrm{tg}\,\frac{p}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{p-x}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{p-y}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{p-z}{2}=const.$$

On trouve

$$x=y=z;$$

le triangle est équilatéral.

CHAPITRE XII.

FORMULE DE TAYLOR POUR LES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES.

116. Soient d'abord $F(x, y)$ une fonction de deux variables; h, k des accroissements quelconques donnés à ces variables : il s'agit de développer $F(x+h, y+k)$ en série procédant suivant les puissances ascendantes de h et de k.

Pour cela, soit t une nouvelle variable; posant

$$u = x + ht, \quad v = y + kt, \quad \varphi(t) = F(u, v) = F(x + ht, y + kt),$$

nous développerons $\varphi(t)$ suivant les puissances ascendantes de t par la formule de Maclaurin, puis nous ferons $t = 1$ dans le développement. Nous avons

$$(1) \quad \varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + \frac{t^2}{1\,2}\varphi''(0) + \cdots + \frac{t^{n-1}}{1\,2\cdots(n-1)}\varphi^{n-1}(0) + R_n,$$

et il faut calculer les coefficients $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$,... Comme x, y, h, k sont indépendants de t, nous aurons

$$du = h\,dt, \quad dv = k\,dt, \quad d^2u = 0, \quad d^2v = 0, \ldots$$

et

$$d^n\varphi(t) = d^nF(u, v)$$

s'obtiendra en développant la différentielle $n^{\text{ième}}$ de $F(u, v)$ dans l'hypothèse où du, dv sont constants (69). On peut même prendre $dt = 1$, ce qui donne

$$du = h, \quad dv = k, \quad \varphi^n(t) = d^n\varphi(t) = d^nF(u, v),$$

pourvu qu'on ait soin, dans le développement de $d^nF(u, v)$, de remplacer du par h et dv par k.

Observons d'ailleurs que $F(u, v)$ se déduit de $F(x, y)$ en remplaçant x et y par u et v, et que, par suite, $d^nF(u, v)$ ou $\varphi^n(t)$ s'obtiendra en remplaçant, dans $d^nF(x, y)$, x par u, y par v, dx par h et dy par k. Faisant ensuite $t = 0$, pour calculer les coefficients de l'équation (1), u, v se réduisent respectivement à x, y; donc

$$\varphi^n(0) = d^nF(x, y),$$

où $dx = h$, $dy = k$. De même, θ étant compris entre 0 et 1,

$$R_n = \frac{t^n}{1\cdot 2\cdots n}\varphi^n(\theta t) = \frac{t^n}{1\cdot 2\cdots n}\left[d^n F(x, y)\right]_{x+\theta ht,\, y+\theta kt},$$

les indices signifiant que, dans le développement de $d^n F$, on doit remplacer x par $x + \theta ht$, y par $y + \theta kt$.

Substituant ces résultats dans l'équation (1), faisant $t = 1$, et observant que l'on a $\varphi(1) = F(x + h, y + k)$, on trouve la formule suivante :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &F(x+h, y+k) = F(x, y) + dF(x, y) + \frac{d^2F(x, y)}{1\cdot 2} + \cdots \\ &\quad + \frac{d^{n-1}F(x, y)}{1\cdot 2\cdots(n-1)} + \frac{1}{1\cdot 2\cdots n}\left[d^n F(x, y)\right]_{x+\theta h,\, y+\theta k}, \end{aligned}\right.$$

où il est entendu que l'on remplace dx, dy par h, k, après le développement des différentielles indiquées.

Cette formule, reposant sur l'équation (1), suppose que $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$,..., $\varphi^n(t)$ soient fonctions continues de t depuis $t = 0$ jusqu'à $t = 1$; c'est-à-dire que la fonction $F(x, y)$ et ses différentielles, jusqu'à l'ordre n inclusivement, soient fonctions continues des variables depuis x jusqu'à $x + h$, depuis y jusqu'à $y + k$. Si cette condition ne cesse pas d'être réalisée, et si le reste R_n tend vers zéro, lorsque n devient infini, la formule (2) donne le développement de $F(x+h, y+k)$ en série indéfinie suivant les puissances ascendantes de h et de k.

117. La formule correspondante au théorème de Maclaurin se déduit immédiatement de l'équation (2), en supposant que x, y se réduisent à zéro, et en remplaçant les lettres h, k par x, y. Il vient ainsi

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &F(x, y) = F(0, 0) + [dF(x, y)]_0 + \frac{1}{1\cdot 2}[d^2F(x, y)]_0 + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{1\cdot 2\cdots(n-1)}[d^{n-1}F(x, y)]_0 + \frac{1}{1\cdot 2\cdots n}\left[d^n F(x, y)\right]_{\theta x,\, \theta y}, \end{aligned}\right.$$

en marquant par l'indice 0 les différentielles où x et y doivent être supposés nuls, et en se rappelant que, dans le second membre de l'équation (3), on doit remplacer dx par x et dy par y, après le développement des différentielles.

118. Les formules (2) et (3) sont les plus faciles à retenir et à appliquer ; on les présente souvent sous une autre forme en développant les

différentielles indiquées, ce qui n'offre aucune difficulté d'après la relation (69)

$$d^nF(x, y) = (d_x + d_y)^n F(x, y).$$

Si l'on fait ensuite les changements indiqués pour les formules (2) et (3), elles deviennent respectivement

$$(4)\left\{\begin{aligned} &F(x+h, y+k) = F(x, y) + \left(\frac{dF}{dx}h + \frac{dF}{dy}k\right) + \frac{1}{1\cdot 2}\left(\frac{d^2F}{dx^2}h^2 + 2\frac{d^2F}{dxdy}hk + \frac{d^2F}{dy^2}k^2\right) \\ &\cdots + \frac{1}{1\cdot 2\cdots(n-1)}\left[\frac{d^{n-1}F}{dx^{n-1}}h^{n-1} + (n-1)\frac{d^{n-1}F}{dx^{n-2}dy}h^{n-2}k + \cdots + \frac{d^{n-1}F}{dy^{n-1}}k^{n-1}\right] \\ &+ \frac{1}{1\cdot 2\cdots n}\left[\frac{d^nF}{dx^n}h^n + n\frac{d^nF}{dx^{n-1}dy}h^{n-1}k + \cdots + \frac{d^nF}{dy^n}k^n\right]_{x+\theta h,\, y+\theta k}. \end{aligned}\right.$$

$$(5)\left\{\begin{aligned} &F(x, y) = F(0, 0) + x\left(\frac{dF}{dx}\right)_0 + y\left(\frac{dF}{dy}\right)_0 + \frac{1}{1\cdot 2}\left[x^2\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)_0 + 2xy\left(\frac{d^2F}{dxdy}\right)_0 + y^2\left(\frac{d^2F}{dy^2}\right)_0\right] \\ &\cdots + \frac{1}{1\cdot 2\cdots(n-1)}\left[x^{n-1}\left(\frac{d^{n-1}F}{dx^{n-1}}\right)_0 + (n-1)x^{n-2}y\left(\frac{d^{n-1}F}{dx^{n-2}dy}\right)_0 + \cdots + y^{n-1}\left(\frac{d^{n-1}F}{dy^{n-1}}\right)_0\right] \\ &+ \frac{1}{1\cdot 2\cdots n}\left[x^n\left(\frac{d^nF}{dx^n}\right)_\theta + nx^{n-1}y\left(\frac{d^nF}{dx^{n-1}dy}\right)_\theta + \cdots + y^n\left(\frac{d^nF}{dy^n}\right)_\theta\right]. \end{aligned}\right.$$

Dans l'équation (5), l'indice θ marque que l'on doit remplacer x par θx, y par θy, dans les dérivées qui en sont affectées.

On démontrerait, par le même procédé, des formules analogues pour le développement des fonctions de trois, quatre,... variables.

Exercices.

1. Développer $x \sin y + y \sin x$ suivant les puissances de x et de y.

R. On a

$$[d^n(x \sin y + y \sin x)]_0 = n \sin\frac{n-1}{2}\pi \cdot (dx^{n-2} + dy^{n-2})\, dxdy\,;$$

on constate sans peine que R_n a pour limite zéro, et l'on obtient

$$x \sin y + y \sin x = xy\left[2 - \frac{x^2+y^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4+y^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{x^6+y^6}{1\cdot 2\cdots 7} + \cdots\right].$$

2. Développer

$$\text{arc tg}\,\frac{y+k}{x+h},$$

suivant les puissances de h et de k.

L'expression de la différentielle $n^{ième}$ a été donnée (ch. VI, ex. 5). On en déduit, en posant $\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} = u$,

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{y+k}{x+h} = u - \frac{h\sin u - k\sin\left(u+\frac{\pi}{2}\right)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2}\,\frac{h^2\sin 2u - 2hk\sin\left(2u+\frac{\pi}{2}\right) + k^2\sin\left(2u+\frac{2\pi}{2}\right)}{(x^2+y^2)^{\frac{2}{2}}}$$

$$-\frac{1}{3}\,\frac{h^3\sin 3u - 3h^2k\sin\left(3u+\frac{\pi}{2}\right) + 3hk^2\sin\left(3u+\frac{2\pi}{2}\right) - k^3\sin\left(3u+\frac{3\pi}{2}\right)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \cdots\cdots$$

Pour reconnaître si R_n tend vers zéro, on met, à l'aide des exponentielles imaginaires et en posant $\frac{h}{k} = \operatorname{tg}\varphi$, $d^n \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$ sous la forme

$$(-1)^n\, 1\cdot 2\cdots(n-1)\left(\frac{h^2+k^2}{x^2+y^2}\right)^{\frac{n}{2}} \sin n(u-\varphi),$$

et l'on s'assure que l'exactitude de la série précédente suppose seulement

$$h^2+k^2 \leqq (x+\theta h)^2 + (y+\theta k)^2.$$

2. Soit $F(x, y, z, \ldots)$ une fonction homogène de degré m des variables x, y, z : on a donc, α étant quelconque,

$$F(x+\alpha x,\ y+\alpha y,\ z+\alpha z,\ldots) = (1+\alpha)^m F(x, y, z,\ldots).$$

Développant le premier membre suivant les puissances de αx, αy, αz, ... par la formule (4), et $(1+\alpha)^m$ par la formule du binôme, puis égalant les coefficients des mêmes puissances de α dans les deux membres, on trouve

$$x\frac{dF}{dx} + y\frac{dF}{dy} + z\frac{dF}{dz} + \cdots = mF(x, y, z);$$

$$\left(x\frac{d}{dx} + y\frac{d}{dy} + z\frac{d}{dz}\right)^2 F = m(m-1)\,F(x, y, z);$$

. . . .

$$\left(x\frac{d}{dx} + y\frac{d}{dy} + z\frac{d}{dz}\right)^p F = \frac{m(m-1)\cdots(m-p+1)}{1\cdot 2\cdots p}\,F(x, y, z).$$

La première de ces égalités a été donnée (chap. III, ex. 19).

LIVRE TROISIÈME.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

CHAPITRE XIII.

TANGENTES ET NORMALES AUX COURBES PLANES.

§ 1. COORDONNÉES RECTILIGNES.

119. On a vu (18) que la limite de la sécante, menée par un point donné M d'une courbe et par un point infiniment voisin M', se nomme la *tangente* à la courbe au point M; son coefficient angulaire τ est déterminé par l'équation

$$\tau = lim\,\frac{k}{h},$$

h, k étant les accroissements infiniment petits de l'abscisse et de l'ordonnée quand on passe du point M au point M'.

Soient (x, y) les coordonnées rectangulaires ou obliques du point de contact M, (ξ, η) les coordonnées courantes de la tangente : on aura donc

$$\tau = lim\,\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx},$$

et l'équation de la tangente au point (x, y) sera

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x).$$

L'équation de la courbe donnera l'expression de dy, où l'on attribuera à x, y les valeurs qui conviennent au point M, et la tangente sera ainsi connue. La dérivée de y ayant généralement une valeur déterminée et

unique (40), il en résulte une direction déterminée de la tangente en chaque point, ce qui n'exclut pas la possibilité, en certains points particuliers, d'une tangente multiple ou indéterminée.

L'équation de la courbe étant ordinairement sous la forme

$$F(x, y) = 0,$$

on en déduit

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy = 0;$$

tirant de là la valeur de dy pour la porter dans l'équation de la tangente, on a

$$(\xi - x)\frac{dF}{dx} + (\eta - y)\frac{dF}{dy} = 0.$$

Il suffit donc de différentier l'équation $F = 0$, et de remplacer dx par $\xi - x$, dy par $\eta - y$; on aura l'équation de la tangente à la courbe.

120. La *normale*, en un point d'une courbe, est la perpendiculaire à la tangente. Supposons les axes coordonnés rectangulaires : le coefficient angulaire de la normale sera $-\frac{1}{\tau}$, et comme elle passe par le point (x, y), son équation sera

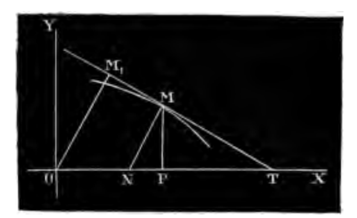
$$\eta - y = -\frac{dx}{dy}(\xi - x).$$

On peut aussi lui donner la forme suivante, en tirant de l'équation $F(x, y) = 0$ l'expression de $\frac{dx}{dy}$:

$$(\xi - x)\frac{dF}{dy} - (\eta - y)\frac{dF}{dx} = 0.$$

Si les axes étaient obliques, l'équation se compliquerait.

121. On nomme *sous-tangente* la distance du pied P de l'ordonnée au point T où la tangente coupe l'axe des x, cette distance étant *positive* à droite, *négative* à gauche du point P. La *sous-normale* est, de même, la distance du point P au point N où la normale coupe l'axe des x. D'après ces définitions, on aura les expressions de la sous-tangente et de la sous-normale, en grandeur et en signe, en tirant des équations de la tangente et



de la normale les valeurs de $\xi - x$ dans l'hypothèse $\eta = 0$, qui appartient aux points où ces droites coupent l'axe des x : en les désignant respectivement par S_t, S_n, on trouvera

$$S_t = -y\frac{dx}{dy}, \qquad S_n = y\frac{dy}{dx}.$$

On nomme *longueurs de la tangente* et *de la normale* les portions de ces droites comprises entre le point de contact M, et l'axe des x. Les triangles rectangles MPT, MPN donnent pour leurs expressions

$$T = \sqrt{y^2 + S_t^2}, \qquad N = \sqrt{y^2 + S_n^2},$$

ou

$$T = y\sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}, \qquad N = y\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

On donnera au radical le signe qui convient pour obtenir un résultat positif.

Enfin, l'on a souvent besoin de déterminer la distance P de l'origine à la tangente, ainsi que le point $M_1(x_1, y_1)$ où tombe cette perpendiculaire. L'expression connue de la distance de l'origine à une droite dont l'équation est donnée, conduit aux formules

$$P = \frac{xdy - ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}, \qquad P = \frac{x\frac{dF}{dx} + y\frac{dF}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2}}.$$

Le point (x_1, y_1) est à la fois sur la tangente, et sur la droite qui a pour équation

$$\frac{\eta}{\xi} = -\frac{dx}{dy}$$

(perpendiculaire à la tangente menée par l'origine) : il est donc donné par les équations

$$\left\{\begin{aligned} (y_1 - y)\,dx - (x_1 - x)\,dy &= 0, \\ x_1 dx + y_1 dy &= 0. \end{aligned}\right.$$

En éliminant x et y entre ces équations et celle de la courbe donnée, on aura l'équation du lieu géométrique du point M_1, ou de la *podaire* de la courbe par rapport au point O.

122. Appliquons ces formules à quelques exemples :

1. *Ellipse :* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad a^2-b^2=c^2.$

Équation de la tangente : $\frac{\xi x}{a^2}+\frac{\eta y}{b^2}=1.$

Normale : $\frac{a^2}{x}\xi-\frac{b^2}{y}\eta=c^2.$

$$S_t=\frac{a^2-x^2}{x}, \quad S_n=-\frac{b^2}{a^2}x, \quad T=\frac{a^2y}{x}\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}},$$

$$N=b^2\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}}, \quad P=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}}}, \quad P\cdot N=b^2.$$

2. *Hyperbole :* $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad c^2=a^2+b^2.$

Changer simplement b^2 en $-b^2$ dans les formules de l'ellipse.

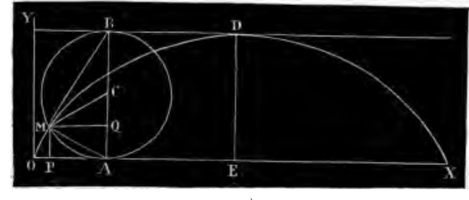
3. *Parabole :* $y^2=2px.$

Tangente : $\eta y=p(\xi+x)$. — Normale : $(\xi-x)y+(\eta-y)p=0.$

$S_t=-\frac{y^2}{p}$; $S_n=p$, constante; $T=\sqrt{2x(p+2x)}$, $N=\sqrt{p(p+2x)}$.

4. *Logarithmique :* $y=ae^{mx}$, $S_t=-\frac{1}{m}=const...$

5. *Cycloïde.* — Un cercle roule, *sans glisser*, sur une droite indéfinie OX : un point de la circonférence du cercle décrit la *cycloïde*. L'origine étant au point O, où le point décrivant coïncide avec le point de contact du cercle générateur et de la droite fixe, les axes OX et OY étant rectangulaires, soient C le centre, A le point de contact du cercle dans une position quelconque, M le point décrivant, $AC=a$, l'angle $ACM=\omega$. Abaissant MP, MQ perpendiculaires sur OX et sur le diamètre AB; observant que, par la condition qui régit le roulement du cercle, la longueur OA est égale à l'arc de cercle AM, on aura



$$OA=a\omega, \quad AP=MQ=a\sin\omega, \quad AC=a, \quad CQ=a\cos\omega,$$

AP étant positif ou négatif selon que P est à gauche ou à droite de A, CQ étant positif ou négatif selon que Q est en dessous ou au-dessus de C. On a, dans cette hypothèse,

$$x = \text{OP} = \text{OA} - \text{AP}, \qquad y = \text{MP} = \text{AQ} = \text{AC} - \text{CQ},$$

ou

$$\begin{cases} x = a(\omega - \sin\omega), \\ y = a(1 - \cos\omega). \end{cases}$$

On peut éliminer ω et obtenir l'équation de la cycloïde sous la forme

$$x = a \operatorname{arc\,cos} \frac{a-y}{a} \mp \sqrt{2ay - y^2};$$

mais il vaut mieux conserver les coordonnées x, y exprimées en fonction de l'angle variable ω.

La discussion de la courbe n'offre pas de difficulté : elle se compose, l'angle ω variant de 0 à ∞, d'une infinité d'*arcades* égales, contigues, ayant pour base une longueur $2\pi a$ égale à la circonférence du cercle générateur, et pour ordonnée maximum le diamètre $2a$ de ce cercle. On peut donc se borner à faire varier ω de 0 à 2π, ce qui donnera une seule arcade.

On tire des équations de la courbe

$$dx = a(1 - \cos\omega)\,d\omega, \qquad dy = a \sin\omega d\omega,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\omega}{1 - \cos\omega}, \qquad S_n = y\frac{dy}{dx} = a\sin\omega = \text{AP},$$

donc *la normale* MA *passe par le point de contact du cercle générateur*, et la tangente est MB.

Exercices.

1. Sous-tangente de la courbe qui a pour équation

$$x = e^{\frac{x-y}{y}} \quad \text{ou} \quad y = \frac{x}{1 + \text{l}.x}.$$

$$S_t = -\frac{x^2}{x-y} = -\frac{x(1+\text{l}.x)}{\text{l}.x}.$$

2. Mesurer la portion de la tangente à la courbe

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

comprise entre les axes. R. Cette longueur est a.

3. Trois droites fixes étant données par leurs équations $x\cos\alpha + y\sin\alpha - \delta = 0$, $x\cos\beta + y\sin\beta - \delta' = 0$, $x\cos\gamma + y\sin\gamma - \delta'' = 0$, les distances p, q, r d'un point quelconque du plan à ces trois droites respectivement, sont représentées par les premiers membres de ces équations, où (x, y) désignent alors les coordonnées du point. Toute

courbe peut être représentée par une équation entre les rapports $\frac{p}{r}$, $\frac{q}{r}$ des distances d'un point quelconque de cette courbe, aux droites fixes; ou bien par une équation *homogène*

$$f(p, q, r) = 0$$

entre ces distances. Trouver l'équation de la tangente dans ce système de coordonnées trilinéaires?

Concevons que l'on mette pour p, q, r leurs valeurs en (x, y) dans l'équation de la courbe : l'équation de la tangente sera

$$(\xi - x)\frac{df}{dx} + (\eta - y)\frac{df}{dy} = 0,$$

et l'on a

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dp}\cos\alpha + \frac{df}{dq}\cos\beta + \frac{df}{dr}\cos\gamma, \quad \frac{df}{dy} = \frac{df}{dp}\sin\alpha + \cdots,$$

d'où l'on tire pour l'équation de la tangente

$$(\xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha)\frac{df}{dp} + (\xi\cos\beta + \eta\sin\beta)\frac{df}{dq} + \cdots = (x\cos\alpha + y\sin\alpha)\frac{df}{dp} + \cdots$$

Ajoutant aux deux membres les termes $-\delta\frac{df}{dp}$, $-\delta'\frac{df}{dq}, \ldots$, et désignant par

$$P = \xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha - \delta,$$
$$Q = \xi\cos\beta + \eta\sin\beta - \delta',$$
$$R = \xi\cos\gamma + \eta\sin\gamma - \delta'',$$

les coordonnées trilinéaires d'un point quelconque (ξ, η) de la tangente, on trouve

$$P\frac{df}{dp} + Q\frac{df}{dq} + R\frac{df}{dr} = p\frac{df}{dp} + q\frac{df}{dq} + r\frac{df}{dr}.$$

Mais le second membre se réduit, d'après la propriété des fonctions homogènes, à $m f(p, q, r)$ qui est nul; donc, l'équation de la tangente cherchée est

$$P\frac{df}{dp} + Q\frac{df}{dq} + R\frac{df}{dr} = 0.$$

4. Mener la normale à la podaire d'une courbe donnée.

R. Les équations du N° 121

$$(y_1 - y)\,dx - (x_1 - x)\,dy = 0, \quad x_1 dx + y_1 dy = 0,$$

donnent par différentiation

$$dy_1 dx - dx_1 dy = (x_1 - x)\,d^2y, \quad dx_1 dx + dy_1 dy = -y_1 d^2y,$$

d'où

$$\frac{dx_1}{y - 2y_1} = \frac{dy_1}{2x_1 - x}.$$

L'équation de la normale à la courbe, lieu du point (x_1, y_1), devient par la substitution de la valeur de dx_1

$$\eta - y_1 = \frac{y - 2y_1}{x - 2x_1}(\xi - x_1);$$

cette droite passe par le point $\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$, milieu du rayon mené de l'origine au point M de la courbe primitive.

5. Trouver la podaire de la courbe qui a pour équation

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m = 1,$$

par rapport à l'origine.

R. L'équation de la podaire est

$$(ax_1)^{\frac{m}{m-1}} + (by_1)^{\frac{m}{m-1}} = (x_1^2 + y_1^2)^{\frac{m}{m-1}}.$$

Dans le cas de la courbe de l'exemple 2, $a = b$ et $m = \frac{2}{3}$; on a donc

$$(x_1^2 + y_1^2)^3 = a^2 x_1^2 y_1^2.$$

Dans l'hyperbole équilatère, $b = a\sqrt{-1}$, $m = 2$: la podaire de cette courbe, par rapport à son centre, a donc pour équation

$$(x_1^2 + y_1^2)^2 + a^2(y_1^2 - x_1^2) = 0;$$

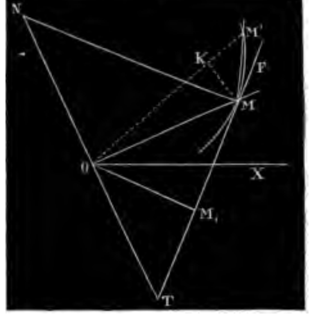
cette courbe est la *lemniscate de Bernoulli.*

§ 2. COORDONNÉES POLAIRES.

123. On détermine aussi la tangente en un point M d'une courbe, rapportée à des coordonnées polaires. Soient O le pôle, OX l'axe polaire; $\theta = \text{XOM}$, $r = \text{OM}$ les coordonnées du point M; et

$$r = f(\theta)$$

l'équation de la courbe. L'angle μ, que fait la direction MF de la tangente, *prise du côté où* θ *augmente*, avec la direction OM *prolongée*, suffit pour déterminer la tangente.



Soient $r + \Delta r$, $\theta + \Delta\theta$ les coordonnées d'un point M' infiniment voisin de M; menons la sécante MM', le rayon OM', MK perpendiculaire sur OM'. Le triangle rectangle MKM' donne

$$\text{tg MM'K} = \frac{\text{MK}}{\text{M'K}}.$$

L'angle MM'K a pour limite l'angle μ; d'autre part, on a, en négligeant des infiniment petits d'ordre supérieur à $\Delta\theta$ (nos 28 et 36),

$$\text{MK} = r \sin \Delta\theta = r\Delta\theta, \quad \text{M'K} = \text{OM'} - \text{OK} = \text{OM'} - \text{OM} = \Delta r,$$

donc

$$\text{tg}\,\mu = lim\,\frac{r\Delta\theta}{\Delta r} = r\,\frac{d\theta}{dr}.$$

Tirant de l'équation de la courbe r, dr, en fonction de θ, $d\theta$, on aura

l'inclinaison de la tangente sur le rayon vecteur en un point quelconque de la courbe.

On appelle *sous-tangente* et *sous-normale polaires*, les distances comprises, sur une perpendiculaire au rayon vecteur menée par le pôle, entre le pôle et les points T, N respectivement, où la tangente et la normale coupent cette perpendiculaire. Les longueurs MT, MN sont celles de la *tangente* et de la *normale polaires*. Les triangles rectangles MOT, MON donnent

$$OT = S_t = r \operatorname{tg} \mu = r^2 \frac{d\theta}{dr}, \qquad ON = S_n = r \cot \mu = \frac{dr}{d\theta}.$$

$$MT = T = \sqrt{r^2 + S_t^2} = r\sqrt{1 + r^2 \frac{d\theta^2}{dr^2}}, \qquad MN = N = \sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}}.$$

On observera, pour la généralité de ces formules, que les longueurs S_t et S_n sont positives, lorsque la rotation de OM vers OT est de sens opposé au sens où θ augmente, et négatives dans le cas contraire.

La perpendiculaire OM_1, abaissée du pôle sur la tangente, a pour expression

$$P = r \sin \mu = \frac{r^2 d\theta}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}}.$$

Si l'on désigne par r_1, θ_1 les coordonnées du point M_1, l'équation de la podaire de la courbe donnée, par rapport au pôle O, s'obtiendra en éliminant r, θ et μ entre l'équation de la courbe et les équations

$$r_1 = r \sin \mu, \qquad \theta - \theta_1 = \frac{\pi}{2} - \mu, \qquad \operatorname{tg} \mu = r \frac{d\theta}{dr}.$$

Exercices.

1. *Spirale d'Archimède :* $r = a\theta$.

$$\operatorname{tg} \mu = \theta = \frac{r}{a}, \quad S_t = \frac{r^2}{a}, \quad S_n = a = const., \quad P = \frac{r^2}{\sqrt{a^2 + r^2}}.$$

2. *Spirale hyperbolique :* $r = \frac{a}{\theta}$.

$$\operatorname{tg} \mu = -\theta = -\frac{a}{r}; \quad S_t = -a = const., \quad S_n = -\frac{r^2}{a}, \quad T = \sqrt{a^2 + r^2}.$$

3. *Spirale logarithmique :* $r = ae^{m\theta}$.

$\operatorname{tg} \mu = \frac{1}{m}$, la courbe coupe le rayon vecteur sous un angle constant; $S_t = \frac{r}{m}$, $S_n = mr$, d'où $\frac{S_n}{S_t} = m^2$.

$$T = \frac{r}{m}\sqrt{1 + m^2}, \quad N = r\sqrt{1 + m^2}, \quad P = \frac{r}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

L'équation de la podaire est

$$r = a_1 e^{m\theta_1},$$

a_1 désignant la quantité constante

$$\frac{a}{\sqrt{1+m^2}} e^{m \operatorname{arc\,tg} m}.$$

Les points T, N, M_1 dérivent donc des spirales *semblables* à la proposée.

4. *Cardioïde :* $r = 2a(1 + \cos\theta)$.

$\operatorname{tg}\mu = -\cot\frac{\theta}{2}$, d'où $\mu = \frac{\pi+\theta}{2}$, ce qui donne une construction facile de la tangente.

$$S_t = -r\cot\frac{\theta}{2},\quad S_n = -2a\sin\theta,\quad T = \frac{r}{\sin\frac{\theta}{2}},\quad N = \frac{r}{\cos\frac{\theta}{2}}.$$

L'équation de la podaire est

$$r_1 = 4a\cos^3\frac{\theta_1}{3}.$$

5. *L'hyperbole équilatère :* $r^2\cos 2\theta = a^2$.

$$\operatorname{tg}\mu = \cot 2\theta,\quad \frac{\pi}{2} - \mu = 2\theta \pm i\pi;$$

l'axe polaire est également incliné sur le rayon vecteur et sur la normale à la courbe.

Pour trouver la podaire par rapport au pôle, on a

$$r_1^2 = r^2\sin^2\mu = \frac{a^2}{\cos 2\theta}\cos^2 2\theta = a^2\cos 2\theta,\quad \theta_1 = -\theta \pm i\pi,$$

d'où

$$r_1^2 = a^2\cos 2\theta_1.$$

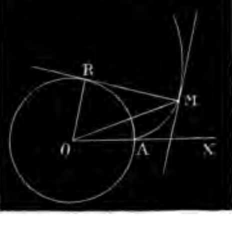
Cette courbe est la *lemniscate de Bernoulli.*

Si on lui applique les formules générales, on trouve

$$\operatorname{tg}\mu = -\cot 2\theta_1,\quad \mu = \frac{\pi}{2} + 2\theta_1,$$

ce qui donne le moyen de construire facilement la tangente.

6. *La développante du cercle.* — Cette courbe se construit en portant sur la tangente au cercle, à partir du point de contact R, une longueur RM égale à l'arc de cercle compté d'une origine fixe A jusqu'au point de contact.



Désignons par ω l'angle AOR ; par (r, θ) les coordonnées du point M : les équations de la développante seront

$$r^2 = a^2(1+\omega^2),\quad \theta = \omega - \operatorname{arc\,tg}\omega.$$

On trouve

$$\operatorname{tg}\mu = \omega = \operatorname{tg}(\omega - \theta),$$

ce qui fait voir que la tangente à la courbe est parallèle au rayon OR, et que la normale est MR.

CHAPITRE XIV.

THÉORIE DES ASYMPTOTES.

124. On appelle *asymptote* d'une branche de courbe infinie une droite telle, que la distance à cette droite d'un point qui s'éloigne indéfiniment sur la branche de courbe, a pour limite zéro.

On considère aussi des asymptotes curvilignes dont nous ne parlerons pas ici.

Si la branche infinie admet une asymptote non parallèle à l'axe des y, l'équation de cette droite sera de la forme

$$y = kx + l;$$

et comme la différence entre les ordonnées de la courbe et de l'asymptote, pour un même x, a pour limite zéro lorsque le point M s'éloigne à l'infini, en vertu de la définition ci-dessus, il s'ensuit que l'équation de la branche infinie doit pouvoir être mise sous la forme

$$y = kx + l + \mathrm{V},$$

V désignant une fonction de x qui tend vers zéro, x croissant indéfiniment.

On a donc

$$\frac{y}{x} = k + \frac{l + \mathrm{V}}{x},$$

et par suite, x croissant indéfiniment,

$$\lim \frac{y}{x} = k.$$

Puis, en vertu de la même équation,

$$y - kx = l + \mathrm{V}, \qquad \lim (y - kx) = l,$$

V devenant nul pour x infini; les valeurs de $\frac{y}{x}$ et de $y - kx$ tirées de l'équation de la branche infinie, donneront donc, à la limite, les coefficients k et l, et par suite l'équation de l'asymptote.

Réciproquement, si l'équation de la branche infinie conduit, par ce calcul, à des valeurs déterminées et finies de k et l, la branche a une asymptote

$$y = kx + l.$$

En effet, les coordonnées x et y de la branche infinie satisfont à la condition $\lim(y-kx)=l$, d'où

$$y-kx=l+V,$$

V tendant vers zéro lorsque x devient infini; donc l'équation de cette branche peut être mise sous la forme

$$y=kx+l+V,$$

ce qui montre que la courbe s'approche indéfiniment de la droite qui a pour équation $y=kx+l$.

Il faut observer que la branche infinie peut s'étendre vers les x positifs ou vers les x négatifs, et que, pour trouver l'asymptote, il faudra, dans le premier cas, faire $x=+\infty$; dans le second, faire $x=-\infty$

125. La méthode précédente ne s'applique pas aux asymptotes parallèles à l'axe des y; mais comme l'ordonnée de la branche infinie doit croître indéfiniment, à mesure que la courbe se rapproche de son asymptote, il est clair que, si $x=a$ est l'équation de cette droite, y deviendra infini lorsque x tendra vers la limite a. On trouvera donc ces asymptotes en cherchant les valeurs de x qui rendent y infini dans l'équation de la courbe.

126. Si l'équation de la courbe est algébrique, on y posera $y=ux$, et l'on divisera toute l'équation par la plus haute puissance de x qu'elle renferme, ce qui donnera un résultat de la forme

$$(1) \qquad f(u)+\frac{1}{x}f_1(u)+\frac{1}{x^2}f_2(u)+\cdots=0.$$

Le rapport $\frac{y}{x}$ ou u tendant vers une limite finie k quand x devient infini, on a

$$\lim f(u)=f(k)=0,$$

et les racines réelles de cette équation feront connaître les valeurs de k qui répondent aux asymptotes. On posera ensuite dans l'équation (1)

$$u=k+\frac{t}{x},$$

et l'on développera $f(u)$, $f_1(u)$,... suivant les puissances ascendantes de $\frac{t}{x}$ par la formule de Taylor. Le terme indépendant de ce facteur s'annule en raison de l'équation $f(k)=0$; multipliant toute l'équation par x, fai-

sant $x = \pm \infty$, remplaçant $t = y - kx$ par sa limite l, on obtient une équation qui détermine l en fonction de k, et fait connaître, pour chacune des valeurs trouvées pour k, le coefficient l correspondant.

Soit, comme exemple, la courbe qui a pour équation

$$xy^2 + 5x^2y + 4x^3 + xy - 9 = 0.$$

L'équation, résolue par rapport à y, donne $y = \pm \infty$ pour $x = 0$: l'axe des y est donc une asymptote dans les deux sens. Remplaçant y par ux et divisant par x^3, on a

$$u^2 + 5u + 4 + \frac{u}{x} - \frac{9}{x^3} = 0;$$

les deux derniers termes devenant nuls pour $x = \infty$, l'équation en k sera

$$k^2 + 5k + 4 = 0,$$

et donnera les valeurs réelles $k = -1$, $k = -4$.

Remplaçant ensuite u par $k + \frac{t}{x}$ dans l'équation ci-dessus, on a

$$\left(k + \frac{t}{x}\right)^2 + 5\left(k + \frac{t}{x}\right) + 4 + \frac{k}{x} + \frac{t}{x^2} - \frac{9}{x^3} = 0,$$

et en supprimant le terme $k^2 + 5k + 4$ qui est nul, puis multipliant par x,

$$2kt + 5t + k + \frac{t^2 + t}{x} - \frac{9}{x^2} = 0;$$

ou bien, en remplaçant chaque terme par sa limite,

$$(2k + 5)\,l + k = 0, \qquad l = -\frac{k}{2k + 5}.$$

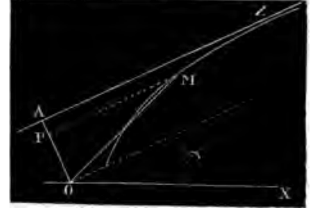
On trouvera donc, pour $k = -1$, $l = \frac{1}{3}$; pour $k = -4$, $l = -\frac{4}{3}$, et l'on conclura enfin que la courbe admet trois asymptotes qui ont respectivement pour équations

$$x = 0, \qquad y = -x + \frac{1}{3}, \qquad y = -4x - \frac{4}{3}.$$

Dans les courbes transcendantes dont l'équation ne serait pas réductible à la forme (1), on procèdera directement à la recherche des limites de u et de $y - kx$.

127. Considérons maintenant une courbe dont l'équation est donnée en coordonnées polaires, et qui admet une branche infinie pourvue d'une

asymptote AZ. Abaissons OA perpendiculaire sur AZ, MP perpendiculaire sur OA; la distance AP du point M à l'asymptote ayant pour limite zéro quand le point M s'éloigne à l'infini sur la courbe, on a



$$lim\, OP = lim\,(OM \sin OMP) = OA,$$

et comme OM tend vers l'infini, il faut que sin OMP tende vers zéro. *La direction du rayon vecteur* OM, *à la limite, est donc parallèle à l'asymptote.*

Soient donc (r, θ) les coordonnées polaires du point M, α l'angle que fait AZ avec l'axe polaire OX, δ la distance OA du pôle à l'asymptote. On aura d'abord, r croissant indéfiniment,

$$lim\,\theta = \alpha,$$

ce qui fera connaître la direction de l'asymptote; ensuite, l'angle OMP étant égal à $\theta - \alpha$,

$$\delta = lim\,[r \sin(\theta - \alpha)] = lim\,[r(\theta - \alpha)].$$

Connaissant la direction de l'asymptote et sa distance au pôle, on pourra construire cette droite.

Exemple. L'hyperbole rapportée à l'un de ses foyers a pour équation

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos\theta}.$$

Les valeurs de θ qui rendent r infini sont données par l'équation $1 - \varepsilon \cos\theta = 0$; on a donc

$$\cos\alpha = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Ensuite

$$lim\,[r(\theta - \alpha)] = lim\,\frac{p(\theta - \alpha)}{1 - \varepsilon\cos\theta} = p\, lim\,\frac{\theta - \alpha}{1 - \varepsilon\cos\theta} = \frac{p}{\varepsilon \sin\alpha}.$$

Donc

$$\delta = \pm \frac{p}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}.$$

Les demi-axes de l'hyperbole étant a, $b\sqrt{-1}$, on sait que

$$p = \frac{b^2}{a}, \qquad \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a};$$

les asymptotes se construiront donc au moyen des équations

$$a \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \delta = b,$$

qui détermineront deux droites également inclinées de part et d'autre de l'axe polaire.

Exercices.

1. *Courbes du second ordre :*

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0.$$

Si $b^2 - 4ac > 0$,

$$k = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad l = -\frac{dk + e}{2ak + b}.$$

La courbe est une hyperbole, et il y a deux asymptotes.

2. $y^3 - 3axy + x^3 = 0$.

Une asymptote dont l'équation est

$$y = -x - a.$$

3. $xy^2 + 4x^2y + 30xy + 24y + 57x + 20 = 0$.

Trois asymptotes :

$$x = 0; \qquad y = 0; \qquad y = -4x - 30.$$

4. $xy^2 - x + 2y - 1 = 0$.

Trois asymptotes :

$$x = 0; \qquad y = +1; \qquad y = -1.$$

5. $y^3 + x^3 + \sin \frac{y}{x} = 0$. — Une asymptote : $y = -x$.

6. $y = ae^{mx}$. — Une asymptote : $y = 0$.

7. $xy = \sin x$. — Une asymptote : $y = 0$.

8. $y = \operatorname{tg} x$. — Une infinité d'asymptotes parallèles à l'axe des y, et comprises da l'équation

$$x = (2i + 1)\frac{\pi}{2},$$

i étant entier, positif ou négatif.

9. *Spirale hyperbolique :* $\qquad r = \frac{a}{\theta}$.

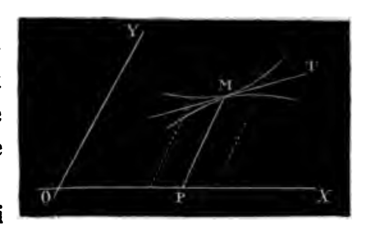
Une asymptote, parallèle à l'axe polaire, et située à une distance a du pôle *au-dess* de l'axe.

CHAPITRE XV.

ANALYSE DES COURBES PLANES.

§ 1. DU SENS DE LA CONCAVITÉ.

128. Supposons qu'en un point M d'une courbe, la tangente ne soit pas parallèle à l'axe des ordonnées. Si, dans le voisinage du point M, la courbe est constamment du côté de la tangente où se trouve la partie indéfinie de l'axe des y positifs, on dit que la courbe, au point M, tourne sa *concavité* vers les y positifs. Si, au contraire, les points de la courbe infiniment voisins du point M sont, par rapport à la tangente en M, du même côté que l'axe des y négatifs, on dit que la courbe tourne sa concavité vers les y négatifs.



Pour fixer les caractères analytiques qui distinguent ces deux cas l'un de l'autre, on observe que, dans le premier cas, la différence δ entre l'ordonnée de la courbe et celle de la tangente en M est *positive* pour les points infiniment voisins de M, tandis qu'elle est *négative* dans le second. Or, soient (x, y) les coordonnées du point M, $y = f(x)$ l'équation de la courbe; l'ordonnée correspondante à l'abscisse $x+h$, h étant infiniment petit et de signe quelconque, aura pour valeur

$$y' = f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x+\theta h).$$

L'équation de la tangente en M

$$\eta - y = f'(x)(\xi - x)$$

donne, pour l'ordonnée de cette tangente qui répond à $\xi = x + h$,

$$\eta = f(x) + hf'(x),$$

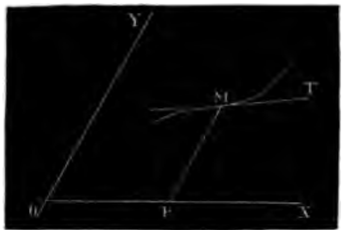
donc

$$\delta = y' - \eta = \frac{h^2}{2} f''(x+\theta h).$$

Si $f''(x)$ n'est pas nul, $f''(x+\theta h)$ sera de même signe que $f''(x)$ à cause de la continuité, et comme $\frac{1}{2}h^2$ est positif, le signe de δ, quel que soit

le signe de h, sera celui de $f''(x)$ ou $\frac{d^2y}{dx^2}\cdot$ *La courbe tourne donc sa concavité vers les y positifs ou vers les y négatifs, en un point donné, selon que la dérivée $\frac{d^2y}{dx^2}$ a le signe $+$ ou le signe $-$ en ce point.*

129. Si δ changeait de signe en même temps que h, en un point particulier de la courbe, la courbe, en ce point, traverserait sa tangente : ce serait un *point d'inflexion*. D'après ce qui précède, cela ne peut avoir lieu que si $f''(x)$ est nul. *On trouvera donc les points d'inflexion de la courbe en cherchant les points dont les coordonnées vérifient l'équation*



$$\frac{d^2y}{dx^2}=0.$$

Il faudra, toutefois, que la dérivée troisième ne s'annule pas en même temps, car δ serait alors de même signe que $f^{\text{IV}}(x)$ quel que soit le signe de h, et la courbe ne traverserait pas sa tangente ; et ainsi de suite.

On remarquera encore que cette théorie, s'appuyant sur le développement de l'ordonnée de la courbe par la formule de Taylor, suppose que $f'(x)$, $f''(x)$ soient des fonctions continues de x dans le voisinage du point (x, y). Il pourra donc y avoir des points d'inflexion non compris dans l'équation ci-dessus : on les trouvera en cherchant les valeurs de x qui rendent infinie la première ou la seconde dérivée de y, et en s'assurant si d^2y change de signe (128) lorsque x passe par ces valeurs.

Exercices.

Points d'inflexion des courbes suivantes :

1. $y=3x^5-50x^4+110x^3-180x^2+mx+n$.

R. $x=1$; $x=2$; $x=3$.

2. $y=\sin^3 x$. R. Une infinité de points d'inflexion qui répondent à

$x=i\pi$, $y=0$, $\operatorname{tg} x=\pm\sqrt{2}$.

3. $x^4-a^2x^2+a^3y=0$. R. Deux points d'inflexion :

$x=\frac{a}{\sqrt{6}}$, $y=\frac{5a}{36}$; $x=-\frac{a}{\sqrt{6}}$, $y=\frac{5a}{36}$.

4. $xy^2+4a^2x-8a^3=0$. R. Deux points d'inflexion :

$x=a$, $y=\pm 2a$.

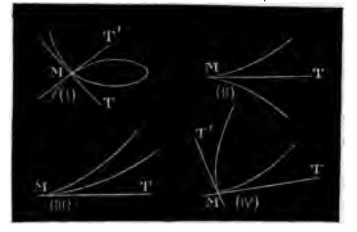
5. $x^3 + y^3 = a^3$. R. Deux points d'inflexion :
$x = 0, \quad y = a; \quad x = a, \quad y = 0.$

6. $y = a + x^{\frac{5}{3}}$. R. $x = 0$, $y = a$ est un point d'inflexion où l'on a
$$\frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \infty.$$

§ 2. DES POINTS SINGULIERS.

120. On nomme *points singuliers* ceux où la courbe présente quelque particularité qui distingue ces points de tous les autres.

Généralement, la courbe admet en chaque point, tel que M, une tangente unique, et les deux arcs qui partent du point M sont du même côté de la tangente, mais de part et d'autre de la normale en M, sauf quand le point M est un point d'inflexion, car alors la courbe traverse sa tangente.



Un point *conjugué* est un point isolé dont les coordonnées vérifient l'équation de la courbe; un *point multiple* (I) est celui où se croisent deux ou plusieurs branches de la courbe, qui n'ont pas généralement même tangente en ce point; un point où s'arrêtent deux branches de courbe et où elles ont même tangente, se nomme un *point de rebroussement :* il est de *première* ou de *seconde espèce* selon que les deux branches ne sont pas, ou sont du même côté de la tangente commune (II, III).

Un *point saillant* (IV) est celui où s'arrêtent deux branches de courbe qui n'ont pas même tangente.

Enfin, lorsqu'une branche de courbe simple se termine brusquement en un point, celui-ci est un *point d'arrêt.*

Nous allons exposer une méthode pour discuter la nature de la courbe dans le voisinage d'un point donné de cette courbe : cette méthode nous conduira à un théorème général, qui fournit un caractère précis pour reconnaître l'existence des points singuliers; elle nous servira ensuite à discuter complètement l'espèce de ces points.

121. Soit $F(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe rapportée à des axes rectangulaires; M un point de cette courbe; a et b ses coordonnées; $x = a + h$, $y = b + k$ celles d'un point quelconque M' du plan, *infiniment*

voisin du point M. Nous supposons que les fonctions

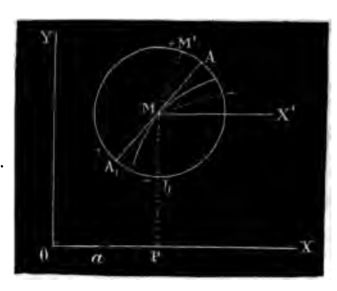
$$F(x, y), \quad \frac{dF}{dx}, \quad \frac{dF}{dy},$$

soient continues par rapport à x et à y dans le voisinage des valeurs $x = a$, $y = b$, c'est-à-dire dans le voisinage du point M. Nous avons donc

$$F(x, y) = F(a + h, b + k) = F(a, b) + \left(\frac{dF}{dx}h + \frac{dF}{dy}k\right)_{a+\theta h,\, b+\theta k},$$

d'après le théorème de Taylor.

Mais $F(a, b)$ est nul; de plus, θh, θk étant infiniment petits, les valeurs de $\frac{dF}{dx}$ et $\frac{dF}{dy}$ qui se rapportent à $x = a + \theta h$, $y = b + \theta k$, diffèrent infiniment peu, à cause de la continuité, des valeurs qui se rapportent à $x = a$, $y = b$, et que nous désignerons par $\frac{dF}{da}$, $\frac{dF}{db}$. Donc



$$F(x, y) = \left(\frac{dF}{da} + \eta\right)h + \left(\frac{dF}{db} + \eta'\right)k,$$

η, η' étant infiniment petits.

Du centre M, avec un rayon infiniment petit ρ, décrivons un cercle; le point M' étant sur ce cercle, nous aurons

$$h = \rho \cos\theta, \qquad k = \rho \sin\theta,$$

θ désignant l'angle que fait le rayon MM' avec MX' parallèle à OX. Déterminons, en outre, une quantité H, et un angle α compris entre 0 et π, qui satisfassent aux équations

$$\frac{dF}{da} = -\,\text{H} \sin\alpha, \qquad \frac{dF}{db} = \text{H} \cos\alpha,$$

ce qui donne

$$\text{H} = \pm\sqrt{\left(\frac{dF}{da}\right)^2 + \left(\frac{dF}{db}\right)^2}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = -\frac{\frac{dF}{da}}{\frac{dF}{db}}.$$

L'équation ci-dessus prendra la forme

$$F(x, y) = \rho\,[\text{H} \sin(\theta - \alpha) + \omega],$$

ω étant la quantité infiniment petite $\eta \cos\theta + \eta' \sin\theta$.

Cela posé, suivons les variations de la fonction $F(x, y)$ lorsque le point $M'(x, y)$ parcourt la circonférence du petit cercle, pour connaître les points où F s'évanouit : ceux-là seulement appartiennent à la courbe.

Nous supposerons d'abord H *différent de zéro*, ce qui aura lieu si $\frac{dF}{da}$, $\frac{dF}{db}$ ne sont pas nuls à la fois; divisant par ρH, nous aurons

$$\frac{1}{\rho H} F(x, y) = \sin(\theta - \alpha) + \frac{\omega}{H},$$

expression qui ne peut s'annuler, ω étant infiniment petit, que pour des valeurs infiniment petites de $\sin(\theta - \alpha)$, c'est-à-dire pour des valeurs de θ qui diffèrent infiniment peu de α ou de $\alpha + \pi$. Menons par le point M la droite AA_1, faisant avec MX' l'angle $X'MA = \alpha$ déterminé ci-dessus; les points, sur la circonférence, qui appartiennent à la courbe, ne peuvent donc se trouver que dans le voisinage de A et de A_1. D'ailleurs, soit ε un angle choisi aussi petit qu'on le veut, mais indépendant de ρ : lorsque θ varie depuis $\alpha - \varepsilon$ jusqu'à $\alpha + \varepsilon$, $\sin(\theta - \alpha)$ passe du négatif au positif, et comme $\frac{\omega}{H}$ est infiniment petit avec ρ, $\frac{1}{\rho H} F(x, y)$ a le même signe (35, 2°) que $\sin(\theta - \alpha)$, et passe aussi du négatif au positif. Or, cette fonction continue de l'angle θ ne peut changer de signe sans s'annuler; il y a donc un point de la courbe sur l'arc compris entre les limites $\theta = \alpha - \varepsilon$, $\theta = \alpha + \varepsilon$; et, par la même raison, il y en a ùn sur l'arc compris entre $\theta = \alpha + \pi - \varepsilon$ et $\theta = \alpha + \pi + \varepsilon$.

Chacun de ces arcs, d'ailleurs, ne renferme qu'*un seul* point, car, si la fonction $F(x, y)$ s'annulait deux fois dans l'intervalle de $\theta = \alpha - \varepsilon$ à $\theta = \alpha + \varepsilon$, sa dérivée par rapport à θ, savoir

$$\frac{dF(x, y)}{d\theta} = -\frac{dF}{dx}\rho \sin\theta + \frac{dF}{dy}\rho\cos\theta = \rho\left(-\frac{dF}{da}\sin\theta + \frac{dF}{db}\cos\theta + \omega'\right)$$
$$= \rho H\left[\cos(\theta - \alpha) + \frac{\omega'}{H}\right],$$

(ω' étant infiniment petit), s'annulerait dans le même intervalle (87), car elle est évidemment une fonction continue de l'angle θ. Or, c'est ce qui est impossible, puisque $\cos(\theta - \alpha)$ diffère très-peu de l'unité, tandis que $\frac{\omega'}{H}$ est infiniment petit. Le même raisonnement s'applique à l'intervalle $\alpha + \pi \pm \varepsilon$, $\cos(\theta - \alpha)$ étant très-voisin de -1.

La courbe est donc coupée par la circonférence de rayon ρ, en deux points seulement, l'un qui est infiniment voisin du point A, l'autre qui est infiniment voisin du point A_1 : cette conclusion subsistant pour des valeurs indéfiniment décroissantes de ρ, la suite de ces points forme évidemment

une simple ligne continue, tangente en M à la droite AA_1. De là résulte ce théorème, important pour la représentation analytique des courbes :

Si l'équation $F(x, y) = 0$ *est satisfaite par un système de valeurs* $x = a$, $y = b$, *dans le voisinage desquelles la fonction* F *et ses dérivées partielles du premier ordre sont continues par rapport à* x *et à* y ; *si, de plus, ces deux dérivées ne s'annulent pas simultanément pour* $x = a$, $y = b$, *la courbe, lieu géométrique de l'équation* $F(x, y) = 0$, *présente dans le voisinage du point* (a, b) *une ligne simple, continue, ayant une seule tangente en ce point.*

132. L'équation de cette tangente AA_1, qui fait avec OX l'angle α déterminé par l'équation

$$\operatorname{tg} \alpha = - \frac{\frac{dF}{da}}{\frac{dF}{db}},$$

est évidemment

$$(\xi - a)\frac{dF}{da} + (\eta - b)\frac{dF}{db} = 0,$$

ce qui nous ramène, par une autre voie, à l'équation connue de la tangente.

Pour reconnaître de quel côté de sa tangente la courbe est située en M, il suffira de chercher le signe de $F(x, y)$ en A et en A_1; $\sin(\theta - \alpha)$ étant nul en ces points, ce signe sera celui de la quantité ω. En développant l'expression de ω par la formule de Taylor, on trouverait une règle qui ne diffère pas, au fond, de celle que nous avons donnée plus haut pour déterminer le sens de la concavité d'une courbe.

133. Il résulte du théorème précédent que le point (a, b), qui satisfait aux conditions énoncées, ne peut être un des points singuliers définis au n° (130), et si nous faisons abstraction des points d'inflexion, nous pourrons énoncer le théorème suivant :

Pour qu'un point de la courbe qui a pour équation $F(x, y) = 0$ *soit un point singulier, il faut, ou bien que ses coordonnées rendent discontinue l'une des fonctions* $F(x, y)$, $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$; *ou bien qu'elles satisfassent à la fois aux trois équations*

$$F(x, y) = 0, \qquad \frac{dF}{dx} = 0, \qquad \frac{dF}{dy} = 0.$$

Dans une courbe algébrique, $F(x, y)$ est une fonction rationnelle et entière de x et de y : la première hypothèse ne peut se réaliser. La seconde donnera donc seule tous les points singuliers.

Admettons donc que le point (a, b) satisfasse à ces trois équations, et que l'on ait

$$F(a, b) = 0, \quad \frac{dF}{da} = 0, \quad \frac{dF}{db} = 0, \quad H = 0;$$

proposons-nous de discuter complètement la nature de ce point singulier. Pour cela, admettant la continuité des dérivées partielles successives dont on fait usage, on développera $F(a+h, b+k)$ par la formule de Taylor jusqu'aux termes d'un certain ordre; supprimant les termes qui s'annulent en vertu des conditions ci-dessus, et remplaçant h par $\rho \cos\theta$, k par $\rho \sin\theta$, on trouvera évidemment un résultat de la forme

$$F(x, y) = F(a + h, b + k) = \rho^2 f(\theta) + \rho^3 f_1(\theta) + \cdots,$$

$f(\theta)$, $f_1(\theta)$,... désignant des fonctions entières de $\sin\theta$, $\cos\theta$. On suivra ensuite, sur la circonférence du petit cercle de rayon ρ, les variations de la fonction $F(x, y)$, afin de trouver les points où elle s'évanouit, points qui appartiennent à la courbe. Cette discussion, analogue à celle que nous avons faite plus haut, repose sur ce que les termes du développement de $F(x, y)$ sont ordonnés suivant les puissances de l'infiniment petit ρ.

Nous allons appliquer ce procédé à des exemples particuliers, ce qui sera plus clair et aussi instructif qu'une théorie générale : nous remarquerons seulement que, si l'équation de la courbe est rationnelle et entière en x et en y, au lieu d'appliquer la formule de Taylor, il sera plus simple de substituer directement dans l'équation

$$x = a + \rho \cos\theta, \quad y = b + \rho \sin\theta,$$

de supprimer les termes nuls, et d'ordonner ceux qui restent suivant les les puissances ascendantes de ρ. On formera ainsi immédiatement l'expression

$$f(\theta) + \rho f_1(\theta) + \cdots$$

134. *Exemple* I. — Soit

$$F(x, y) = y^2 + a^2x^2 - x^4 = 0$$

l'équation de la courbe. On trouve

$$\frac{dF}{dx} = 2(a^2 - 2x^2)x, \quad \frac{dF}{dy} = 2y,$$

et les conditions qui caractérisent un point singulier conduisent au système

unique

$$x = 0, \qquad y = 0.$$

L'origine seule peut être un point singulier. Faisons donc, dans l'équation de la courbe, $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, divisons par ρ^2; il vient

$$(\sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta) - \rho^2 \cos^4 \theta = 0.$$

L'équation

$$f(\theta) = \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta = 0$$

n'est satisfaite pour aucune valeur réelle de θ; $f(\theta)$ est donc constamment > 0, et comme $\rho^2 \cos^4 \theta$ est infiniment petit, l'équation $F(x, y) = 0$ ne peut être satisfaite en aucun point de la circonférence du petit cercle. La courbe n'a donc aucun point dans le voisinage de l'origine des coordonnées : l'origine est un *point conjugué*.

On voit clairement qu'il en sera de même toutes les fois que l'équation $f(\theta) = 0$ n'aura pas de racines réelles.

135. *Exemple* II. — Soit $F(x, y) = y^2 - x^2 + x^4 = 0$.

Égalant à zéro les dérivées partielles de $F(x, y)$, on trouve pour les équations d'un point singulier

$$y = 0, \qquad x(2x^2 - 1) = 0, \qquad x^2(x^2 - 1) = 0,$$

équations auxquelles satisfait le système unique

$$x = 0, \qquad y = 0,$$

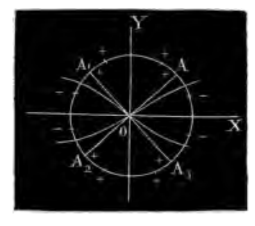
qui représente encore l'origine. Décrivant le cercle infiniment petit autour de ce point; remplaçant, dans l'équation de la courbe, x et y par $\rho \cos \theta$, $\rho \sin \theta$, divisant par ρ^2, on trouve

$$\frac{1}{\rho^2} F(x, y) = (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) + \rho^2 \cos^4 \theta = 0.$$

L'équation

$$f(\theta) = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta = -\cos 2\theta = 0$$

est satisfaite par les valeurs



$$\theta = \frac{\pi}{4}, \quad \theta = \frac{3\pi}{4}, \quad \theta = \frac{5\pi}{4}, \quad \theta = \frac{7\pi}{4}.$$

Menons les rayons correspondants OA, OA_1, OA_2, OA_3 : le terme en ρ^2 étant infiniment petit, $F(x, y)$ ne peut s'annuler que pour des valeurs infiniment petites de $f(\theta)$; les points appartenant à la courbe ne peuvent se trouver que dans le voisinage des points A, A_1, A_2, A_3. Soit

toujours ε un angle très-petit, mais invariable : on a

$$f\left(\frac{\pi}{4}-\varepsilon\right)<0,\quad f\left(\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right)>0;\quad f\left(\frac{3\pi}{4}-\varepsilon\right)>0,\quad f\left(\frac{3\pi}{4}+\varepsilon\right)<0;$$

$$f\left(\frac{5\pi}{4}-\varepsilon\right)<0,\quad f\left(\frac{5\pi}{4}+\varepsilon\right)>0;\quad f\left(\frac{7\pi}{4}-\varepsilon\right)>0,\quad f\left(\frac{7\pi}{4}+\varepsilon\right)<0;$$

et comme $f(\theta)$ donne son signe à $F(x, y)$, ρ étant infiniment petit, il s'ensuit que $F(x, y)$ change de signe, et s'annule par conséquent, chaque fois que la variable θ franchit l'un des intervalles

$$\frac{\pi}{4}\mp\varepsilon,\quad \frac{3\pi}{4}\mp\varepsilon,\quad \frac{5\pi}{4}\mp\varepsilon,\quad \frac{7\pi}{4}\mp\varepsilon.$$

Il y a donc un point de la courbe dans le voisinage de chacun des points A, A_1, A_2, A_3; on voit sans peine qu'il n'y en a qu'un seul, et comme $F(x, y)$ se réduit à $\rho^4\cos^4\theta>0$ en A, A_1, A_2, A_3, puisque $f(\theta)$ y est nul, il est clair que $F(x, y)$ s'annulle en deçà du point A, au-delà du point A_1, en deçà du point A_2, au-delà du point A_3. Deux branches de courbe, tangentes respectivement aux droites AA_2, A_1A_3, se croisent en O : l'origine est un *point multiple.* (Les tangentes sont ici bissectrices des angles formés par les axes : de plus, chaque branche présente une inflexion en O). On verra sans peine que la même conclusion subsiste, chaque fois que l'équation $f(\theta)=0$ admet des racines réelles et inégales.

136. *Exemple* III. — Soit la courbe

$$F(x, y)=y^2-x^3=0.$$

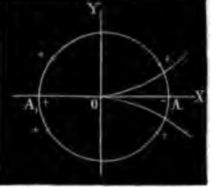
Le point

$$x=0,\qquad y=0$$

satisfait seul aux conditions qui caractérisent un point singulier. Transformons comme dans les cas précédents; il vient

$$F(x, y)=\rho^2(\sin^2\theta-\rho\cos^3\theta)=0.$$

La fonction $f(\theta)=\sin^2\theta$ ne s'annulant que pour $\theta=0$ et $\theta=\pi$, le cercle de rayon ρ ne peut couper la courbe qu'en des points infiniment voisins de l'axe des x. Pour $\theta=\pm\varepsilon$, F est de même signe que $\sin^2\theta$, c'est-à-dire >0. En A, $\theta=0$, $F=-\rho^3<0$; il y a donc un point de la courbe entre $\theta=-\varepsilon$ et $\theta=0$; et un entre $\theta=0$ et $\theta=\varepsilon$. Pour $\theta=\pi\pm\varepsilon$, $F>0$; en A_1, $\theta=\pi$, $F=\rho^3>0$; il n'y a donc aucun point dans le voisinage du point A_1,



puisque $F(x, y)$ est composé de deux termes positifs et ne peut s'annuler. Deux branches de courbe, s'arrêtant au point ($x=0$, $y=0$), et tangentes en ce point à l'axe des x positifs : l'origine est un *point de rebroussement de première espèce*. En général, il en sera de même quand l'équation $f(\theta)=0$ aura ses racines égales, et n'annulant pas $f_1(\theta)$.

127. *Exemple* IV. $F(x, y)=y^2-2yx^2+x^4-x^5=0$.

Tout point singulier doit satisfaire à cette équation et aux suivantes :

$$x(-4y+4x^2-5x^3)=0, \qquad y-x^2=0,$$

d'où l'on tire cette seule solution

$$x=0, \qquad y=0,$$

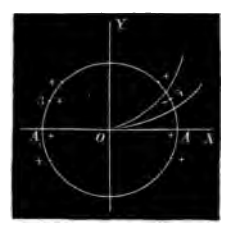
qui représente l'origine des axes. Posant $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, il vient

$$F(x, y)=\rho^2(\sin^2\theta-2\rho\sin\theta\cos^2\theta+\rho^2\cos^4\theta-\rho^3\cos^5\theta)=0.$$

L'équation

$$f(\theta)=\sin^2\theta=0$$

a pour racines $\theta=0$, $\theta=\pi$, ce qui montre que la courbe ne peut couper le cercle de rayon ρ que dans le voisinage des points A et A_1 de l'axe des x.



En ces points, on a $\sin\theta=0$, $F(x, y)=\rho^4(1\mp\rho)>0$; de même, pour $\theta=\pm\varepsilon$, $\theta=\pi\pm\varepsilon$, $f(\theta)$ est positif et donne son signe à F, donc $F(x, y)>0$. La fonction F ne manifeste donc jusqu'ici aucun changement de signe propre à révéler l'existence d'un point de la courbe, mais on ne peut rien conclure, parce que, à une distance infiniment petite des points A et A_1, $\sin\theta$ est de même ordre que ρ; les trois premiers termes du développement de F sont donc de même ordre, et leur somme peut s'annuler deux fois entre $\theta=0$ et $\theta=\varepsilon$. Pour s'en assurer, on posera

$$\sin\theta=\rho u,$$

u étant une nouvelle variable, d'où

$$F(x, y)=\rho^4(u^2-2u\cos^2\theta+\cos^4\theta-\rho\cos^5\theta).$$

Égalant à zéro le coefficient de ρ^4, on trouve

$$u^2-2u\cos^2\theta+\cos^4\theta=0, \qquad (u-\cos^2\theta)^2=0,$$

d'où

$$u=\cos^2\theta, \qquad \sin\theta=\rho\cos^2\theta>0.$$

Les valeurs positives et infiniment petites de $\sin\theta$, déterminées par cett

équation, correspondent sur la circonférence à deux points α, β infiniment voisins respectivement de A et de A_1, au-dessus de l'axe des x : le premier donne $F = -\rho^5 \cos^5 \theta < 0$, le second $F = -\rho^5 \cos^5 \theta > 0$. F est donc composé de termes positifs et ne peut s'annuler dans le voisinage du point β, mais il change deux fois de signe, en deçà et au-delà du premier α, ce qui indique deux branches de courbe tangentes à l'axe des x positifs, au-dessus de cet axe, et s'arrêtant à l'origine des coordonnées.

L'origine est un point de rebroussement *de seconde espèce*. On voit d'ailleurs qu'il ne peut y avoir que deux branches passant en O, parce que l'équation de la courbe est seulement du second degré en y.

128. *Exemple* V. $F(x, y) = (y^2 - x^2)^2 - x^4 \sin x = 0$.

Un point singulier satisfait à cette équation et à celles-ci :

$$y(y^2 - x^2) = 0, \qquad x[4(y^2 - x^2) + 4x^2 \sin x + x^3 \cos x] = 0.$$

Considérons seulement les valeurs de x depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$: les seuls points qui satisfassent aux conditions indiquées sont

$$x = 0, \quad y = 0; \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad y = 0.$$

Le premier est l'origine. Décrivant le cercle de rayon ρ et posant $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, on trouve

$$F(x, y) = \rho^4 [(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)^2 - \cos^4 \theta \sin(\rho \cos \theta)],$$

ou, en développant $\sin(\rho \cos \theta)$ et divisant par ρ^4,

$$\frac{1}{\rho^4} F(x, y) = \cos^2 2\theta - \rho \cos^5 \theta + \frac{\rho^3}{6} \cos^7 \theta - \cdots$$

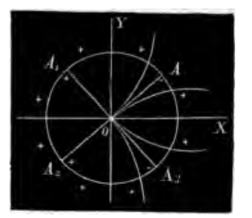
L'équation

$$f(\theta) = \cos^2 2\theta = 0$$

donne pour racines

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \quad \theta = \frac{3\pi}{4}, \quad \theta = \frac{5\pi}{4}, \quad \theta = \frac{7\pi}{4};$$

soient OA, OA_1, OA_2, OA_3 les rayons correspondants. A une distance angulaire très-petite ε de ces rayons, $f(\theta)$ a une valeur finie positive, donc $F(x, y) > 0$; la courbe ne peut couper la circonférence que dans le voisinage des points A, A_1, A_2, A_3. En ces points, F a le même signe que le terme du 1er ordre en ρ, $-\rho \cos^5 \theta$; donc, le signe — en A et A_3, le signe + en A_1 et A_2. Il n'y a donc aucun point de la courbe dans le voisinage de ces derniers, puisque le terme du premier ordre y est constam-



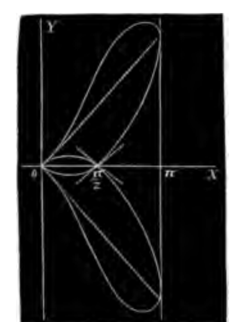
ment positif et ne s'annule pas. Mais le changement de signe de $F(x, y)$ indique deux points, l'un en deçà, l'autre au-delà de A ; et deux autres en deçà et au-delà de A_3 (on vérifie sans peine qu'il ne peut y en avoir plus de deux; d'ailleurs, l'équation n'est que du 4me degré en y). Nous trouvons donc quatre branches de courbe qui s'arrêtent au point O : deux sont tangentes à OA, de part et d'autre; deux sont tangentes à OA_3, aussi de part et d'autre. La courbe a donc à l'origine deux rebroussements de première espèce, dont les tangentes sont inclinées à 45° sur l'axe des x positifs.

Discutons maintenant le point $\left(x=\frac{\pi}{2}, y=0\right)$. En décrivant le cercle infiniment petit autour de ce point; posant, dans $F(x, y)$, $x=\frac{\pi}{2}+\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, faisant les réductions et développant, on trouvera successivement

$$F(x, y)=\left[\rho^2\sin^2\theta-\left(\frac{\pi}{2}+\rho\cos\theta\right)^2\right]^2-\left(\frac{\pi}{2}+\rho\cos\theta\right)^4\cos(\rho\cos\theta)$$

$$=\rho^4\sin^4\theta-2\rho^2\sin^2\theta\left(\frac{\pi}{2}+\rho\cos\theta\right)^2+\left(\frac{\pi}{2}+\rho\cos\theta\right)^4\left(\frac{\rho^2\cos^2\theta}{1.2}-\frac{\rho^4\cos^4\theta}{1.2.3.4}+\cdots\right),$$

$$\frac{1}{\rho^2}F(x, y)=\frac{\pi^2}{2}\left(-\sin^2\theta+\frac{\pi^2}{16}\cos^2\theta\right)+\pi\rho\cos\theta\left(-2\sin^2\theta+\frac{\pi^2}{4}\cos^2\theta\right)+\cdots$$



L'équation

$$f(\theta)=\frac{\pi^2}{2}\left(-\sin^2\theta+\frac{\pi^2}{16}\cos^2\theta\right)=0$$

donne

$$\operatorname{tg}\theta=\pm\frac{\pi}{4},$$

ce qui détermine deux droites réelles également inclinées sur l'axe des x. Le point $\left(x=\frac{\pi}{2}, y=0\right)$ est donc un point *double*, dont les tangentes sont les deux droites définies par cette équation.

129. Ce qui précède suffit pour servir de guide dans la discussion des points singuliers. Il pourra d'ailleurs s'en présenter d'autres, correspondant à des discontinuités des fonctions F, $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$, et que l'on dis

cutera suivant la nature de ces fonctions dans le voisinage du point singulier.

Si la fonction qui représente l'ordonnée de la courbe n'admet qu'une valeur pour chaque valeur de x, et qu'elle devienne discontinue, sans être infinie, en un point, celui-ci sera un point d'arrêt.

Enfin, si l'ordonnée ne cesse pas d'être continue, mais que sa dérivée par rapport à x passe brusquement d'une valeur à une autre pour une valeur donnée de x, un point *saillant* correspondra à cette discontinuité de la dérivée, puisqu'il y aura changement brusque dans la direction de la tangente.

§ 3. ANALYSE D'UNE COURBE PLANE.

140. Nous possédons maintenant tous les éléments nécessaires à la discussion complète d'une courbe, donnée par son équation $F(x, y) = 0$.

On cherchera d'abord à résoudre l'équation par rapport à x ou à y, afin d'acquérir, par l'étude des variations de la fonction, une idée approximative de la marche de la courbe, du nombre de ses branches, de leurs limites, des points où elles coupent les axes coordonnés, etc....

Formant l'équation de la tangente, on déterminera facilement les points où elle est parallèle, soit à l'axe des x, ce qui a lieu quand $\frac{dy}{dx}$ est nul; soit à l'axe des y, ce qui suppose $\frac{dy}{dx} = \infty$: ces points répondent généralement à un maximum ou à un minimum, soit de l'ordonnée, soit de l'abscisse.

Si la courbe admet des branches infinies, on trouvera leurs asymptotes par la méthode exposée au chapitre XIV.

On calculera d^2y, afin de reconnaître, par le signe de cette expression, de quel côté les branches tournent leur concavité, et de déterminer les points d'inflexion.

Enfin, on recherchera et l'on discutera les points singuliers de la courbe, si elle en possède, par la méthode dont nous avons donné divers exemples.

Exemple. La courbe qui a pour équation

$$y^4 - 96a^2y^2 + 100a^2x^2 - x^4 = 0$$

est symétrique par rapport à l'axe des x et par rapport à l'axe des y : il suffit donc de construire la portion de cette courbe comprise dans l'angle des coordonnées positives. En posant

$$X = x^4 - 100a^2x^2 + 48^2a^4,$$

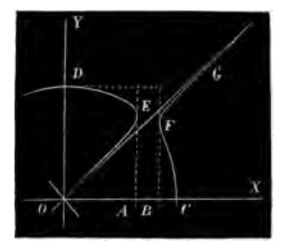
ou a

$$y = \sqrt{48a^2 \pm \sqrt{X}}.$$

Or, on voit sans peine que

$$X = (x^2 - 6^2a^2)(x^2 - 8^2a^2),$$

en sorte que X est négatif, et y imaginaire, entre les limites $x=6a$ et $x=8a$, auxquelles répondent les points A et B. Entre $x=0$ et $x=6a$, $x^2(x^2-100a^2)<0$, donc $\sqrt{X}<48a^2$, les deux valeurs de y sont réelles; la plus grande, pour $x=0$, vaut $a\sqrt{96}$ ou à peu près $9{,}8\cdot a$; elle décroît jusqu'à $y=a\sqrt{48}=7a$ environ, pour $x=6a$ (branche DE); la plus petite, nulle pour $x=0$, atteint la même valeur $a\sqrt{48}$, pour $x=6a$ (branche OE). Au-delà de $x=8a$, l'une des valeurs de y croît depuis $y=a\sqrt{48}$ jusqu'à l'infini (branche indéfinie FG); l'autre décroît de $y=a\sqrt{48}$ jusqu'à $y=0$ pour $x=10a$, puis devient imaginaire (branche FC). Les intersections de la courbe avec les axes sont donc déjà connues (D, O, C).



La différentiation de l'équation donne

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(x^2-50a^2)}{y(y^2-48a^2)}.$$

La tangente est parallèle à l'axe des x au point D, où $x=0$ sans que y soit nul; l'hypothèse $x^2=50a^2$ correspond à un point imaginaire; l'hypothèse $x=0$, $y=0$ sera examinée plus loin. La tangente est parallèle à l'axe des y lorsque $y^2-48a^2=0$ (en E et en F), et lorsque $y=0$ sans que x soit nul (en C).

La méthode de recherche des asymptotes conduit, pour la branche FG, à l'équation

$$y = x,$$

qui représente la bissectrice de l'angle des axes.

Pour trouver les points singuliers, on posera

$$y(y^2-48a^2)=0, \qquad x(x^2-50a^2)=0.$$

On ne peut satisfaire à ces équations et à celle de la courbe que par le système

$$x=0, \qquad y=0,$$

qui donne l'origine. L'emploi du cercle de rayon ρ conduit à l'équation

$$a^2(100\cos^2\theta - 96\sin^2\theta) + \rho^2(\sin^4\theta - \cos^4\theta) = 0:$$

point double; les tangentes aux deux branches sont déterminées par l'équation

$$\operatorname{tg}\theta = \pm\sqrt{\frac{100}{96}} = \pm\sqrt{\frac{25}{24}} = \pm\frac{5}{\sqrt{24}}.$$

On tire encore de l'équation de la courbe

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{y(y^2-48a^2)}\left[3x^2 - 50a^2 + (48a^2 - 3y^2)\frac{dy^2}{dx^2}\right].$$

Sur la branche DE, le dénominateur est >0; le numérateur, égal à $-50a^2$ en D, à $-\infty$ en E, ne peut changer de signe dans l'intervalle (car il y aurait deux points d'inflexion et la courbe serait coupée en plus de 4 points par une droite; d^2y est donc négatif, la concavité est vers les y négatifs. Sur la branche OE, d^2y, nul en O, devient égal à $+\infty$ en E; il est donc positif de O en E, la concavité est du côté des y positifs. Sur la branche FG, on verra de même que $d^2y<0$; sur la branche FC, d^2y passe de la valeur $+\infty$ à $-\infty$, il y a un point d'inflexion entre F et C. Les branches qui se croisent à l'origine traversent leurs tangentes.

Les données précédentes suffisent pour la construction de la courbe.

Exercices.

Analyser les courbes suivantes, et discuter leurs points singuliers :

1. $(x^2+y^2)^2+a^2(y^2-x^2)=0$. (Courbe en forme de ∞, symétrique par rapport aux axes; point double à l'origine, deux branches tangentes aux bissectrices des angles des axes.)

2. $\cos x + \cos y = 2$. (La courbe se réduit à un nombre infini de points conjugués, satisfaisant aux équations

$$x = \pm 2i\pi, \qquad y = \pm 2i'\pi).$$

3. $y^4 - ay^2x + bx^3 = 0$ (Courbe à deux feuilles et deux branches infinies; l'origine un point triple : une branche tangente à l'axe des x, deux autres inclinées sur cet axe d'un angle $\theta = \operatorname{arc\,tg}\left(\pm\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$).

4. $x^4 - 2ay^3 - 3a^2y^2 - 2a^2x^2 + a^4 = 0$ (Trois points doubles : $x=a$, $y=0$; $x=-a$, $y=0$; $x=0$, $y=-a$).

5. $y^3(2x-a)+a^2x^2-x^4=0$ (Courbe indéfinie dans le sens des x positifs et négatifs; une asymptote $x=\frac{a}{2}$ parallèle à l'axe des y; une autre qui a pour équation

$y=\left(x+\frac{a}{6}\right)\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; la courbe coupe l'axe des x à 90° en $x=a$, $x=-a$. L'origine est un point de rebroussement de première espèce, la tangente coïncide avec l'axe des y positifs).

6. $(y-\sin x)^2-x^5\sin^2 x=0$ (Courbe serpentante à deux branches; rebroussement de deuxième espèce à l'origine, tangent à l'axe des x positifs).

7. $y^5+ax^4-b^2xy^2=0$ (Rebroussement de première espèce à l'origine, tangent à l'axe des x positifs ; en outre, par ce même point, passe une branche tangente à l'axe des y et offrant une inflexion).

8. $x^4+x^2y^2-6ax^2y+a^2y^2=0$ (Courbe à deux feuilles limitées entre $x=\pm 2a\sqrt{2}$; l'origine est un point double; les deux branches ont même tangente, l'axe des x).

9. $[y-\varphi(x)]^q-(x-a)^p\psi(x)=0$; p, q entiers et positifs, q pair. [Si $p>q$, le point $x=a$, $y=\varphi(a)$ est un point de rebroussement; du 1er genre si $p<2q$; du second si $p>2q$].

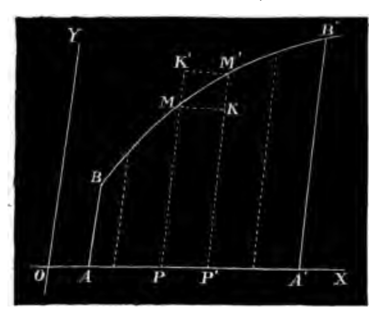
10. $y-xlx=0$ (Point d'arrêt à l'origine des axes).

11. $y=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ (Point saillant à l'origine; les tangentes ont respectivement pour coefficients angulaires 0 et 1).

CHAPITRE XVI.

DIFFÉRENTIELLES DE CERTAINES FONCTIONS GÉOMÉTRIQUES.

141. *Aire d'une courbe plane.* — L'aire comprise entre une courbe donnée BB', l'axe des x, une ordonnée fixe AB, et une ordonnée variable MP, est évidemment une fonction S de l'abscisse x du point M : cherchons sa différentielle.



A l'accroissement $\Delta x=$ PP' de la variable x correspond l'accroissement ΔS $=$ MPP'M' de la fonction : au segment MPP'M', on peut substituer le parallélogramme MPP'K, parce que leur rapport a pour limite l'unité (32), et l'on a, γ étant l'angle des axes coordonnés,

$$\Delta S=y\sin\gamma\cdot\Delta x.$$

De là

$$lim\,\frac{\Delta S}{\Delta x}=\frac{dS}{dx}=y\sin\gamma,$$

ou

$$dS=y\sin\gamma dx.$$

Quand les axes sont rectangulaires, $\sin\gamma=1$, et l'on a

$$dS=ydx.$$

N. B. Dans ces formules, y représente la valeur absolue de l'ordonnée de la courbe, sans quoi l'on devrait regarder comme négatives les aires correspondantes aux ordonnées négatives.

142. Si l'équation de la courbe était donnée en coordonnées polaires, on désignerait par S l'aire du secteur compris entre la courbe, un rayon vecteur fixe OA, et un rayon vecteur $r=$OM, correspondant à un angle variable θ. A l'accroissement $\Delta\theta$ de l'angle polaire, répond un accroissement $\Delta S=$MOM′ de l'aire S, et l'on ferait voir, par des considérations semblables à celles du n° 32, que cet élément de surface est compris entre deux secteurs circulaires infiniment petits, de rayons OM et OM′, et qui ont pour limite de leur rapport l'unité. On peut donc substituer l'aire de l'un d'entr'eux à celle du secteur MOM′, et l'on a

$$\Delta S=\frac{1}{2}r^2\Delta\theta,$$

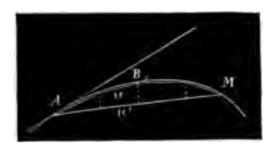
d'où

$$lim\,\frac{\Delta S}{\Delta\theta}=\frac{dS}{d\theta}=\frac{1}{2}r^2,$$

et enfin

$$dS=\frac{1}{2}r^2d\theta.$$

143. *Longueur de l'arc d'une courbe plane.* — Soit ABM un arc de courbe quelconque, AM sa corde; on inscrit dans l'arc ABM un polygone dont les côtés sont infiniment petits. Soit u l'un des côtés du polygone, u' sa projection sur la corde AM, α l'angle aigu que fait le côté u avec AM : on a



$$u'=u\cos\alpha,$$

et, en désignant par Σ une somme qui s'étend à tous les côtés du polygone,

$$\Sigma u'=\Sigma(u\cos\alpha)=\Sigma u\cdot M(\cos\alpha),$$

d'où

$$\Sigma u = \frac{\Sigma u'}{M(\cos\alpha)}.$$

Σu représente le périmètre du polygone inscrit, et $\Sigma u'$ est égal à la corde $AM = c$. Lorsque les côtés du polygone tendent vers zéro, son périmètre croît sans cesse sans pouvoir devenir infini ; il tend donc vers une limite déterminée s. *C'est cette limite que l'on nomme la longueur de l'arc de courbe* ABM. D'ailleurs, l'angle α que fait un des côtés du polygone avec la corde, a pour limite l'angle φ que fait une tangente à la courbe avec cette même corde, en sorte que, si nous désignons par $M(\cos\varphi)$ une moyenne entre les valeurs par lesquelles passe $\cos\varphi$, lorsqu'on passe du point A au point M, l'équation précédente deviendra à la limite

$$s = \frac{c}{M(\cos\varphi)}, \quad \text{ou} \quad \frac{c}{s} = M(\cos\varphi).$$

Cette relation entre la longueur d'un arc et celle de sa corde conduit à une conséquence importante :

Supposons que le point M se rapproche indéfiniment du point A sur la courbe : la tangente, en un point quelconque de l'arc ABM, fait avec la tangente en A un angle tendant vers zéro, si A n'est pas un point singulier ; l'angle φ qu'elle fait avec la corde AM est donc aussi infiniment petit, donc $\cos\varphi$ a pour limite l'unité, ainsi que $M(\cos\varphi)$, et l'on a

$$\lim \frac{c}{s} = 1,$$

c'est-à-dire que *le rapport d'un arc infiniment petit à sa corde a pour limite l'unité*. Ce théorème subsistera même pour un arc de courbe *de forme variable*, pourvu que l'angle φ, en un point quelconque de cet arc, tende vers zéro en même temps que la corde.

144. Considérons maintenant, sur une courbe donnée, un point fixe A, et un point variable $M(x, y)$: la longueur de l'arc de courbe compris entre ces deux points est une fonction s de l'abscisse du point M, et l'on veut trouver sa différentielle, les axes étant supposés rectangulaires.

Soient M′ un point infiniment voisin du point M ; $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ ses coordonnées, Δs l'arc infiniment petit MM′. Sa corde ayant pour expression $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, on aura, d'après le théorème précédent,

$$\lim \frac{\Delta s}{\Delta x} = \lim \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta x} = \lim \sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}},$$

d'où

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}},\qquad ds=\sqrt{dx^2+dy^2},$$

ce qui donne la solution de la question.

Remarques. — La dérivée de l'arc par rapport à x étant positive, cela suppose que ces quantités varient dans le même sens, ou que les arcs soient comptés dans le sens des x positifs. Si le contraire avait lieu, il faudrait changer le signe du radical.

D'après la définition donnée de la longueur d'un arc de courbe, on pourrait se demander si la limite vers laquelle tend le périmètre du polygone inscrit, ne dépend pas de la loi suivant laquelle les côtés tendent vers zéro. La formule ci-dessus répond à cette question : la fonction s, ayant une dérivée déterminée par rapport à x, et s'annulant pour la valeur de x qui répond au point A, est entièrement déterminée (51); et comme nous n'avons fait aucune hypothèse sur la loi d'inscription des côtés du polygone, il s'ensuit que la longueur de l'arc s est la même, quelle que soit cette loi.

Lorsque l'équation de la courbe est donnée en coordonnées polaires, on doit exprimer ds en fonction de ces coordonnées. Les équations

$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta$$

donnent successivement

$$dx=\cos\theta\,dr-r\sin\theta d\theta,\qquad dy=\sin\theta dr+r\cos\theta d\theta,$$

$$dx^2+dy^2=dr^2+r^2d\theta^2,$$

$$ds=\sqrt{dr^2+r^2d\theta^2},\qquad \frac{ds}{d\theta}=\sqrt{r^2+\frac{dr^2}{d\theta^2}}.$$

La géométrie conduit facilement au même résultat.

145. *Inclinaison de la tangente sur l'axe des x.* — L'angle φ, que fait avec l'axe des x positifs la tangente à la courbe en un point M(x, y), est donné par la formule

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{dy}{dx}.$$

En dérivant par rapport à x, il vient

$$\frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{d\varphi}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2},$$

d'où

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}\,\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}=\frac{d^2y}{dx^2}\,\frac{1}{1+\frac{dy^2}{dx^2}}.$$

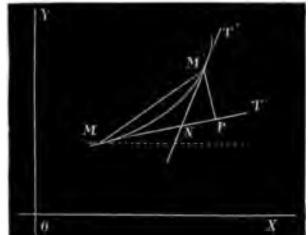
La différentielle de l'angle φ est donc

$$d\varphi=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\,dx.$$

On en déduit, en négligeant un infiniment petit du second ordre par rapport à Δx,

$$\Delta\varphi=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\,\Delta x.$$

Or, si l'on mène les tangentes à la courbe en M, et en un point infiniment voisin $M'(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$, l'angle infiniment petit TNT′ compris entre ces tangentes est évidemment égal à la valeur absolue de $\Delta\varphi$: il sera donc donné par la formule précédente, en négligeant des termes du second ordre. A cause de cette circonstance, $d\varphi$ est appelé *l'angle de contingence* de la courbe proposée.



146. Dans un système de coordonnées polaires, φ est l'inclinaison de la tangente sur l'axe polaire; μ désignant l'angle du rayon vecteur avec la tangente à la courbe (122), on a évidemment

$$\varphi=\theta+\mu,\qquad d\varphi=d\theta+d\mu.$$

Or, l'équation

$$\operatorname{tg}\mu=r\frac{d\theta}{dr}$$

donne, $d\theta$ étant pris constant,

$$\frac{d\mu}{\cos^2\mu}=\frac{dr^2-rd^2r}{dr^2}\,d\theta,\qquad \frac{d\mu}{d\theta}=\frac{dr^2-rd^2r}{dr^2+r^2d\theta^2},$$

$$\frac{d\varphi}{d\theta}=1+\frac{d\mu}{d\theta}=\frac{r^2d\theta^2+2dr^2-rd^2r}{dr^2+r^2d\theta^2},$$

et enfin

$$d\varphi = \frac{r^2 + 2\frac{dr^2}{d\theta^2} - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}} d\theta.$$

Tel est l'expression de l'angle de contingence en coordonnées polaires.

147. L'expression de $\Delta\varphi$ conduit à une conséquence remarquable. Soit α l'angle infiniment petit M'MT compris entre la corde MM' et la tangente en M; M'P perpendiculaire sur cette tangente; on a

$$\frac{\text{M'P}}{\text{MP}} = \text{tg}\,\alpha = \alpha,$$

en négligeant une quantité d'ordre supérieur à α. Or, si l'on prend pour un moment la tangente MT pour axe des x, on aura, au point M,

$$y=0, \quad \frac{dy}{dx}=0, \quad \Delta x = \text{MP}, \quad \Delta y = \text{M'P} = \frac{\Delta x^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2},$$

en appliquant la formule de Taylor et négligeant les infiniment petits du 3me ordre. Il vient donc

$$\alpha = \frac{\Delta x}{2}\frac{d^2y}{dx^2},$$

et comme l'expression de $\Delta\varphi$ devient ici $\frac{d^2y}{dx^2}\Delta x$, on a, aux infiniment petits du second ordre près,

$$\alpha = \frac{1}{2}\Delta\varphi, \qquad \text{angle M'MT} = \frac{1}{2}\,\text{angle TNT'};$$

donc, *l'angle compris entre la corde d'un arc infiniment petit et la tangente à l'origine de cet arc, est la moitié de l'angle des tangentes extrêmes, en négligeant une quantité infiniment petite par rapport à ces angles.*

Exercices.

1. Montrer, en partant de la formule du N° 143, que la différence entre un arc infiniment petit et sa corde est du troisième ordre, par rapport à l'arc.

2. L'équation de la chaînette étant

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

prouver que l'on a

$$ads = ydx = dS,$$

et que, par suite, *l'aire comprise entre deux ordonnées quelconques est égale à celle du rectangle construit sur l'arc terminé à ces ordonnées, et sur l'ordonnée à l'origine, a.*

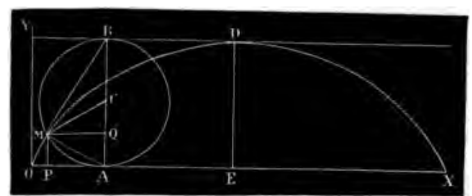
Montrer que, dans cette même courbe, 1° on a les relations

$$y = \frac{a}{\cos\varphi}, \qquad s = a \operatorname{tg}\varphi, \qquad y^2 = a^2 + s^2,$$

l'arc s étant compté du point le plus bas de la courbe; 2° si du pied de l'ordonnée on abaisse une perpendiculaire sur la tangente, cette perpendiculaire a une longueur constante a, et sa distance au point de contact est égale à l'arc s.

3. Dans la cycloïde, on a

$$x = a(\omega - \sin\omega), \quad y = a(1 - \cos\omega), \quad ds = 2a \sin\frac{\omega}{2}\, d\omega.$$



On en déduit

$$ds = -2d.\,\mathrm{MB},$$

d'où il suit *que l'arc* MD *de la cycloïde, compté du sommet* D, *est double de la corde* MB *dans le cercle générateur.*

4. Chercher la différentielle ds_1 de l'arc de la podaire d'une courbe donnée. R. Les équations (ch. XIII, § 1, ex. 4)

$$dxdy_1 - dydx_1 = (x_1 - x)\,d^2y,$$
$$dxdx_1 + dydy_1 = -\,y_1 d^2y,$$

conduisent à celles-ci :

$$\frac{dx_1}{y - 2y_1} = \frac{dy_1}{2x_1 - x} = \frac{dxd^2y}{ds^2} = \frac{ds_1}{\sqrt{(y-2y_1)^2 + (x-2x_1)^2}} = \frac{ds_1}{r},$$

r désignant le rayon mené de l'origine au point de tangence (x, y). On a donc

$$ds_1 = r d\varphi.$$

Etablir géométriquement cette équation.

5. On construit deux ellipses dont les axes, coïncidant en direction, sont respectivement $2a$, $2b$ pour l'une; $2\sqrt{ak}$, $2\sqrt{bk}$ pour l'autre, le rapport k étant quelconque.

Soient S l'aire décrite dans la première par le rayon vecteur mené du centre, φ' l'inclinaison, sur le grand axe, de la tangente à la seconde au point où elle est coupée par ce rayon; on a

$$dS = \frac{1}{2} ab\, d\varphi'.$$

En déduire l'aire de l'ellipse.

6. Trouver la différentielle de l'arc d'une *ovale de Descartes*

$$r^2 - 2r(a\cos\theta + b) = c.$$

R. On trouve, réductions faites,

$$ds = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta + c}\left(1 \pm \frac{a\cos\theta + b}{\sqrt{(a\cos\theta + b)^2 + c}}\right)d\theta.$$

CHAPITRE XVII.

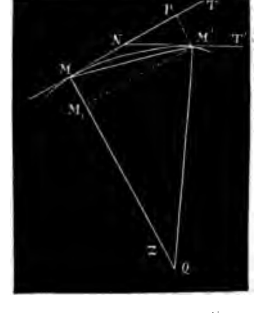
DE LA COURBURE, ET DES DÉVELOPPÉES DES COURBES PLANES.

148. Si l'on mène les tangentes aux extrémités d'un arc convexe MM', l'angle TNT', compris entre les directions de ces tangentes prolongées dans le même sens, se nomme la *courbure* de l'arc MM'.

Lorsque l'on prend sur une courbe, à partir d'un point donné M, un arc de longueur variable MM', le rapport de la courbure de cet arc a sa longueur, savoir

$$\frac{\text{angle TNT}'}{\text{arc MM}'},$$

variera généralement avec la longueur de l'arc, et si le point M' se rapproche indéfiniment du point M, ce rapport de deux infiniment petits tendra vers une limite déterminée : c'est cette limite que l'on appelle *la courbure de la courbe* proposée *au point* M.



Dans le cercle, la courbure est *constante* et égale à l'unité divisée par le rayon, car l'angle TNT' est égal à l'angle au centre qui répond à l'arc MM', et cet arc est le produit de l'angle au centre par le rayon. Le rapport $\frac{\text{angle TNT}'}{\text{arc MM}'}$, et par conséquent sa limite, est donc constant et égal à l'inverse du rayon du cercle. C'est pour cette raison que, afin de se figurer plus nettement la courbure en un point M d'une courbe quelconque, courbure généralement variable avec la position de ce point, on la compare à celle du cercle, en assignant le rayon R d'un cercle qui aurait en tous ses points une courbure égale à celle de la courbe donnée au point M. Ce rayon R s'appelle le *rayon de courbure* de la courbe au point donné.

Pour trouver son expression, il suffit d'observer que la courbure de ce cercle étant $\frac{1}{R}$, celle de la courbe au point M est égale à $lim \frac{\text{angle TNT}'}{\text{arc MM}'}$; on a donc

$$\frac{1}{R} = lim \frac{\text{angle TNT}'}{\text{arc MM}'}.$$

D'autre part, on sait (145) que angle $TNT' = \pm \Delta\varphi$, et l'arc MM' n'est autre chose que Δs; donc, il vient

$$\text{(I)} \qquad \frac{1}{R} = \pm \lim \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \pm \frac{d\varphi}{ds},$$

ce qui est une première expression de la courbure. On prendra le signe supérieur ou le signe inférieur de manière à obtenir pour R, qui est une quantité absolue, une expression positive.

149. L'équation de la courbe étant donnée en coordonnées rectangulaires, on a (145, 144)

$$d\varphi = \frac{d^2y}{dx^2} \frac{dx}{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}, \qquad ds = dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}},$$

donc

$$\text{(II)} \qquad R = \pm \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Cette formule suppose dx constant : si x et y étaient exprimés en fonction d'une même variable indépendante, on aurait, en transformant l'équation précédente,

$$\text{(III)} \qquad R = \pm \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y - dyd^2x}.$$

Enfin, si l'équation de la courbe est donnée en coordonnées polaires, il suffira de remplacer, dans la formule (I), $d\varphi$ et ds par leurs expressions dans ce système de coordonnées (146, 144), et l'on trouvera

$$\text{(IV)} \qquad R = \pm \frac{\left(r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\frac{dr^2}{d\theta^2} - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}.$$

Il résulte de l'équation (II) que, en un point d'inflexion où d^2y est nul, le rayon de courbure est infini; cette remarque peut être utilisée pour trouver les points d'inflexion d'une courbe, lorsque son équation est donnée en coordonnées polaires, et que l'on a formé l'expression de son rayon de courbure.

150. On peut encore donner une expression géométrique, souvent

utile, du rayon de courbure. Du point M′, abaissons M′P perpendiculaire sur la tangente MT : nous aurons, d'après ce qui a été établi précédemment,

$$\text{angle } M'MT = \frac{1}{2} \text{ angle } TNT', \qquad \text{angle } M'MT = \frac{M'P}{MP},$$

en négligeant des quantités infiniment petites par rapport à l'angle M′MT. De même, l'arc MM′, sa corde MM′, et la projection MP de celle-ci sur la tangente, ayant pour limite de leur rapport l'unité, peuvent être substitués l'un à l'autre. On a donc, rigoureusement,

$$\frac{1}{R} = lim \frac{\text{angle } TNT'}{\text{arc } MM'} = lim \frac{2\,(\text{angle } M'MT)}{MP} = lim \frac{2M'P}{\overline{MP}^2},$$

d'où

$$\text{(V)} \qquad R = lim \frac{\overline{MP}^2}{2M'P}.$$

On peut se servir de cette formule pour construire, par approximation, le rayon de courbure d'une courbe donnée graphiquement.

151. A partir du point donné M, on porte sur la normale, dans le sens où la courbe tourne sa concavité, une longueur MZ égale au rayon de courbure; le point Z, ainsi obtenu, est le *centre de courbure* au point M, et le cercle décrit du centre Z avec le rayon MZ est le *cercle de courbure :* il est visible qu'il est tangent en M à la courbe donnée.

Le centre de courbure coïncide avec la limite du point de rencontre de la normale au point considéré, et de la normale en un point infiniment voisin. Soient, en effet, MQ, M′Q deux normales infiniment voisines, se coupant au point Q : le triangle MQM′ nous donne la relation

$$MQ = \sin MM'Q \cdot \frac{MM'}{\sin MQM'}.$$

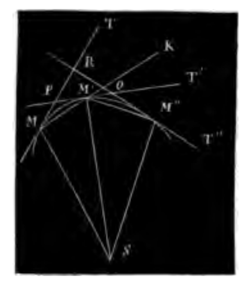
La direction MM′ ayant pour limite celle de la tangente en M, l'angle MM′Q a pour limite un angle droit; la corde MM′ peut être remplacée par l'arc MM′; sin MQM′ peut être remplacé par l'angle MQM′, ou par son égal TNT′; on a donc, quand le point M′ se rapproche indéfiniment du point M,

$$lim\, MQ = lim \frac{\text{arc } MM'}{\text{angle } TNT'} = R = MZ.$$

D'ailleurs, le point de rencontre des normales est évidemment, par rapport au point M, du côté où la courbe tourne sa concavité; donc le point Q, à la limite, se confond avec le centre de courbure Z.

On voit en outre facilement que la différence des longueurs des normales MQ, M'Q, jusqu'à leur point de rencontre, est infiniment petite par rapport à MM' : il suffit de projeter le point M' sur MQ, en M_1. Le triangle MM_1M' fait voir que MM_1 est du second ordre; M_1Q ne diffère de M'Q que d'une quantité infiniment petite par rapport à l'angle en Q (36), qui est du même ordre que NM'; donc, etc.

152. On appelle *cercle osculateur*, en un point M d'une courbe plane, le cercle limite de celui qui passe par ce point, et par deux autres points M', M'' de la courbe, qui se rapprochent indéfiniment du point M. Nous allons prouver que ce cercle limite existe, et n'est autre que le cercle de courbure.



Elevons, sur les cordes MM', M'M'', les perpendiculaires MS, M''S, se coupant en S : le cercle décrit sur M'S comme diamètre passera par les points M, M', M''. Menons les tangentes MT, M'T', M''T'' à la courbe, en ces points : ces tangentes se couperont deux-à-deux en trois points P, Q, R. Soit enfin M'K le prolongement de la corde MM', et σ l'arc *de cercle* MM'M'' (qu'il ne faut pas confondre avec l'arc de courbe). Nous aurons

$$\sigma = \frac{M'S}{2} \cdot 2 \text{ angle } MSM'' = M'S \cdot \text{angle } KM'M'',$$

d'où

$$M'S = \frac{\sigma}{\text{angle } KM'M''}.$$

Mais, d'autre part, en appliquant le théorème du numéro 147, nous avons

$$\text{angle } KM'M'' = \text{angle } KM'T' + \text{angle } T'M'M'' = \text{angle } PM'M + \text{angle } T'M'M''$$
$$= \frac{1}{2}\text{angle } RPQ + \frac{1}{2}\text{angle } T'QT'' = \frac{1}{2}(\text{angle } RPQ + \text{angle } RQP) = \frac{1}{2}\text{angle } TRT''$$

l'erreur commise étant infiniment petite par rapport à l'angle KM'M''. En outre, l'arc σ de rayon fini, et l'arc de courbe MM'', ayant mêmes extrémités, leur rapport a pour limite l'unité. On a donc

$$lim\ M'S = lim \frac{\text{arc } MM''}{\frac{1}{2}\text{angle } TRT''} = 2\, lim \frac{\text{arc } MM''}{\text{angle } TRT''} = 2R,$$

R désignant toujours le rayon de courbure en M.

Enfin, l'angle MM'S, complément de l'angle infiniment petit MSM', ayant pour limite un angle droit, le diamètre M'S se rapproche indéfiniment d'une perpendiculaire en M à la tangente MT, c'est-à-dire de la normale en M. Le cercle MM'M'' a donc pour limite un cercle égal au cercle de courbure, tangent comme lui en M à la courbe, et placé du même côté de la tangente : *le cercle osculateur coïncide donc avec le cercle de courbure.*

On trouverait le même cercle en cherchant la limite du cercle tangent en M à la courbe, et passant par un point infiniment voisin M'.

158. Pour déterminer les coordonnées (α, β) du centre de courbure Z, correspondant à un point M (x, y) sur une courbe donnée, on exprimera d'abord que la distance MZ est égale au rayon de courbure, ce qui donnera l'équation

$$(1) \qquad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2.$$

En second lieu, le point Z étant sur la normale à la courbe au point M, ses coordonnées (α, β) doivent vérifier l'équation

$$\eta - y = -\frac{dx}{dy}(\xi - x)$$

de cette normale, d'où la relation

$$(2) \qquad (x-\alpha) + (y-\beta)\frac{dy}{dx} = 0.$$

En remplaçant dans l'équation (1), R par son expression connue, on aura deux équations qui feront connaître α et β. Éliminant $(x-\alpha)$ entre ces équations, on trouve d'abord

$$(y-\beta)^2\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right) = \frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^3}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}.$$

Supprimant le facteur $1+\frac{dy^2}{dx^2}$, prenant les racines carrées des deux membres, et observant que $y-\beta$ doit être de signe contraire à $\frac{d^2y}{dx^2}$, puisque le centre de courbure Z est, par rapport au point M, du côté où la courbe tourne sa concavité, on aura l'équation

$$y-\beta = -\frac{1+\frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

de laquelle on tire immédiatemen β; α sera connu par l'équation (2). On peut écrire l'équation précédente sous la forme

$$(3) \qquad 1 + \frac{dy^2}{dx^2} + (y - \beta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

qui nous sera utile par la suite.

154. Le point M se déplaçant sur la courbe donnée, le centre de courbure Z se déplace en même temps; y, α, β, R sont alors des fonctions, généralement continues, de la variable x, définies par les équations (1), (2) et (3), et par l'équation de la courbe. Le lieu du centre de courbure Z est donc une certaine courbe, que l'on nomme la *développée* de la courbe proposée; celle-ci prend, réciproquement, le nom de *développante*.

La développée jouit de propriétés remarquables. Pour les démontrer, différentions les équations (1) et (2) en observant que y, α, β, R dépendent de x : la seconde nous donne

$$\left(1 - \frac{d\alpha}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{dx} - \frac{d\beta}{dx}\right)\frac{dy}{dx} + (y - \beta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

ce qui se réduit, par l'équation (3), à

$$(4) \qquad d\alpha + d\beta\frac{dy}{dx} = 0.$$

De la première nous tirons

$$(x - \alpha)\left(1 - \frac{d\alpha}{dx}\right) + (y - \beta)\left(\frac{dy}{dx} - \frac{d\beta}{dx}\right) = \mathrm{R}\frac{d\mathrm{R}}{dx},$$

ce qui se réduit, par l'équation (2), à

$$(5) \qquad (x - \alpha)\,d\alpha + (y - \beta)\,d\beta = -\mathrm{R}d\mathrm{R}.$$

Enfin, les équations (2) et (4) combinées donnent

$$\frac{x - \alpha}{d\alpha} = \frac{y - \beta}{d\beta} = \frac{(x - \alpha)\,d\alpha + (y - \beta)\,d\beta}{d\alpha^2 + d\beta^2} = \pm\frac{\sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2}}{\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2}},$$

et cette dernière égalité se réduit, par les équations (1) et (5), à

$$-\mathrm{R}d\mathrm{R} = \pm \mathrm{R}\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2},$$

ou bien

$$(6) \qquad d\mathrm{R} = \mp\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2}.$$

L'équation (4), mise sous la forme

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{dx}{dy},$$

nous apprend que la tangente en Z à la développée, dont le coefficient angulaire est $\frac{d\beta}{d\alpha}$, est perpendiculaire à la tangente à la courbe en M, et comme Z est un point de la normale, celle-ci coïncide avec la tangente à la développée. Donc *la normale à la courbe en un point, touche la développée au centre de courbure qui correspond à ce point.*

En second lieu, si l'on nomme σ l'arc de la developpée, compté à partir d'un point fixe, sa différentielle $d\sigma$ sera, comme on sait, exprimée par $\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2}$; si, de plus, on suppose cet arc compté positivement dans le sens où le rayon R va en croissant, la formule (6) nous donnera

$$dR = d\sigma,$$

d'où (31), C étant une constante,

$$R = \sigma + C.$$

Si donc R′, R″ représentent deux rayons de courbure quelconques de la développante, σ' et σ'' les arcs de développée qui se terminent à ces deux rayons respectivement, nous aurons

$$R'' - R' = \sigma'' - \sigma',$$

c'est-à-dire que *la longueur d'un arc fini de la développée est égale à la différence des rayons de courbure de la développante, tangents à ses extrémités.*

Cette propriété suppose, bien entendu, que dR et $d\sigma$ restent de même signe sur toute l'étendue de l'arc, c'est-à-dire que le rayon de courbure R varie toujours dans le même sens entre les limites R′ et R″.

155. Le théorème précédent conduit à une conséquence importante. Concevons qu'un fil flexible, inextensible et sans épaisseur soit appliqué sur la développée, et s'en détache tangentiellement en un point Z pour venir se terminer en M, sur la développante. Imaginons ensuite que l'on détache successivement ce fil de la développée, en le tenant toujours tendu : l'accroissemeut que prend la portion rectiligne du fil, de la position MZ à une autre quelconque M′Z′, est évidemment égal à l'arc ZZ′ de la développée, ou à l'accroissement correspondant du rayon R; M′Z′ sera

donc encore égal au rayon de courbure qui touche la développée en Z', d'où il suit que *le point* M, *extrémité du fil, décrit la développante.*

Ce mode de génération de la développante permet de prouver que le cercle de courbure relatif à un point de cette courbe, traverse généralement la courbe en même temps qu'il la touche.

Considérons trois rayons de courbure infiniment voisins MZ, $M'Z'$, $M''Z''$, et joignons M et M'' au point Z', centre de courbure correspondant au point M'. En vertu du théorème ci-dessus, on aura, dans les triangles MZZ', $M''Z'Z''$, les relations



$$M'Z' = MZ + \text{arc } ZZ' > MZ + ZZ' > MZ',$$

$$M'Z' = M''Z'' - \text{arc } Z'Z'' < M''Z'' - Z'Z'' < M''Z'.$$

Donc le cercle décrit du centre Z' avec le rayon $M'Z'$, c'est-à-dire le cercle de courbure relatif au point M', coupe la droite $Z'M$ au-delà du point M, et de la droite $Z'M''$ en deçà du point M''; il traverse donc en M' la courbe proposée.

156. Pour trouver l'équation de la développée d'une courbe donnée

$$F(x, y) = 0,$$

on substituera d'abord dans les équations (2) et (3) les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ et de $\frac{d^2y}{dx^2}$ en x et y, tirées de l'équation de la courbe; ensuite, on éliminera x et y entre ces équations et celle de la courbe : l'équation résultante entre α et β sera l'équation de la développée.

Réciproquement, si l'équation de la développée

$$f(\alpha, \beta) = 0$$

était donnée, et que l'on voulût remonter à celle de la développante, on tirerait d'abord de cette équation la valeur de $\frac{d\beta}{d\alpha}$, et on la porterait dans l'équation (4). Éliminant ensuite α et β entre cette équation, l'équation (2) et celle de la développée, on obtiendrait une relation entre x, y et $\frac{dy}{dx}$, qui serait l'*équation différentielle* de la développante. Le calcul intégral sera nécessaire pour passer de cette équation à l'équation entre x et y seulement : nous verrons par la suite que cette dernière renfermera nécessairement une constante arbitraire, et donnera conséquemment une

infinité de développantes, pour une même développée. Ceci s'accorde avec les conséquences que l'on déduit du mode de génération de la développante, à l'aide d'un fil enroulé sur la développée, exposé au numéro précédent.

157. *Applications des théories précédentes.* — I. *Coniques en général.* L'équation des coniques, l'origine étant à un foyer F et l'axe des x dirigé suivant l'axe focal de la courbe, prend la forme

$$y^2 = p^2 + 2p\varepsilon x - (1 - \varepsilon^2)\, x^2,$$

p désignant le demi-paramètre, ε le rapport des distances d'un point quelconque au foyer et à la directrice voisine. On tire de cette équation, successivement,

$$y\frac{dy}{dx} = p\varepsilon - (1 - \varepsilon^2)\, x, \qquad y\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p^2}{y^2};$$

d'un autre côté, si l'on désigne par N la longueur de la normale, on voit facilement (121) que l'expression générale du rayon de courbure peut s'écrire sous la forme

$$\mathrm{R} = \pm \frac{\mathrm{N}^3}{y^3 \dfrac{d^2y}{dx^2}};$$

conséquemment, on aura, dans le cas actuel,

$$\mathrm{R} = \frac{\mathrm{N}^3}{p^2}.$$

Dans les coniques, le rayon de courbure est égal au cube de la normale, divisé par le carré du demi-paramètre.

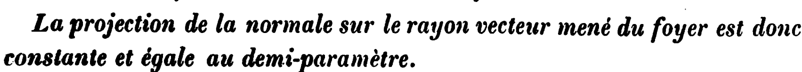
Projetons la normale MN sur le rayon vecteur FM, en MG; soient $r = \mathrm{MF}$, γ l'angle FMN compris entre le rayon vecteur et la normale. Nous trouverons, par l'équation de la courbe,

$$r = p + \varepsilon r, \quad \mathrm{FN} = x + y\frac{dy}{dx} = \varepsilon(p + \varepsilon x) = \varepsilon r,$$

$$\mathrm{FG} = \mathrm{FN}\cos \mathrm{NFG} = \varepsilon r \cos \mathrm{MFN} = \varepsilon x,$$

et enfin

$$\mathrm{MG} = \mathrm{N}\cos\gamma = \mathrm{MF} - \mathrm{FG} = r - \varepsilon x = p.$$



La projection de la normale sur le rayon vecteur mené du foyer est donc constante et égale au demi-paramètre.

On conclut de la relation $\mathrm{N}\cos\gamma = p$, que R peut être écrit sous la forme

$$\mathrm{R} = \frac{\mathrm{N}}{\cos^2\gamma},$$

expression qui conduit à la construction suivante du centre de courbure dans les coniques : on mène au point M, que l'on considère, le rayon vecteur et la normale ; par le point N, où celle-ci rencontre l'axe de la courbe, on lui élève une perpendiculaire NH qui coupe le rayon vecteur en H ; la perpendiculaire HZ au rayon vecteur coupera la normale au centre de courbure Z.

158. II. *Parabole*. — Cette courbe correspond au cas où $\varepsilon = 1$ dans le problème précédent. On a donc

$$y^2 = p^2 + 2px, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p^2}{y^3},$$

d'où

$$R = \frac{(p^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{p^3}.$$

Pour trouver l'équation de la développée, on éliminera x et y entre l'équation de la courbe et les équations

$$(x - \alpha) + (y - \beta)\frac{p}{y} = 0, \qquad 1 + \frac{p^2}{y^2} - (y - \beta)\frac{p^2}{y^3} = 0;$$

la dernière donne

$$y = -\beta^{\frac{1}{3}} p^{\frac{2}{3}};$$

la première

$$x - \alpha = -p + \frac{\beta p}{y} = -p - \frac{y^2}{p} = -2p - 2x, \quad x = \frac{\alpha - 2p}{3},$$

et en substituant dans l'équation de la courbe, il vient

$$\beta^{\frac{2}{3}} = \frac{2\alpha - p}{3p^{\frac{1}{3}}}$$

pour l'équation de la développée de la parabole. Cette courbe, symétrique par rapport à l'axe de la parabole, présente un rebroussement de première espèce au point $\left(\alpha = \frac{p}{2},\ \beta = 0\right)$.

159. *Ellipse*. On a ici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3},$$

$$R = a^2b^2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Or, si l'on désigne par c l'excentricité de l'ellipse, par r et r' les rayons vecteurs menés des foyers de l'ellipse au point (x, y), et par P la distance du centre à la tangente en ce point, on trouve

$$rr' = \left(a - \frac{cx}{a}\right)\left(a + \frac{cx}{a}\right) = \left(a^2 - \frac{c^2x^2}{a^2}\right) = a^2 - x^2 + \frac{b^2x^2}{a^2} = \frac{a^2y^2}{b^2} + \frac{b^2x^2}{a^2}$$
$$= a^2b^2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right), \quad \mathrm{P} = \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

d'où

$$\mathrm{R} = \frac{rr'}{\mathrm{P}}.$$

Le rayon de courbure est une quatrième proportionnelle à la perpendiculaire du centre sur la tangente, et aux rayons vecteurs menés des foyers au point donné.

Les équations (2) et (3) sont ici

$$(x - \alpha) - (y - \beta)\frac{b^2x}{a^2y} = 0, \qquad 1 + \frac{b^4x^2}{a^4y^2} - (y - \beta)\frac{b^4}{a^2y^3} = 0;$$

d'où

$$\frac{x - \alpha}{b^2x} = \frac{y - \beta}{a^2y} = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \frac{x^2}{a^4} + \frac{1}{b^2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = \frac{y^2}{b^4} + \frac{1}{a^2}\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right).$$

On tire de ces égalités, d'abord,

$$1 - \frac{\alpha}{x} = 1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2x^2}{a^4}, \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha}{x} = \frac{a^2 - b^2}{a^4}x^2,$$

d'où, enfin,

$$\frac{x}{a} = \left(\frac{a\alpha}{c^2}\right)^{\frac{1}{3}};$$

et de même

$$\frac{y}{b} = -\left(\frac{b\beta}{c^2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

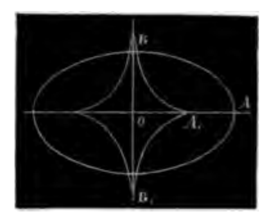
Substituant ces valeurs dans l'équation de l'ellipse, et posant, pour abréger,

$$\frac{c^2}{a} = \mathrm{A}, \quad \frac{c^2}{b} = \mathrm{B},$$

on trouvera pour l'équation de la développée

$$\left(\frac{\alpha}{\mathrm{A}}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\beta}{\mathrm{B}}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Cette courbe, symétrique par rapport aux axes de l'ellipse, présente quatre rebroussements de première espèce qui répondent aux sommets de l'ellipse. Les rayons de courbure de l'ellipse, aux sommets du grand et du petit axe, ont respectivement pour valeurs $\frac{b^2}{a}$, $\frac{a^2}{b}$; leur différence



$$\frac{a^3-b^3}{ab}$$

mesure donc (154) la longueur de l'arc correspondant A_1B_1 de la développée, ou le quart du périmètre de cette courbe.

160. *Hyperbole :* $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; calculs analogues, sauf remplacement de b^2 par $-b^2$; l'expression du rayon de courbure est la même; l'équation de la développée est

$$\left(\frac{\alpha}{A}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{\beta}{B}\right)^{\frac{2}{3}}=1,$$

où l'on a

$$A=\frac{c^2}{a},\qquad B=\frac{c^2}{b},\qquad c^2=a^2+b^2.$$

161. *Cycloïde.* — Des équations

$$x=a\,(\omega-\sin\omega),\qquad y=a(1-\cos\omega),$$

on déduit facilement

$$ds=2a\sin\frac{\omega}{2}\,d\omega.$$

On sait aussi que la tangente MB à la cycloïde passe par l'extrémité B du diamètre AC, en sorte que l'angle φ qu'elle fait avec l'axe des x est le complément de l'angle MBC, d'où

$$\varphi=\frac{\pi-\omega}{2},\qquad d\varphi=-\frac{d\omega}{2},$$

donc enfin

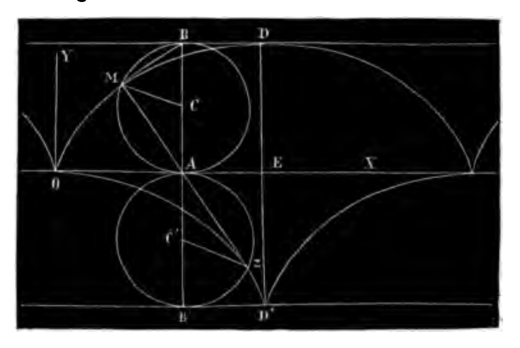
$$R=\pm\frac{ds}{d\varphi}=4a\sin\frac{\omega}{2}.$$

Mais la longueur N de la normale MA est égale à $2a\sin\frac{\omega}{2}$; donc

$$R=2\,N.$$

Le rayon de courbure de la cycloïde est double de la normale.

Cette propriété permet de trouver la développée sans calcul. Construisons le cercle AZB', égal au cercle générateur AMB et le touchant au point A; le diamètre AC'B'; la droite B'D' parallèle à la base de la cycloïde; et le point D', projection sur cette parallèle du milieu E de la base. La normale MA prolongée coupe le cercle AZB' en un point Z, et l'égalité des triangles MCA, AC'Z montre que AZ = MA et que Z est, par conséquent, le centre de courbure de la cycloïde au point M.



Or, nous avons

$$OE = a\pi, \qquad B\,D' = AE = OE - OA = a\pi - \text{arc } AM,$$
$$\text{arc } B'Z = a\pi - \text{arc } AZ = a\pi - \text{arc } AM = B'D',$$

d'où il suit que si le cercle AZB' roule sur la droite B'D' sans glisser, dans le sens D'B', le point de la circonférence qui coïncidait au départ avec D' coïncidera à chaque instant avec le centre de courbure Z, et décrira la développée de la cycloïde. *Cette développée n'est donc autre chose qu'une cycloïde égale à la proposée*, et qui se confondrait avec elle si on la déplaçait d'une quantité $2a$ dans le sens des y positifs, et d'une quantité $a\pi$ dans le sens des x positifs ou négatifs : les abscisses qui correspondent aux sommets de l'une, répondent aux rebroussements de l'autre.

Le calcul conduit à la même conséquence : on tire en effet, par la différentiation, des équations de la cycloïde,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\omega}{1-\cos\omega}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{a\,(1-\cos\omega)^2},$$

et par suite,

$$\alpha = a\,(\omega + \sin\omega), \qquad \beta = -a\,(1-\cos\omega).$$

Posant

$$\alpha = a\pi - x', \qquad \beta = y' - 2a, \qquad \omega = \pi - \omega',$$

on trouve

$$x' = a\,(\omega' - \sin\omega'), \qquad y' = a\,(1-\cos\omega'),$$

équations qui représentent une cycloïde égale à la cycloïde primitive.

A l'origine O, le rayon de courbure de la cycloïde est nul; au sommet D, il est égal à 2DE ou $4a$; l'arc OZD' de la développée, ou son égal OMD

de la cycloïde primitive, a donc pour longueur (154) deux fois le diamètre du cercle générateur.

162. *Spirale logarithmique.* — De l'équation de cette courbe

$$r = ae^{m\theta},$$

on tire

$$\frac{dr}{d\theta} = mr, \quad \frac{d^2r}{d\theta^2} = m^2 r, \quad R = r\sqrt{1 + m^2}.$$

Mais on a déjà vu (chap. XIII, § 2, ex. 3) que, dans cette courbe, la longueur N de la normale polaire est aussi égale à $r\sqrt{1+m^2}$; le centre de courbure est donc au point de rencontre N de la normale et d'une perpendiculaire au rayon vecteur OM menée par le pôle.

D'après cela, si l'on désigne par r', θ' les coordonnées de ce centre, on aura évidemment

$$r' = ON = S_n = mr, \quad \theta' = \frac{\pi}{2} + \theta,$$

et en éliminant r et θ entre ces équations et celle de la courbe,

$$r' = mae^{m\left(\theta' - \frac{\pi}{2}\right)};$$

cette équation, qui est celle de la développée de la spirale, représente une spirale égale à la première, car on peut, en déplaçant l'axe polaire, augmenter l'angle θ' d'une quantité α, telle que l'on ait

$$mae^{m\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} = 1.$$

On conclut de cette propriété que la spirale proposée est elle-même la développée d'une spirale égale, dont le rayon de courbure est MT; d'où il suit qu'*un arc quelconque de cette courbe est égal à la différence des longueurs des tangentes polaires qui répondent à ses extrémités.*

Exercices.

1. Démontrer les formules

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2, \quad \frac{1}{R} = \frac{d.\sin\varphi}{dx}, \quad R = r\frac{dr}{dP};$$

R, rayon de courbure; φ, inclinaison de la tangente sur l'axe des x; r, P, distances de l'origine au point de contact et à la tangente.

2. Rayon de courbure de la chainette (ch. XVI, ex. 2) :

$$R = \frac{y^2}{a} = N, \qquad R = \frac{a}{\cos^2 \varphi}.$$

3. Calculer, par la formule (V), le rayon de courbure au sommet de la courbe

$$y^2 = ax + bx^2 + \cdots + kx^m. \qquad \left(R = \frac{a}{2}\right).$$

4. Rayon de courbure de la courbe

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m = 1.$$

On trouve

$$R = \frac{1}{m-1} \frac{(ab)^m}{(xy)^{m-2}} \left(\frac{x^{2m-2}}{a^{2m}} + \frac{y^{2m-2}}{b^{2m}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Soient T, T′ les segments de la tangente entre le point de contact et les axes OX, OY respectivement, P la distance de l'origine à la tangente : on aura

$$(m-1) R = \frac{TT'}{P},$$

ce qui fournit une construction facile.

5. Trouver le rayon de courbure R′ de la développée de l'ellipse. — Appliquant la formule de l'exemple précédent à l'équation du nº 159, on a

$$R' = 3 \frac{(\alpha\beta)^{\frac{1}{3}}}{(AB)^{\frac{4}{3}}} \left(A^{\frac{4}{3}} \alpha^{\frac{2}{3}} + B^{\frac{4}{3}} \beta^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

On peut exprimer R′ en fonction des coordonnées (x, y) du point correspondant de l'ellipse, au moyen des relations

$$\frac{x}{a} = \left(\frac{\alpha}{A}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \frac{y}{b} = \left(\frac{\beta}{B}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad A = \frac{c^2}{a}, \quad B = \frac{c^2}{b};$$

il vient

$$R' = 3c^2xy \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{3c^2xy}{a^2b^2} R,$$

R étant le rayon de courbure de l'ellipse au point (x, y).

Soient T, N les segments compris entre les axes de l'ellipse, sur la tangente et la normale respectivement. On trouvera

$$\frac{T}{N} = \frac{a^2b^2}{c^2xy}, \qquad \frac{R}{R'} = \frac{1}{3}\frac{T}{N}.$$

6. Chercher le rayon de courbure de la podaire d'une courbe donnée, par rapport à un point O (ch. XIII, ex. 4; ch. XVI, ex. 4). — Conservant les notations ordinaires, et affectant de l'indice 1 celles qui se rapportent à la podaire, on a

$$ds_1 = r d\varphi, \qquad \varphi_1 = 2\varphi - \theta - \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{2}{r} - \frac{R \sin \mu}{r^2} = \frac{2}{r} - \frac{Rr_1}{r^3},$$

7. Les équations

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-c^2}=1, \qquad \frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-c^2}=1,$$

c étant donné ; λ, μ étant des paramètres arbitraires qui satisfont à la condition $\lambda^2>c^2>\mu^2$, représentent respectivement une infinité d'ellipses et d'hyperboles qui ont mêmes foyers. Par un point quelconque (x, y) passent une ellipse λ et une hyperbole μ qui se coupent à angle droit. Exprimer les rayons de courbure R_λ, R_μ de ces deux courbes en ce point, en fonction des paramètres λ et μ, et prouver que le centre de courbure de l'une est le pôle de sa tangente au point (x, y), par rapport à l'autre. — On a

$$R_\lambda=\frac{(\lambda^2-\mu^2)^{\frac{3}{2}}}{\lambda\sqrt{\lambda^2-c^2}}, \qquad R_\mu=\frac{(\lambda^2-\mu^2)^{\frac{3}{2}}}{\mu\sqrt{c^2-\mu^2}}.$$

8. Rayon de courbure et développée de la courbe

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}.$$

— On a d'abord

$$R=3(axy)^{\frac{1}{3}}, \qquad P=(axy)^{\frac{1}{3}}, \qquad R=3P,$$

ce qui permet de construire facilement le centre de courbure.

Ce point est déterminé par les équations

$$x-\alpha=-3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}, \qquad y-\beta=-3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}},$$

d'où

$$\alpha+\beta=\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)^3, \qquad \alpha-\beta=\left(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}\right)^3,$$

d'où l'équation de la développée

$$(\alpha+\beta)^{\frac{2}{3}}+(\alpha-\beta)^{\frac{2}{3}}=2a^{\frac{2}{3}}.$$

9. *Cissoïde :* $\qquad y^2(2a-x)-x^3=0.$

— On a

$$R=\frac{a\sqrt{x(8a-3x)^3}}{3(2a-x)^2}; \qquad 4093a^3\alpha+1152\alpha^2\beta^2+27\beta^4=0.$$

10. *Lemniscate :* $\qquad r^2=a^2\cos 2\theta.$

— On trouvera, N étant la normale polaire,

$$R=\frac{a^2}{3r}=\frac{N}{3},$$

et pour les coordonnées (α, β) du centre de courbure

$$\alpha=\frac{2a^2}{3}\frac{\cos^3\theta}{r}, \qquad \beta=\frac{2a^2}{3}\frac{\sin^3\theta}{r};$$

la développée est

$$\left(\alpha^{\frac{4}{3}}-\beta^{\frac{4}{3}}\right)\left(\alpha^{\frac{2}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}}\right)=\left(\frac{2a}{3}\right)^2.$$

11. Rayon de courbure de la podaire de la courbe $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, par rapport à l'origine.

— L'équation de cette podaire, en coordonnées polaires, est

$$r=\frac{a}{2}\sin 2\theta;\qquad \text{on a}\qquad R=\frac{(a^2-3r^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^2-3r^2}.$$

12. Démontrer que si l'on mène d'un point donné (α, β) la droite la plus courte ou la plus longue vers une courbe donnée, cette droite est normale à la courbe, et sa longueur est un maximum ou un minimum, selon que le point (α, β) est situé, sur cette normale, en deçà ou au-delà du centre de courbure correspondant.

13. Trouver le rayon de courbure en un point singulier de la courbe $F(x, y)=0$.

Conservant les notations des n°s 131 et suivants, on a, pour le rayon de courbure en un point (a, b),

$$R=\frac{\rho}{2(\theta-\alpha)}=\frac{H}{2f(\alpha)}=\frac{H}{\frac{d^2F}{da^2}\cos^2\alpha+2\frac{d^2F}{da\,db}\sin\alpha\cos\alpha+\frac{d^2F}{db^2}\sin^2\alpha}.$$

En un point singulier, $H=0$, et l'équation qui détermine les directions des tangentes est $f(\alpha)=0$. On trouve alors

$$R=-\frac{f'(\alpha)}{2f_1(\alpha)}.$$

Si (a, b) est un point de rebroussement de première espèce, $f'(\alpha)$ est nul, $R=0$. Si le rebroussement est de seconde espèce, on a, en outre, $f_1(\alpha)=0$, et les rayons de courbure des deux branches, au point singulier, sont les racines de l'équation

$$R^2+\frac{f'_1(\alpha)}{2f_2(\alpha)}R+\frac{f''(\alpha)}{8f_2(\alpha)}=0.$$

CHAPITRE XVIII.

DU CONTACT DES COURBES, ET DES COURBES OSCULATRICES.

162. Soient (A) et (B) deux courbes planes, ayant respectivement pour équations, par rapport à un système d'axes rectangulaires ou obliques,

$$y=f(x),\qquad \eta=\varphi(\xi).$$

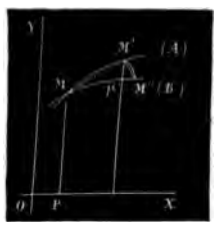
Soit $M(x, y)$ un point de la courbe (A); si la courbe (B) passe par ce point, pour $\xi=x$ on aura $\eta=y$. A partir du point M, donnons à l'abscisse un accroissement infiniment petit h, de signe quelconque : la différence des ordonnées y' et η', qui répondent à l'abscisse $x+h$ dans les courbes (A)

et (B), sera généralement *un infiniment petit de même ordre que h*, et l'on aura, k désignant une quantité finie différente de zéro,

$$\lim \frac{y' - \eta'}{h} = k.$$

On dit alors que les courbes (A) et (B) se coupent au point M.

Mais si la différence $y' - \eta'$ était du second ordre, par rapport à h, les deux courbes auraient au point M un *contact du premier ordre;* si elle était du troisième, le contact serait *du second ordre;* et, en général, on dit que *deux courbes* (A) *et* (B) *ont, en un point* M, *un contact de l'ordre n, lorsque la différence de leurs ordonnées correspondantes à une même abscisse, dans le voisinage du point* M, *est de l'ordre* $n+1$, *par rapport à l'accroissement de l'abscisse à partir de ce point.*



Tout cela suppose *essentiellement* que l'axe des y ne soit pas parallèle à la tangente à l'une des courbes (A) ou (B) au point M, ce qui changerait l'ordre infinitésimal des accroissements de y ou de η.

Ce cas excepté, on voit sans peine que l'ordre du contact ne dépend pas, en réalité, du choix des axes, et que la définition exprime une propriété indépendante de leur direction. Du centre M, avec un rayon infiniment petit, décrivons l'arc de cercle M'M''. L'arc MM' de la courbe (A), et l'accroissement correspondant h de l'abscisse, sont de même ordre, car la sécante MM' fait avec OY un angle qui ne tend pas vers zéro. La différence M'μ' des ordonnées des deux courbes est de même ordre que l'arc de cercle M'M'', car, dans le triangle M'μ'M'', les angles en μ' et en M'' tendent vers des limites finies différentes de zéro, et il en est de même de la limite du rapport de leurs sinus. Donc l'ordre infinitésimal de $y' - \eta'$ par rapport à h, est le même que celui de l'arc M'M'' par rapport à MM', il est donc indépendant de la direction des axes.

Si les courbes (A) et (B) ont au point M un contact de l'ordre n, il n'est pas possible qu'une troisième courbe (C), ayant avec l'une d'elles en ce même point un contact d'ordre inférieur à n, passe entre les deux premières. Il faudrait en effet pour cela que l'ordonnée de la courbe (C) différât moins de celle de la courbe (A), dans le voisinage du point M, que l'ordonnée de la courbe (B) : or, cette seconde différence, étant un infiniment petit d'ordre plus élevé que la première, finit toujours (35) par avoir une valeur absolue plus petite.

164. Pour déterminer les conditions analytiques du contact d'un certain ordre, entre deux courbes qui ont un point (x, y) commun, on observera que la différence $y' - \eta'$ des ordonnées des courbes (A) et (B) est une fonction de l'abscisse qui, au point M, c'est-à-dire pour $\xi = x$, s'annule; qui, en outre, comme fonction de $x + h$, peut être développée au moyen de la formule de Taylor, les dérivées étant supposées satisfaire aux conditions de continuité dans le voisinage du point M. On aura ainsi

$$y' - \eta' = h\left(\frac{dy}{dx} - \frac{d\eta}{d\xi}\right) + \frac{h^2}{1\cdot 2}\left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2\eta}{d\xi^2}\right) + \cdots + \frac{h^n}{1\cdot 2\cdots n}\left(\frac{d^ny}{dx^n} - \frac{d^n\eta}{d\xi^n}\right)$$
$$+ \frac{h^{n+1}}{1\cdot 2\cdots(n+1)}\left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} - \frac{d^{n+1}\eta}{d\xi^{n+1}}\right)_{x+\theta h},$$

et l'on voit d'abord que $y' - \eta'$ est en général du premier ordre, comme nous l'avons dit. Pour que $y' - \eta'$ soit de l'ordre $n + 1$ par rapport à h, il faut et il suffit que les coefficients des diverses puissances de h dans le second membre, jusqu'à l'ordre n inclusivement, soient nuls, et que le coefficient de h^{n+1} ne soit pas infiniment petit; en d'autres termes, il faut que l'on ait, pour $\xi = x$, $\eta = y$, les relations

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \quad \frac{d^n\eta}{d\xi^n} = \frac{d^ny}{dx^n}; \quad \frac{d^{n+1}\eta}{d\xi^{n+1}} \gtrless \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}.$$

Ainsi, *pour que deux courbes* (A) *et* (B) *qui ont un point* M *commun aient, en ce point, un contact de l'ordre n, il est nécessaire et suffisant que les dérivées de même ordre de l'ordonnée par rapport à l'abcisse, tirées des équations de ces courbes, soient égales deux à deux jusqu'à l'ordre n inclusivement, pour la valeur de x qui répond au point commun; et que les dérivées de l'ordre n + 1 soient inégales.*

165. Concevons maintenant que l'on donne l'équation de la courbe (A), et un point $M(x, y)$ sur cette courbe; que l'équation de la courbe (B) soit donnée seulement de forme, et renferme un certain nombre de coefficients ou *paramètres indéterminés*. On pourra se proposer de déterminer ces paramètres de manière à ce que la courbe (B) passe par le point M, et ait en ce point un contact de l'ordre le plus élevé possible avec la courbe A : elle est alors, parmi les courbes de son espèce, celle que l'on nomme l'*osculatrice* de la courbe (A).

Pour satisfaire à cette condition, il faudra, d'après la théorie ci-dessus, exprimer que l'ordonnée et ses dérivées successives par rapport à l'abscisse,

jusqu'à l'ordre voulu, ont les mêmes valeurs dans la courbe (A) et la courbe (B), pour l'abscisse x du point M. On obtiendra ainsi $n+1$ équations, si l'ordre du contact est n; il suffira donc que l'équation de la courbe (B) renferme $n+1$ paramètres indéterminés pour que l'on puisse satisfaire à ces $n+1$ équations. Et réciproquement, si l'équation de la courbe (B) renferme $n+1$ paramètres arbitraires, les conditions du contact de l'ordre n avec la courbe (A) en un point donné suffiront pour déterminer complètement ces $n+1$ paramètres, et par suite la courbe (B) : la courbe osculatrice de l'espèce (B) aura donc, en général, un contact de l'ordre n avec une courbe donnée.

166. Appliquons cette méthode à quelques exemples.

I. *Droite osculatrice.* L'équation de la ligne droite

$$\eta = a\xi + b$$

renferme deux paramètres a et b; la droite pourra donc avoir un contact du premier ordre avec une courbe (A) donnée, en un point (x, y), et il faudra pour cela satisfaire aux équations

$$\eta = y, \qquad \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{dy}{dx}, \quad \text{pour} \quad \xi = x.$$

Donc

$$y = ax + b, \qquad a = \frac{dy}{dx},$$

et en éliminant a et b entre ces équations et celle de la droite, on tombe sur l'équation

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x),$$

qui est celle de la tangente à la courbe (A) au point donné. La tangente n'est donc autre chose qu'une droite osculatrice : elle a généralement un contact du premier ordre avec la courbe, mais l'ordre du contact peut s'élever en certains points particuliers. Ainsi, comme l'équation de la droite donne $d^2\eta = 0$, les points de la courbe (A) qui satisferont à la condition $d^2y = 0$, donneront lieu à un contact du second ordre entre la courbe et sa tangente : on sait que les *points d'inflexion* sont dans ce cas.

II. *Cercle osculateur.* — L'équation du cercle en coordonnées rectangulaires

$$(\xi - \alpha)^2 + (\eta - \beta)^2 = R^2,$$

renferme trois paramètres α, β, R, ce qui permet un contact du second

ordre. Différentions deux fois de suite cette équation en prenant ξ pour variable indépendante, et substituons, dans les trois équations ainsi obtenues, à ξ, η, $\frac{d\eta}{d\xi}$, $\frac{d^2\eta}{d\xi^2}$, respectivement les coordonnées x, y du point donné, et les dérivées $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ tirées des équations de la courbe (A); nous trouverons, pour déterminer les paramètres α, β, R, les équations

$$\left\{\begin{array}{l} (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2, \\ x-\alpha+(y-\beta)\frac{dy}{dx}=0, \\ 1+\frac{dy^2}{dx^2}+(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}=0. \end{array}\right.$$

Mais ces équations sont précisément (153) celles qui déterminent le centre et le rayon de courbure de la courbe (A) au point (x, y): *le cercle de courbure est donc celui qui a le contact de l'ordre le plus élevé possible, avec une courbe donnée, en un point donné.*

Ce contact étant du second ordre, la différence $y'-\eta'$ est du troisième ordre par rapport à h, et change conséquemment de signe avec h; il en résulte cette propriété déjà connue du cercle osculateur, qu'il traverse la courbe au point même où il la touche.

III. *Paraboles osculatrices.* — La parabole de degré n, dont l'équation

$$\eta=a+b\xi+c\xi^2+\cdots+h\xi^n$$

renferme $n+1$ paramètres indéterminés $a, b,\ldots$, pourra offrir un contact d'ordre n avec une courbe donnée (A). La détermination des paramètres se fait ici très simplement, en développant l'ordonnée η suivant les puissances de $\xi-x$ par la formule de Taylor, et observant que les dérivées de η par rapport à ξ, d'ordre supérieur à n, sont toutes nulles. On a donc

$$\eta=y+(\xi-x)\frac{d\eta}{d\xi}+\frac{(\xi-x)^2}{1\cdot 2}\frac{d^2\eta}{d\xi^2}+\cdots+\frac{(\xi-x)^n}{1\cdot 2\cdots n}\frac{d^n\eta}{d\xi^n},$$

car, pour $\xi=x$, on doit avoir $\eta=y$. Si l'on remplace ensuite les dérivées de η, qui se rapportent à l'hypothèse $\xi=x$, par leurs valeurs (164), on aura pour l'équation de la parabole osculatrice

$$\eta=y+(\xi-x)\frac{dy}{dx}+\frac{(\xi-x)^2}{1\cdot 2}\frac{d^2y}{dx^2}+\cdots+\frac{(\xi-x)^n}{1\cdot 2\cdots n}\frac{d^ny}{dx^n},$$

et les paramètres $a, b,\ldots$, se trouveront ainsi déterminés.

167. La théorie générale du contact des courbes suppose la continuité des dérivées qui figurent dans le développement de $y' - \eta'$: elle cesserait d'être applicable aux points des courbes (A) et (B) où cette continuité n'existerait pas. L'ordre du contact pourrait alors n'être plus un nombre entier. Par exemple, si l'on considère la courbe (chap. XV, § 1, ex. 6) qui a pour équation

$$y = a + x^{\frac{5}{3}},$$

au point ($x = 0$, $y = a$), on trouvera

$$\frac{dy}{dx} = 0, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \infty,$$

et l'on verra sans peine que la courbe a, en ce point, avec sa tangente $\eta = a$, un contact de l'ordre $\frac{2}{3}$. Le rayon de courbure est nul.

Exercices.

1. Étant données une courbe, et sa tangente en un point A, on déplace chaque point M de la courbe, parallèlement à cette tangente, de manière que la droite qui joint le point déplacé M' à la projection P du point M sur la tangente fasse avec MP un angle constant α. Montrer que la courbe transformée a un contact du second ordre, au point A, avec la courbe primitive. Que faut-il pour que le contact soit du troisième ordre?

R. Soient $M(x, y)$; $M'(x', y')$ par rapport à la tangente et à la normale en M. On a $y' = y$; $x' = x + y \operatorname{tg} \alpha$; le calcul de $\frac{dy'}{dx'}$, $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ au point A, conduit au théorème énoncé; le contact est du 3me ordre si $d^2y = 0$.

2. Si l'on détermine les $n + 1$ paramètres d'une courbe (B) de telle manière que la courbe ait $n + 1$ points infiniment voisins communs avec une courbe (A), la courbe (B), à la limite, sera osculatrice de la courbe (A).

3. Lorsque deux courbes ont, en un point, un contact de l'ordre n, leurs développées premières ont un contact de l'ordre $n - 1$, leurs développées secondes un contact de l'ordre $n - 2$, et ainsi de suite.

4. On prend sur une courbe, à partir d'un point M, un arc infiniment petit $MM' = s$; soient c la corde de cet arc, R le rayon de courbure de la courbe au point M, R' celui de sa développée; φ, α les angles formés avec la tangente en M par la tangente en M' et la corde MM'; T le point de concours des deux tangentes. On a

$$s - c = \frac{s^3}{24R^2}, \quad \varphi - 2\alpha = -\frac{s^2}{6}\frac{R'}{R^3}, \quad MT + M'T - c = \frac{s^3}{8R^2},$$

en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur.

5. Lorsque deux courbes ont, en un point M, un contact du second ordre, si l'on prend, à partir de ce point, des arcs infiniment petits égaux sur les deux courbes, la

droite qui joint leurs extrémités a pour projection sur la normale en M, l'infiniment petit du troisième ordre

$$\frac{s^5}{6R^5}(R' - R_1),$$

et pour projection sur la tangente, l'infiniment petit du quatrième ordre

$$\frac{s^4}{8R^4}(R' - R_1),$$

R', R_1 étant les rayons de courbure des développées des deux courbes données.

CHAPITRE XIX.

DES COURBES ENVELOPPES.

168. Une équation de la forme

$$(1) \qquad F(x, y, \alpha) = 0,$$

dans laquelle α désigne un paramètre variable, représente une infinité de courbes, dont chacune correspond à une valeur déterminée de ce paramètre. A deux valeurs infiniment voisines α, $\alpha + h$ du paramètre, répondent deux courbes (C), (C'), qui se coupent généralement en un ou plusieurs points. Soit M_1 l'un de ces points d'intersection : h tendant vers zéro, la courbe (C') tend à se confondre avec (C), et le point M_1 s'approche indéfiniment, sur la courbe (C), d'une position limite M. Le lieu de ces points M, considérés sur toutes les courbes du système (1), se nomme *l'enveloppe* de ces courbes.

Pour en trouver l'équation, soient (x_1, y_1) les coordonnées du point M_1; ce point appartenant à la fois aux courbes (C) et (C'), ses coordonnées vérifieront les équations

$$F(x_1, y_1, \alpha) = 0, \qquad F(x_1, y_1, \alpha + h) = 0,$$

et par suite celle-ci

$$F(x_1, y_1, \alpha + h) - F(x_1, y_1, \alpha) = 0;$$

ou encore, si l'on applique une formule connue (88, IV), et si l'on désigne par F'_α la dérivée partielle de F par rapport à α,

$$F'_\alpha(x_1, y_1, \alpha + \theta h) = 0,$$

θ étant compris entre 0 et 1.

Lorsque h tend vers zéro, x_1 et y_1 ont respectivement pour limites les coordonnées x et y du point M; $0h$ a pour limite zéro; x et y satisfont donc aux équations

$$(2) \qquad F(x, y, \alpha) = 0, \qquad F'_\alpha(x, y, \alpha) = 0.$$

Ces équations conviennent aux points d'intersection de la courbe (C) par la courbe infiniment voisine, pris à la limite. Si donc on élimine α entre ces deux équations, on aura entre les coordonnées (x, y) du point M une équation indépendante de toute valeur particulière du paramètre α, et qui sera l'équation du lieu de ce point.

L'équation de l'enveloppe s'obtient donc par l'élimination du paramètre α, *entre l'équation* $F(x, y, \alpha) = 0$ *des courbes du système, et sa dérivée* $\frac{dF}{d\alpha} = 0$ *par rapport à ce paramètre.*

169. Cette règle suppose que la fonction $F(x, y, \alpha)$ ne soit pas une fonction *à détermination multiple* (37, 2°), sans quoi il pourrait se faire que le point d'intersection M_1 correspondit, sur la courbe (C), à l'une des formes de la fonction; sur la courbe (C′), à une autre; et dans ce cas il est clair que la formule du N° 88 ne serait plus applicable. Ainsi, l'enveloppe d'un cercle de rayon donné a, dont le centre parcourt l'axe des y, résulte de l'élimination de α entre les deux équations

$$F = x^2 + (y - \alpha)^2 - a^2 = 0, \qquad \frac{dF}{d\alpha} = -2(y - \alpha) = 0,$$

ce qui donne

$$x^2 - a^2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad x = \pm a;$$

elle se compose de deux droites parallèles, ce qui d'ailleurs était évident. Mais si l'équation du cercle variable était mise sous la forme

$$y = \alpha \pm \sqrt{a^2 - x^2},$$

la règle ci-dessus conduirait à l'équation absurde $1 = 0$. La raison en est que les points d'intersection de deux cercles infiniment voisins répondent, sur l'un, au signe supérieur, et sur l'autre, au signe inférieur du radical: en égalant les valeurs de y, on a

$$2\sqrt{a^2 - x_1^2} = h,$$

et à la limite $h = 0$, on retrouve l'équation $x^2 - a^2 = 0$.

170. *L'enveloppe du système de courbes* (1) *touche chacune des enveloppées* (C), *au point d'intersection limite* M.

Concevons que l'on ait tiré, de l'équation $F'_\alpha = 0$, la valeur de α,

$$\alpha = \varphi(x, y),$$

et qu'on la reporte dans l'équation (1) : on aura l'équation de la courbe enveloppe

$$F(x, y, \varphi) = 0,$$

et l'on trouvera le $\frac{dy}{dx}$ de cette courbe en différentiant totalement l'équation précédente, d'où

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dF}{d\varphi}\left(\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Mais $\frac{dF}{d\varphi}$ n'est autre chose que $\frac{dF}{d\alpha}$ dans lequel on remplacerait α par $\varphi(x, y)$, et est, par conséquent, nul identiquement. On a donc, pour déterminer le coefficient angulaire de la tangente à l'enveloppe, l'équation

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Elle ne diffère de celle qui détermine le $\frac{dy}{dx}$ d'une enveloppée (C), qui correspond à une valeur déterminée du paramètre α, que par la substitution de $\varphi(x, y)$ à ce paramètre. Or, au point M commun à l'enveloppe et à cette enveloppée, on a précisément $\varphi(x, y) = \alpha$, puisque ce point satisfait aux équations (2). Donc, pour ce point en particulier, la dérivée de l'ordonnée a la même valeur dans les deux courbes; les tangentes à l'enveloppe et à l'enveloppée coïncident donc.

Voici une application de cette propriété : on sait que deux normales infiniment voisines, dans une courbe donnée, se coupent en un point qui pour limite le centre de courbure (151). Il suit de là que le lieu des centres de courbure, c'est-à-dire la développée de la courbe donnée, n'est autre chose que l'enveloppe des normales à cette courbe : elle touche donc chacune de celles-ci, au centre de courbure correspondant, ce qui s'accorde avec une propriété démontrée.

171. Le problème des courbes enveloppes se présente fréquemment sous une forme un peu différente.

L'équation des courbes du système

$$(3) \qquad F(x, y, \alpha, \beta) = 0$$

renferme *deux* paramètres arbitraires α et β, entre lesquels on donne une relation

(4) $$\varphi(\alpha, \beta) = 0.$$

Le problème est, au fond, le même, puisque l'élimination du paramètre β nous ramènerait au premier cas; mais il vaut mieux conserver β dans l'équation (3), en l'y considérant comme une fonction de α définie par l'équation (4); l'application de la règle du n° 168 conduit alors au système d'équations

$$\frac{dF}{d\alpha} + \frac{dF}{d\beta}\frac{d\beta}{d\alpha} = 0, \qquad \frac{d\varphi}{d\alpha} + \frac{d\varphi}{d\beta}\frac{d\beta}{d\alpha} = 0.$$

Éliminant $\frac{d\beta}{d\alpha}$, on obtient l'égalité

(5) $$\frac{dF}{d\alpha}\frac{d\varphi}{d\beta} - \frac{dF}{d\beta}\frac{d\varphi}{d\alpha} = 0,$$

qui remplace la seconde des équations (2), et à laquelle doivent satisfaire les coordonnées (x, y) du point qui appartient à l'enveloppe. Eliminant ensuite α et β entre les équations (3), (4) et (5), on tombera sur l'équation de l'enveloppe cherchée.

Soit, comme exemple, à trouver l'enveloppe de la courbe

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^m + \left(\frac{y}{\beta}\right)^m = 1,$$

les paramètres α, β étant liés par l'équation

$$\left(\frac{\alpha}{a}\right)^p + \left(\frac{\beta}{b}\right)^p = 1,$$

où a et b sont des constantes données. On aura, en appliquant la méthode de ci-dessus,

$$\frac{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^m}{\left(\frac{\alpha}{a}\right)^p} = \frac{\left(\frac{y}{\beta}\right)^m}{\left(\frac{\beta}{b}\right)^p} = \frac{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^m + \left(\frac{y}{\beta}\right)^m}{\left(\frac{\alpha}{a}\right)^p + \left(\frac{\beta}{b}\right)^p} = 1.$$

De là on tire facilement

$$\left(\frac{\alpha}{a}\right)^{m+p} = \left(\frac{x}{a}\right)^m, \qquad \left(\frac{\beta}{b}\right)^{m+p} = \left(\frac{y}{b}\right)^m,$$

et par l'élimination des paramètres α, β,

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{mp}{m+p}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{mp}{m+p}} = 1,$$

pour l'équation de la courbe enveloppe.

Si $m=1$, la ligne mobile a pour équation

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1\,;$$

c'est une droite qui coupe les axes OX, OY aux distances α et β, respectivement, de l'origine. Soient, en outre, $b=a$, $p=2$; l'équation

$$\alpha^2+\beta^2=a^2$$

nous apprend que *la portion de cette droite comprise entre les axes rectangulaires a une longueur constante a.* L'enveloppe de cette droite mobile sera la courbe

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\,;$$

on reconnait facilement que c'est une *épicycloïde* engendrée par un point de la circonférence d'un cercle de rayon $\frac{a}{4}$, roulant intérieurement sur un cercle de rayon a.

Dans le cas où $m=2$, $p=2$, la courbe variable est une ellipse dont les demi-axes α, β satisfont à la condition

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}=1\,;$$

l'enveloppe se compose de quatre droites comprises dans l'équation

$$\pm\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=1.$$

172. L'équation d'une droite mobile renferme deux paramètres variables α et β : une équation entre ces paramètres déterminera donc, d'après ce qui précède, la courbe qui est l'enveloppe des positions successives de la droite. Toute courbe pouvant être considérée comme l'enveloppe de ses tangentes, sera, dans ce système de *coordonnées tangentielles*, représentée par une équation entre les paramètres α, β d'une tangente quelconque.

Exemple : La droite mobile ayant pour équation

$$\alpha x+\beta y+1=0,$$

avec la relation

$$A\beta^2+B\alpha\beta+C\alpha^2+D\beta+E\alpha+F=0,$$

on sera conduit aux égalités

$$\frac{x}{2C\alpha+B\beta+E}=\frac{y}{2A\beta+B\alpha+D}=\frac{1}{D\beta+E\alpha+2F}.$$

Les valeurs de α et β, déduites de ces équations, étant du premier degré en x et y, l'enveloppe sera une courbe du second ordre.

Exercices.

1. Deux points A et B étant donnés respectivement sur deux axes OX et OY, une droite mobile coupe ces axes en deux points M et N qui satisfont à la relation

$$AM : MO = ON : NB.$$

Trouver l'enveloppe de cette droite.

R. Soient $OA = a$, $OB = b$, $OM = \alpha$, $ON = \beta$. On a

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1, \qquad \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} = 1,$$

cas particulier du problème N° 171. L'enveloppe est la parabole

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

2. Un angle constant A tourne autour de son sommet fixe A ; ses côtés coupent une droite donnée PQ en deux points B et C. Quelle est l'enveloppe du cercle circonscrit au triangle ABC.

R. Soit a la perpendiculaire du point A sur la droite PQ. Cette perpendiculaire étant prise pour axe des x, l'axe des y étant la parallèle à PQ menée par le point A, l'enveloppe a pour équation

$$(x^2 + y^2)\left(x^2 + y^2 - \frac{4ax}{\sin^2 A} + \frac{4a^2}{\sin^2 A}\right) = 0;$$

elle se compose du point A et d'un cercle dont le centre et le rayon sont faciles à trouver. (Ce problème peut se résoudre très-simplement par la géométrie).

3. Enveloppe de la courbe

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^m + \left(\frac{y}{\beta}\right)^n = 1,$$

la relation entre les paramètres étant

$$\alpha^p \beta^q = k.$$

R. On trouve pour l'équation de la courbe enveloppe

$$x^{mnp} y^{mnq} = k\,\frac{(np)^{np}\,(mq)^{mq}}{(np + mq)^{np+mq}}.$$

Si $p = q$, c'est une hyperbole (ou un système de deux hyperboles) dont les asymptotes coïncident avec les axes coordonnés.

4. Si, dans le problème du N° 171, on désigne respectivement par ρ et R les rayons de courbure d'une enveloppée et de l'enveloppe, au point où elles se touchent, on a la relation

$$(m - 1)\,\rho = \left(\frac{mp}{m + p} - 1\right) R.$$

5. L'enveloppe de la droite mobile $y = \alpha x + \beta$ étant représentée par une équation.

entre α et β, le rayon de courbure de cette courbe a pour expression

$$R = \pm (1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}} \frac{d^2\beta}{d\alpha^2}.$$

6. *La caustique par réflexion* d'une courbe (C) par rapport à un point A (¹) est la développée de la podaire, par rapport à ce même point, de la courbe qu'on obtient en prolongeant chaque rayon AM mené du point A à la courbe (C), d'une longueur égale à lui-même. Déduire de là cette formule :

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{r} = \frac{2}{R\cos i},$$

r étant le rayon incident AM, l la longueur du rayon réfléchi terminé au point où il touche son enveloppe, R le rayon de courbure de la courbe (C), i l'angle d'incidence.

7. Trouver la caustique par réflexion du cercle de rayon a, le point rayonnant A étant sur la circonférence.

Rapportée à l'axe polaire OA, et à un pôle A_1 situé sur cet axe à une distance du centre égale au tiers du rayon, l'équation de la caustique est

$$r = \frac{2a}{3}(1+\cos\theta) \text{ (cardioïde).}$$

CHAPITRE XX.

TANGENTES ET PLANS NORMAUX AUX COURBES A DOUBLE COURBURE.

173. Toute courbe qui n'a pas tous ses points dans un même plan est dite *gauche* ou à *double courbure*.

Une telle courbe est représentée par deux équations entre les trois coordonnées x, y, z de l'un quelconque de ses points, en sorte que deux variables sont fonctions de la troisième. Mais, pour introduire plus de symétrie dans les formules, il vaut mieux considérer x, y, z comme fonctions d'une même variable indépendante t, choisie arbitrairement : c'est la différentielle dt de cette variable qui sera regardée comme constante. Lorsque, dans un cas donné, il y aura utilité à prendre pour variable indépendante l'une des coordonnées, x par exemple, il suffira de supposer que t se réduise à x et que dx soit constant.

(¹) On donne ce nom à l'enveloppe des rayons lumineux émanés du point A et réfléchis sur la courbe (C) suivant la loi régulière.

174. La tangente, en un point M d'une courbe à double courbure, est la *limite* de la sécante qui joint ce point à un point infiniment voisin M'. Soient (x, y, z), $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ les coordonnées de ces deux points respectivement. Les projections de la sécante sur les plans XZ, YZ auront pour coefficients angulaires respectifs $\frac{\Delta x}{\Delta z}$, $\frac{\Delta y}{\Delta z}$; leurs limites $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$ seront les coefficients angulaires de la tangente. Les équations de celle-ci, en désignant par ξ, η, ζ ses coordonnées courantes, seront donc

$$\xi - x = \frac{dx}{dz}(\zeta - z), \qquad \eta - y = \frac{dy}{dz}(\zeta - z);$$

les équations de la courbe fourniront les valeurs des dérivées de x et de y, en fonctions de x, y, z.

Les équations de la tangente peuvent s'écrire plus élégamment comme il suit :

$$(1) \qquad \frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy} = \frac{\zeta - z}{dz}.$$

Remarque. L'équation

$$\xi - x = \frac{dx}{dz}(\zeta - z)$$

est celle de la projection de la tangente sur le plan XZ. Or, la projection du point M sur ce plan a même x, même z, et par suite même $\frac{dx}{dz}$ que ce point: l'équation ci-dessus représente donc aussi la tangente à la projection de la courbe sur le plan XZ. Et comme ce plan est un plan quelconque, on en conclut que *si l'on projette sur un même plan une courbe et sa tangente en un point* M, *la projection de la tangente touchera la projection de la courbe, au point* M *projeté.*

175. Soient α, β, γ les *cosinus directeurs* de la tangente, c'est-à-dire les cosinus des angles qu'elle fait avec les directions des axes *positifs*, supposés rectangulaires. Une droite qui passe par un point (x, y, z), et dont les cosinus directeurs sont α, β, γ, a pour équations

$$\frac{\xi - x}{\alpha} = \frac{\eta - y}{\beta} = \frac{\zeta - z}{\gamma}.$$

Comparées aux équations (1) de la tangente, celles-ci donnent

$$(2) \qquad \frac{\alpha}{dx} = \frac{\beta}{dy} = \frac{\gamma}{dz} = \pm \frac{1}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}.$$

A partir du point de contact, on peut considérer sur la tangente deux directions opposées, caractérisées par des cosinus directeurs deux à deux égaux et de signes contraires : le signe supérieur, dans les équations (2), se rapporte à l'une de ces directions; le signe inférieur, à l'autre.

176. *La longueur d'un arc* de courbe à double courbure est, comme dans une courbe plane, la limite du périmètre d'un polygone infinitésimal inscrit dans la courbe, et ayant mêmes extrémités que cet arc. Les raisonnements et les formules du N° 143 s'appliquent, sans changement, à une courbe gauche; on en conclut de même que *le rapport d'un arc infiniment petit à sa corde a pour limite l'unité.*

Si donc s désigne la longueur de l'arc d'une courbe, partant d'un point fixe A et terminé à un point variable M (x, y, z) sur cette courbe, Δs sera l'arc infiniment petit MM', dont l'extrémité M' a pour coordonnées $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$. La corde MM' de cet arc ayant pour longueur $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$, nous aurons donc

$$\frac{ds}{dt} = lim\frac{\Delta s}{\Delta t} = lim\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2} = \sqrt{\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}},$$

d'où

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Cette expression de la différentielle de l'arc d'une courbe, rapportée à des axes coordonnés rectangulaires, permet d'écrire sous une autre forme les cosinus directeurs de la tangente. Les équations (2), où nous prendrons le signe supérieur seul, nous donnent évidemment

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \beta = \frac{dy}{ds}, \qquad \gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Le signe de α est celui de $\frac{dx}{ds}$, ou de $\frac{\Delta x}{\Delta s}$, ou encore, si l'on prend Δs positif, celui de Δx. Mais la direction MM' fait un angle aigu ou obtus avec l'axe des x positifs, selon que Δx est positif ou négatif : le cosinus de cet angle sera donc de même signe que α. D'où il résulte que *les formules précédentes se rapportent à la direction de la tangente, menée dans le sens où l'arc s va en augmentant.*

177. Le *plan normal,* en un point d'une courbe à double courbure, est le plan mené par ce point perpendiculairement à la tangente.

La droite qui joint un point quelconque (ξ, η, ζ) de ce plan au point donné (x, y, z), a ses cosinus directeurs proportionnels à $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$; elle fait un angle droit avec la tangente dont les cosinus directeurs sont proportionnels à dx, dy, dz. La relation entre les cosinus directeurs de deux droites rectangulaires nous donne

$$(3) \qquad (\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0$$

pour l'équation du plan normal. Les équations de la courbe, différentiées, fourniront deux équations entre dx, dy, dz, à l'aide desquelles on éliminera ces différentielles de l'équation (3).

Tout plan mené par la tangente se nomme un *plan tangent* à la courbe; toute droite située dans le plan normal, et passant par le point de contact, se nomme une *normale* à la courbe.

Exercices.

1. L'*hélice* est la courbe qui coupe sous un angle constant τ toutes les génératrices d'un cylindre circulaire droit. Soit a le rayon du cylindre, dont l'axe est pris pour axe des z; l'axe des y étant mené par un point de l'hélice, et les axes étant d'ailleurs rectangulaires, on trouve pour les équations de l'hélice, en posant $m = a \cot \tau$,

$$\frac{x}{a} = \sin\frac{z}{m}, \qquad \frac{y}{a} = \cos\frac{z}{m}, \qquad x^2 + y^2 = a^2.$$

Les équations de la tangente et du plan normal sont

$$\frac{\xi - x}{y} = \frac{\eta - y}{-x} = \frac{\zeta - z}{m};$$

$$\xi y - \eta x + (\zeta - z)\,m = 0.$$

Différentielle de l'arc :

$$ds = \frac{dz}{m}\sqrt{a^2 + m^2} = \frac{dz}{\cos\tau}.$$

Cosinus directeurs de la tangente :

$$\alpha = \frac{y}{a}\sin\tau, \qquad \beta = -\frac{x}{a}\sin\tau, \qquad \gamma = \cos\tau.$$

Lieu de la trace de la tangente sur le plan XY :

$$\xi \sin\sqrt{\frac{\xi^2 + \eta^2}{a^2} - 1} + \eta \cos\sqrt{\frac{\xi^2 + \eta^2}{a^2} - 1} = a.$$

2. L'*ellipse sphérique* est le lieu des points M sur la sphère, tels que les arcs de grand cercle qui joignent ces points à deux points fixes F et F′ donnent une somme constante.

Soient O le centre, a le rayon de la sphère; 2ε l'angle FOF′, 2σ la somme des angles MOF + MOF′. Prenant pour axes OZ perpendiculaire au plan FOF′, OY passant par le

milieu de FF′, OX perpendiculaire sur OY et OZ, on trouve pour équations de l'ellipse sphérique

$$x^2+y^2+z^2=a^2, \qquad \frac{\sin^2\varepsilon}{\sin^2\sigma}x^2+\frac{\cos^2\varepsilon}{\cos^2\sigma}y^2=a^2.$$

Les équations de la tangente et du plan normal sont

$$\frac{(\xi-x)x}{-\operatorname{tg}^2\sigma}=\frac{(\eta-y)y}{\operatorname{tg}^2\varepsilon}=\frac{(\zeta-z)z}{\operatorname{tg}^2\sigma-\operatorname{tg}^2\varepsilon};$$

$$\left(\frac{\xi}{x}-\frac{\zeta}{z}\right)\operatorname{tg}^2\sigma-\left(\frac{\eta}{y}-\frac{\zeta}{z}\right)\operatorname{tg}^2\varepsilon=0.$$

3. La courbe, intersection des deux surfaces

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad a^2(b^2-c^2)\,\mathrm{l}.x+b^2(c^2-a^2)\,\mathrm{l}.y+c^2(a^2-b^2)\,\mathrm{l}.z=k,$$

aura sa tangente représentée par les équations suivantes, où l'on a posé

$$\frac{1}{\mathrm{p}^2}=\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}:$$

$$\frac{\xi-x}{x\left(\frac{1}{\mathrm{p}^2}-\frac{1}{a^2}\right)}=\frac{\eta-y}{y\left(\frac{1}{\mathrm{p}^2}-\frac{1}{b^2}\right)}=\frac{\zeta-z}{z\left(\frac{1}{\mathrm{p}^2}-\frac{1}{c^2}\right)}.$$

Plan normal :

$$(\xi-x)x\left(\frac{1}{\mathrm{p}^2}-\frac{1}{a^2}\right)+(\eta-y)y\left(\frac{1}{\mathrm{p}^2}-\frac{1}{b^2}\right)+(\zeta-z)z\left(\frac{1}{\mathrm{p}^2}-\frac{1}{c^2}\right)=0.$$

Différentielle de l'arc :

$$ds=\frac{rdr}{\sqrt{r^2-\mathrm{p}^2}}, \qquad r^2=x^2+y^2+z^2.$$

4. Une courbe, tracée sur une sphère de rayon 1, étant définie par une équation entre l'arc de grand cercle ρ mené d'un *pôle* A, et l'angle ω que fait cet arc avec un grand cercle fixe, soit V l'angle compris entre la tangente à la courbe et le rayon ρ. On a

$$\operatorname{tg}V=\frac{\sin\rho}{\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)}, \qquad ds^2=d\rho^2+\sin^2\rho\,d\omega^2, \qquad \sin V=\sin\rho\,\frac{d\omega}{ds}.$$

CHAPITRE XXI.

PLAN TANGENT ET NORMALE AUX SURFACES COURBES.

178. Soit

$$(1) \qquad z = f(x, y)$$

l'équation d'une surface, et M (x, y, z) un point pris sur cette surface. Par ce point, on peut faire passer une infinité de courbes sur la surface donnée: soit (C) l'une de ces courbes. Sa tangente au point M a pour équations (174)

$$\frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy} = \frac{\zeta - z}{dz},$$

les différentielles dx, dy, dz appartenant à la courbe (C). Or, cette courbe étant située sur la surface, ses coordonnées vérifient l'équation $z = f(x, y)$ de celle-ci, et par suite, leurs différentielles dx, dy, dz doivent satisfaire à l'équation que l'on obtient en différentiant l'équation de la surface, savoir

$$dz = pdx + qdy,$$

p et q désignant les dérivées partielles $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ tirées de l'équation (1). Substituons à dx, dy, dz dans cette équation, les quantités $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$ qui leur sont proportionnelles dans les équations de la tangente: il vient

$$(2) \qquad \zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y),$$

et cette équation ayant lieu pour un point quelconque (ξ, η, ζ) de la tangente en M à une courbe quelconque (C) tracée sur la surface, représente le lieu géométrique de toutes ces tangentes. Mais l'équation (2) est du premier degré en (ξ, η, ζ) : donc, *le lieu des tangentes menées, en un point d'une surface, à toutes les courbes que l'on peut faire passer par ce point, est un plan*, qui se nomme *le plan tangent à la surface en ce point*. Il est représenté par l'équation (2).

Si l'équation de la surface était mise sous la forme

$$(3) \qquad F(x, y, z) = 0,$$

on verrait de même que les différentielles dx, dy, dz des coordonnées de la courbe (C) vérifient l'équation

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{dz}dz = 0,$$

et en leur substituant les quantités proportionnelles dans les équations de la tangente, on trouverait

$$(4) \quad (\xi - x)\frac{dF}{dx} + (\eta - y)\frac{dF}{dy} + (\zeta - z)\frac{dF}{dz} = 0$$

pour l'équation du plan tangent au point (x, y, z).

179. L'existence du plan tangent repose essentiellement, on le voit, sur la propriété qu'ont les différentielles dx, dy, dz d'une courbe quelconque (C) tracée sur la surface, de satisfaire à une équation homogène du premier degré, dont les coefficients D_xF, D_yF, D_zF ne dépendent pas de la détermination particulière de cette courbe. Cette propriété, qui a lieu généralement pour un point quelconque de la surface, peut cesser d'être vraie en certains points particuliers : c'est ce qui arrivera si, au point donné (x, y, z), les dérivées partielles D_xF, D_yF, D_zF sont nulles simultanément. Dans ce cas, on différentiera une seconde fois l'équation de la surface en observant que les coefficients de d^2x, d^2y, d^2z sont nuls au point considéré ; on remplacera encore dx, dy, dz par les quantités proportionnelles $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$ tirées des équations de la tangente à la courbe (C), et l'équation du lieu des tangentes à la surface au point (x, y, z) sera

$$(\xi - x)^2\frac{d^2F}{dx^2} + (\eta - y)^2\frac{d^2F}{dy^2} + (\zeta - z)^2\frac{d^2F}{dz^2} + 2(\eta - y)(\zeta - z)\frac{d^2F}{dydz}$$
$$+ 2(\zeta - z)(\xi - x)\frac{d^2F}{dxdz} + 2(\xi - x)(\eta - y)\frac{d^2F}{dxdy} = 0.$$

Elle représente un cône du second degré qui a pour sommet le point (x, y, z).

180. La *normale* en un point (x, y, z) d'une surface, est la perpendiculaire élevée en ce point sur le plan tangent.

Les axes coordonnés étant supposés rectangulaires, et les angles directeurs de la normale étant désignés respectivement par (λ, μ, ν), les équations de cette droite seront, comme on sait,

$$\frac{\xi - x}{\cos\lambda} = \frac{\eta - y}{\cos\mu} = \frac{\zeta - z}{\cos\nu}.$$

Mais l'équation du plan tangent, prise sous la forme (2), nous fournit

les relations suivantes pour exprimer que la direction (λ, μ, ν) est perpendiculaire à ce plan :

$$\frac{\cos\lambda}{p} = \frac{\cos\mu}{q} = \frac{\cos\nu}{-1} = \pm \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Les équations de la normale seront donc

$$\frac{\xi - x}{p} = \frac{\eta - y}{q} = \frac{\zeta - z}{-1}.$$

De même, si l'équation de la surface était donnée sous la forme (5), on aurait

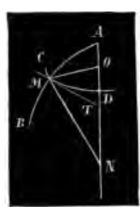
$$\frac{\cos\lambda}{\frac{dF}{dx}} = \frac{\cos\mu}{\frac{dF}{dy}} = \frac{\cos\nu}{\frac{dF}{dz}} = \pm \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}},$$

pour exprimer les cosinus directeurs de la normale, et les équations de la normale prendraient la forme.

$$\frac{\xi - x}{\frac{dF}{dx}} = \frac{\eta - y}{\frac{dF}{dy}} = \frac{\zeta - z}{\frac{dF}{dz}}.$$

Le double signe, dont sont affectés les cosinus directeurs de la normale, se rapporte aux deux directions opposées que l'on peut considérer sur cette droite, à partir du point (x, y, z) où elle perce la surface. En général, la surface $F(x, y, z) = 0$ sépare l'espace en deux régions, dont l'une *extérieure* qui correspond à $F(x, y, z) > 0$, l'autre *intérieure* pour laquelle $F(x, y, z) < 0$. Le signe supérieur se rapporte à la normale menée vers la région extérieure.

181. Lorsque la surface est *de révolution*, soient AMB le *méridien*, CMD le *parallèle* qui passent par le point M où l'on veut mener un plan tangent; OM le rayon du parallèle qui aboutit au point M. La tangente MT au parallèle, étant perpendiculaire, à la fois, à l'axe de révolution et au rayon OM du cercle parallèle, est perpendiculaire au plan du méridien AMB, qui passe par ces deux droites. Le plan tangent en M doit contenir la tangente MT; il est donc perpendiculaire au plan du méridien, et *la normale* MN *à la surface est dans ce plan, en sorte qu'elle va couper l'axe de révolution*. De plus, MN est en même temps

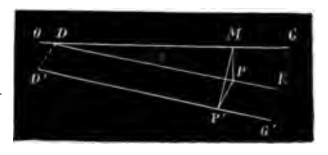


normale au méridien AMB; quand celui-ci, tournant autour de l'axe, engendre la surface proposée, et entraîne avec lui sa normale MN, cette droite MN ne cesse pas d'être dans le plan du méridien et d'être normale à celui-ci; elle coïncidera donc dans toutes ses positions avec la normale à la surface, et comme son point de rencontre N avec l'axe est invariable, on voit que *les normales à une surface de révolution, menées aux différents points situés sur un même parallèle, vont couper l'axe de révolution en un même point, et sont également inclinées sur cet axe.*

182. *Plan tangent à une surface réglée.* — On nomme *surface réglée* toute surface engendrée par une droite, assujettie à se mouvoir suivant des conditions déterminées. Cette droite, considérée dans une quelconque de ses positions, est la *génératrice.* Les cônes, les cylindres, l'hyperboloïde à une nappe sont des surfaces réglées.

Toute droite étant sa propre tangente, *le plan tangent en un point* M *d'une surface réglée contient la génératrice qui passe par ce point.* Mais il existe, sous le rapport du plan tangent, une différence essentielle entre les diverses surfaces réglées, et qui les partage en deux classes.

Soient (G) la génératrice qui passe par le point M, (G′) une génératrice infiniment voisine, DD′ la perpendiculaire qui mesure la plus courte distance η de ces deux droites, et DK une parallèle à (G′). Menons, dans le plan GDK, MP perpendiculaire à (G), et dans le plan G′DK, PP′ égal et parallèle à DD′; P′M sera perpendiculaire à (G), et l'angle P′MP mesurera l'inclinaison du plan DMP′ sur le plan GDK. Or, les triangles rectangles MPP′, PMD donnent



$$\text{tg P'MP} = \frac{\text{PP}'}{\text{MP}} = \frac{\text{DD}'}{\text{MP}}, \quad \text{MP} = \text{MD tg MDP} = \text{MD tg } \varepsilon,$$

ε désignant l'angle GDK de deux génératrices infiniment voisines; d'où

$$\text{tg P'MP} = \frac{1}{\text{MD}} \cdot \frac{\eta}{\text{tg}\,\varepsilon}.$$

Le plan GDK, mené par la génératrice (G) parallèlement à la génératrice infiniment voisine (G′), tend vers une position limite que nous nommerons le *plan asymptotique,* et le point D, pied de la perpendiculaire DD′, tend vers une position limite O, que nous appellerons le *point central* de la génératrice (G). Le plan DMP′ est évidemment, à la limite, le plan

tangent à la surface en M; l'angle P'MP tend donc vers l'angle α, inclinaison du plan tangent en M sur le plan asymptotique, et si nous désignons par v la distance du point de contact M au point central O, l'équation précédente nous donnera

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{v} \lim \left(\frac{\eta}{\varepsilon}\right).$$

Deux cas peuvent se présenter : 1° Si, pour une génératrice quelconque de la surface, le rapport $\eta : \varepsilon$ tend vers une limite finie i, nous aurons

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{i}{v},$$

et le facteur i étant indépendant de la position du point M sur la génératrice (G), α variera en même temps que v. *Les plans tangents aux différents points d'une même génératrice seront donc distincts les uns des autres; la tangente de leur inclinaison sur le plan asymptotique variera en raison inverse de la distance du point de contact au point central.*

La surface est dite une *surface gauche*. Exemple : le paraboloïde hyperbolique.

Au point O, $v = 0$, $\operatorname{tg} \alpha = \infty$, le plan tangent est à angle droit sur le plan asymptotique. Lorsque v croît indéfiniment, $\operatorname{tg} \alpha$ tend vers zéro, le plan tangent tend à se confondre avec le plan asymptotique.

2° Si, quelle que soit la génératrice (G), le rapport $\frac{\eta}{\varepsilon}$ a pour limite zéro, $\operatorname{tg} \alpha$ est nul et α aussi, quel que soit v : *le plan tangent est donc le même pour tous les points d'une même génératrice, et coïncide avec le plan asymptotique relatif à cette génératrice.* La surface est dite alors *développable.*

Dans une surface *conique* où toutes les génératrices se coupent en un même point, on a constamment $\pi = 0$ et $\varepsilon > 0$, donc $\frac{\eta}{\varepsilon}$ est nul : les surfaces coniques sont donc des surfaces développables; le plan tangent touche la surface tout le long de la génératrice, et n'est autre chose que la limite du plan passant par deux génératrices infiniment voisines.

Dans les surfaces *cylindriques,* l'angle ε est nul et la distance η ne l'est pas; $\operatorname{tg} \alpha = \infty$, $\alpha = \frac{\pi}{2}\cdot$ Le plan asymptotique passant par la génératrice (G), et perpendiculaire à DD', est donc perpendiculaire au plan tangent en

un point quelconque M de (G), c'est-à-dire *que le plan tangent touche encore la surface tout le long de la génératrice* G, *et coïncide avec le plan* (G) (G′) *mené par deux génératrices infiniment voisines.* Les surfaces cylindriques appartiennent donc aussi à la classe des surfaces développables.

183. On observera que, dans une surface développable, le plan tangent au point central O, se confondant avec le plan asymptotique, doit être normal à DD′, ce qui semble contre la définition du plan tangent : mais on va voir que le point O est un point singulier.

Considérons, sur chacune des génératrices, son point central O : le lieu de ces points sera, en général, une courbe continue OO′O″...La droite OO′ qui réunit les points centraux des génératrices infiniment voisines (G) et (G′), fait avec (G) un certain angle GOO′ que nous désignons par φ, et, si l'on mène O′P perpendiculaire sur (G), le triangle O′OP donnera



$$\sin\varphi = \frac{O'P}{OO'}.$$

Or, si l'on conçoit la position de chaque génératrice comme déterminée par la valeur que prend une certaine variable t, l'arc de courbe OO′, et l'angle ε, pourront être considérés comme accroissements infiniment petits de fonctions de la variable t, et seront de même ordre que Δt; tandis que la perpendiculaire O′P, dont la différence avec DD′ ou η est infiniment petite par rapport à ε, sera comme DD′, infiniment petite par rapport à Δt, et à OO′. On a donc

$$lim \sin\varphi = 0, \qquad lim\, \varphi = 0,$$

c'est-à-dire que la tangente en O à la courbe OO′O″..., lieu des points centraux, se confond avec la génératrice (G).

Les génératrices d'une surface développable sont donc tangentes à une même courbe, lieu des points centraux sur toutes ces génératrices; c'est l'arête de rebroussement de la surface.

Réciproquement, toute surface développable peut être considérée comme le lieu des tangentes à une courbe à double courbure. Dans les surfaces coniques, cette courbe se réduit à un point; dans les surfaces cylindriques, elle est transportée à l'infini.

184. De cette propriété des surfaces développables découle la suivante, d'où elles tirent leur nom.

Inscrivons dans l'arête de rebroussement un polygone infinitésimal et *gauche*, $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$..., et concevons que ses côtés soient indéfiniment prolongés dans les deux sens; les portions planes et indéfinies comprises entre deux côtés consécutifs formeront, par leur ensemble, une surface polyédrale indéfinie. En faisant tourner chacune des faces autour d'une de ses arêtes, on pourra ramener toutes ces faces indéfinies dans un même plan, et étaler la surface polyédrale sur un plan, *sans altérer les longueurs des lignes tracées sur cette surface.* Cette propriété ne cesse évidemment pas de subsister lorsque, tous les sommets du polygone $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$... se rapprochant indéfiniment les uns des autres sur l'arête de rebroussement, ses côtés, ou les arêtes de la surface polyédrale, tendent respectivement vers les tangentes à la courbe; la surface polyédrale tend indéfiniment à se confondre avec la surface développable, lieu de ces tangentes, et ses faces ont pour limites, comme nous le verrons, les plans tangents à cette développable. La propriété subsiste donc pour cette surface limite, et *toute surface développable peut être appliquée sur un plan sans altération des éléments de longueur des lignes tracées sur cette surface.*

On dit souvent que deux génératrices consécutives ne se coupent pas, dans une surface gauche, tandis qu'elles se coupent toujours dans une surface développable. Ce langage inexact doit être entendu dans ce sens, que la plus courte distance de deux génératrices infiniment voisines étant du premier ordre dans les surfaces gauches, et d'un ordre supérieur dans les surfaces développables, peut être négligée dans celles-ci et non dans les premières, lorsque la question n'exige que la considération des infiniment petits du premier ordre.

Exercices.

1. Surface dont l'équation est $xyz = a^3$.

Plan tangent : $\frac{\xi}{x} + \frac{\eta}{y} + \frac{\zeta}{z} = 3.$

Normale : $x(\xi - x) = y(\eta - y) = z(\zeta - z).$

2. Trouver, en coordonnées rectangles, 1° la distance P de l'origine O au plan tangent à une surface $z = f(x, y)$; 2° le lieu du pied (x_1, y_1, z_1) de cette perpendiculaire, ou la *podaire* de la surface par rapport au point O; 3° la normale à cette podaire.

R. On a

$$P = \pm \frac{z - px - qy}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

L'équation de la podaire résulte de l'élimination de x, y, z entre l'équation de la surface et les suivantes :

$$z_1 - z = p(x_1 - x) + q(y_1 - y), \qquad \frac{x_1}{p} = \frac{y_1}{q} = \frac{z_1}{-1}.$$

En éliminant p et q on trouve

$$(x_1 - x)x_1 + (y_1 - y)y_1 + (z_1 - z)z_1 = 0,$$

équation qui, différentiée, donne

$$x_1 dx + y_1 dy + z_1 dz = (2x_1 - x)dx_1 + (2y_1 - y)dy_1 + (2z_1 - z)dz_1.$$

Le premier membre étant nul, le second l'est aussi, ce qui montre que toute tangente à la podaire au point x_1, y_1, z_1 est perpendiculaire à la droite dont les cosinus directeurs sont proportionnels à $x_1 - \frac{x}{2}$, $y_1 - \frac{y}{2}$, $z_1 - \frac{z}{2}$; *la normale à la podaire est donc la droite qui joint le point* (x_1, y_1, z_1) *au milieu du rayon vecteur, mené de l'origine au point* (x, y, z).

3. Plan tangent et podaire de la surface

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m + \left(\frac{z}{c}\right)^m = 1.$$

R. $$\frac{x^{m-1}\xi}{a^m} + \frac{y^{m-1}\eta}{b^m} + \frac{z^{m-1}\zeta}{c^m} = 1;$$

$$(ax_1)^{\frac{m}{m-1}} + (by_1)^{\frac{m}{m-1}} + (cz_1)^{\frac{m}{m-1}} = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^{\frac{m}{m-1}}.$$

Pour $m = 2$ la surface donnée est un ellipsoïde, sa podaire est la *surface d'élasticité* de Fresnel.

4. Un point (x_1, y_1, z_1) étant pris pour *pôle*, le plan $\xi x_1 + \eta y_1 + \zeta z_1 = k^2$ est son *plan polaire* par rapport à l'origine O, k^2 étant constant. La *polaire réciproque* (S') d'une surface (S) est le lieu du pôle du plan tangent à cette surface : prouver que, réciproquement, le plan tangent à la surface (S') en un point, a pour pôle le point de contact du plan tangent à la surface (S) au point correspondant.

5. La *surface des ondes* a pour équation

$$RS - T + q = 0,$$

où l'on a posé

$$R = x^2 + y^2 + z^2, \quad S = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2, \quad T = a^2(b^2+c^2)x^2 + b^2(c^2+a^2)y^2 + c^2(a^2+b^2)z^2,$$
$$q = a^2b^2c^2, \quad a > b > c.$$

L'équation du plan tangent est

$$x[a^2(R - b^2 - c^2) + S](\xi - x) + y[b^2(R - c^2 - a^2) + S](\eta - y) + z[c^2(R - a^2 - b^2) + S](\zeta - z) = 0.$$

Soient $a' = \pm\sqrt{b^2 - c^2}$, $b' = \sqrt{a^2 - c^2}$, $c' = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$; les quatre points

$$x = \frac{cc'}{b'}, \qquad y = 0, \qquad z = \frac{aa'}{b'},$$

sont des *points singuliers*, où il n'y a pas de plan tangent. Le lieu des tangentes est un cône du second degré qui a pour équation

$$\left(\frac{\xi-x}{a'}\right)^2+\left(\frac{\zeta-z}{c'}\right)^2-\frac{b'^2}{a^2c^2}\eta^2+\frac{a^2+c^2}{aa'cc'}(\xi-x)(\zeta-z)=0,$$

x et z ayant les valeurs ci-dessus.

6. Soient $x=mz+\alpha$, $y=nz+\beta$ les équations de la génératrice d'une surface réglée, m, n, α, β étant donnés en fonction d'un paramètre variable t. Pour que la surface soit développable, il faut que les différentielles des paramètres par rapport à t satisfassent à la relation

$$dmd\beta-dnd\alpha=0,$$

et, dans ce cas, la plus courte distance de deux génératrices consécutives est, non du second ordre, mais du troisième par rapport à Δt.

CHAPITRE XXII.

SUITE DE LA THÉORIE DES COURBES A DOUBLE COURBURE.

Plan osculateur, courbure et torsion.

185. Le *plan osculateur*, en un point M d'une courbe gauche, est la limite du plan mené par ce point, et par deux autres points M′, M″, infiniment voisins du premier sur la courbe.

Considérons toujours les coordonnées rectangulaires de la courbe comme fonctions d'une même variable indépendante t, et soient t, $t+\Delta t$, $t+2\Delta t$ les valeurs de la variable qui répondent aux points M, M′, M″; les coordonnées de ces points seront respectivement (x, y, z)M; $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$M′; $(x+2\Delta x+\Delta^2 x, y+2\Delta y+\Delta^2 y, z+2\Delta z+\Delta^2 z)$M″.

Soient (ξ, η, ζ) les coordonnées courantes du plan passant par ces points, et X, Y, Z les cosinus directeurs de la perpendiculaire à ce plan : la condition de passer par le point M donnera l'équation

$$(a)\qquad X(\xi-x)+Y(\eta-y)+Z(\zeta-z)=0.$$

Le plan devant aussi contenir le point M′, on aura

$$(b)\qquad X\Delta x+Y\Delta y+Z\Delta z=0,$$

et les coordonnées du point M″ devant également satisfaire à l'équation du plan, il viendra

$$X(2\Delta x+\Delta^2 x)+Y(2\Delta y+\Delta^2 y)+Z(2\Delta z+\Delta^2 z)=0,$$

équation qui se réduit, par la précédente, à

$$(c) \qquad X\Delta^2 x + Y\Delta^2 y + Z\Delta^2 z = 0.$$

Si l'on divise respectivement par Δt, Δt^2 les équations (b), (c), et que l'on fasse tendre Δt vers zéro, ce qui revient à supposer que les points M′, M″ se rapprochent indéfiniment du point M, on trouve que les valeurs limites de X, Y, Z satisfont aux équations

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, \\ Xdx + Ydy + Zdz = 0, \\ Xd^2x + Yd^2y + Zd^2z = 0, \end{array} \right.$$

(les deux dernières ayant été multipliées respectivement par dt, dt^2). Résolvant ce système par rapport à X, Y, Z par la méthode bien connue, on trouve

$$(2) \qquad \frac{X}{dyd^2z - dzd^2y} = \frac{Y}{dzd^2x - dxd^2z} = \frac{Z}{dxd^2y - dyd^2x},$$

et la substitution de ces valeurs dans l'équation (a) donne, pour l'équation du plan limite,

$$(3) \quad (\xi - x)(dyd^2z - dzd^2y) + (\eta - y)(dzd^2x - dxd^2z) + (\zeta - z)(dxd^2y - dyd^2x) = 0.$$

Le plan passant par M, M′, M″ tend donc vers une position limite, et l'équation de ce plan osculateur s'obtiendra en remplaçant, dans l'équation (3), dx, dy,... par leurs valeurs déduites des équations de la courbe. Il est bon d'observer que les termes de l'équation (3) se déduisent l'un de l'autre par une *permutation tournante*.

186. Soit MT la tangente à la courbe, au point M : *le plan passant par la tangente* MT, *et par un point infiniment voisin* M′, *a pour limite le plan osculateur en* M. En effet, si

$$X(\xi - x) + Y(\eta - y) + Z(\zeta - z) = 0$$

est encore l'équation du plan variable, la condition de passer par la tangente dont les équations sont

$$\frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy} = \frac{\zeta - z}{dz},$$

établira entre les cosinus X, Y, Z la relation

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0;$$

et la condition de passer par le point M', la relation

$$X\Delta x + Y\Delta y + Z\Delta z = 0.$$

Mais on a

$$\Delta x = \frac{dx}{dt}\Delta t + \frac{d^2x}{dt^2}\frac{\Delta t^2}{2} + \cdots, \quad \Delta y = \cdots, \quad \Delta Z = \cdots;$$

substituant dans l'équation précédente, observant que le coefficient de Δt est nul par la première condition, divisant par Δt^2 toute l'équation et passant à la limite, on trouvera

$$Xd^2x + Yd^2y + Zd^2z = 0.$$

Les équations qui déterminent les cosinus X, Y, Z, relatifs au plan limite, sont donc identiques avec les équations (1), ce qui suffit pour établir que ce plan limite coïncide avec le plan osculateur.

187. On trouvera encore le plan osculateur, *en cherchant la limite du plan mené par la tangente* MT, *et par une parallèle* MT_1 *à la tangente* M'T' *en un point infiniment voisin* M'.

On a d'abord, comme ci-dessus, pour le plan passant par la tangente MT, les équations

$$X(\xi - x) + Y(\eta - y) + Z(\zeta - z) = 0,$$
$$Xdx + Ydy + Zdz = 0.$$

Le passage du point M au point M' se faisant par le changement de t en $t + \Delta t$, les différentielles des coordonnées sont, au point M', $dx + \Delta dx$; $dy + \Delta dy$, $dz + \Delta dz$, et les cosinus directeurs de la tangente M'T' sont respectivement proportionnels à ces quantités (175). La direction (X, Y, Z) devant être perpendiculaire à cette tangente, on a

$$X(dx + \Delta dx) + Y(dy + \Delta dy) + Z(dz + \Delta dz) = 0,$$

et cette équation se réduit à celle-ci :

$$X\Delta dx + Y\Delta dy + Z\Delta dz = 0,$$

qui, divisée par Δt, donne à la limite

$$Xd^2x + Yd^2y + Zd^2z = 0.$$

Le plan limite satisfait donc encore aux équations (1), et ne peut différer du plan osculateur.

Cette propriété, rapprochée de ce qui a été établi au n° 183, nous montre que le plan tangent à une surface développable le long d'une génératrice,

coïncide avec le plan osculateur de l'arête de rebroussement de la développable au point où cette génératrice touche l'arête.

188. *Deux plans osculateurs infiniment voisins se coupent suivant une droite, qui a pour limite la tangente.*

Soit, en effet,

$$X(\xi - x) + Y(\eta - y) + Z(\zeta - z) = 0$$

l'équation du plan osculateur de la courbe, en un point M. Le plan osculateur, au point infiniment voisin M', aura pour équation

$$(X+\Delta X)(\xi - x - \Delta x) + (Y+\Delta Y)(\eta - y - \Delta y) + (Z+\Delta Z)(\zeta - z - \Delta z) = 0,$$

Δ désignant toujours les accroissements dus à l'accroissement Δt de la variable indépendante. La droite, intersection de ces deux plans, satisfait à ces deux équations, et, par suite, à celle-ci :

$$(\xi - x)\Delta X + (\eta - y)\Delta Y + (\zeta - z)\Delta Z - (X\Delta x + Y\Delta y + Z\Delta z) = 0,$$

où l'on néglige les termes du 2me ordre $\Delta X \Delta x$,.... Divisant par Δt, passant à la limite, et observant que $Xdx + Ydy + Zdz$ est nul par les relations (1), on trouve donc que la limite de l'intersection des deux plans osculateurs est représentée par les deux équations

$$\left\{ \begin{array}{l} X(\xi - x) + Y(\eta - y) + Z(\eta - z) = 0, \\ (\xi - x)dX + (\eta - y)dY + (\zeta - z)dZ = 0. \end{array} \right.$$

Il reste à vérifier que les coordonnées de la tangente satisfont à ces deux équations. Cela est évident pour la première ; quant à la seconde, elle se réduit par la substitution de dx, dy, dz à $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$, à celle-ci :

$$dXdx + dYdy + dZdz = 0,$$

qui est une identité. En effet, si l'on différentie complètement la seconde des équations (1), et si l'on a égard à la troisième de ces équations, on tombe sur la relation précédente. Le théorème est donc démontré.

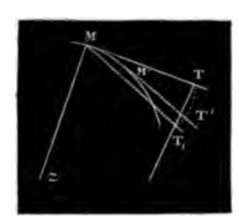
189. Dans les courbes gauches comme dans les courbes planes, la *courbure* en un point est le rapport de l'angle formé par deux tangentes infiniment voisines à l'arc compris entre leurs points de contact, pris à la limite : seulement, en général, les deux tangentes ne se coupent pas. Cette courbure se mesure aussi par celle d'un cercle qui a en tous ses points une courbure égale à celle de la courbe au point considéré, et dont le rayon se nomme le *rayon de courbure* de la courbe en ce point.

D'après cela, soient M, M' deux points infiniment voisins sur la courbe ;

MT, M'T' les tangentes correspondantes, menées dans le même sens; MT_1 parallèle à M'T'; R le rayon de courbure en M. On aura

$$\frac{1}{R} = lim \frac{\text{angle } TMT_1}{\text{arc } MM'}.$$

Décrivons, du point M comme centre et avec un rayon égal à l'unité, l'arc de cercle TT_1 qui mesurera l'angle TMT_1; menons sa corde $TT_1 = q$, et nommons λ, μ, ν les *cosinus directeurs* de cette droite, prise de T vers T_1. Soient enfin Δs la longueur de l'arc MM'; α, β, γ les cosinus directeurs de la tangente MT. Ceux de la tangente M'T' étant $\alpha + \Delta\alpha$, $\beta + \Delta\beta$, $\gamma + \Delta\gamma$, si l'on projette sur l'axe des x le contour triangulaire MTT_1M, on trouvera évidemment.



$$\alpha + q\lambda - (\alpha + \Delta\alpha) = 0, \qquad \text{ou} \qquad \Delta\alpha = q\lambda.$$

Divisons par Δs et observons que

$$lim \frac{q}{\Delta s} = lim \frac{\text{arc } TT_1}{\text{arc } MM'} = \frac{1}{R};$$

il viendra, à la limite,

$$(4) \qquad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\lambda}{R}, \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\mu}{R}, \quad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\nu}{R},$$

les deux dernières équations étant obtenues de la même manière par la projection sur les axes des y et des z. Les cosinus directeurs λ, μ, ν se rapportent ici à la direction TT_1, *prise à la limite.*

On déduit d'abord, des équations ci-dessus, la relation

$$\frac{1}{R^2} = \frac{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}{ds^2},$$

ou

$$(5) \qquad R = \frac{ds}{\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}},$$

qui fait connaître le rayon de courbure, α, β et γ étant déjà connus. La quantité $\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}$ s'appelle *l'angle de contingence :* il est clair, en effet, qu'elle représente l'angle de deux tangentes infiniment voisines, lorsque l'on regarde $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ comme les accroissements infiniment petits de α, β, γ, et que l'on néglige les termes d'ordre supérieur au premier.

190. Quant à la direction (λ, μ, ν) définie par les équations (4), remar-

quons que la corde TT_1 est dans le plan TMT_1 qui a pour limite (187) le plan osculateur de la courbe en M; que l'angle MTT_1 qu'elle fait avec la tangente a pour limite 90°, puisque les angles en T et T_1 sont égaux et l'angle en M infiniment petit. La droite TT_1 a donc pour limite une perpendiculaire à la tangente MT, menée dans le plan osculateur; elle est d'ailleurs dirigée du même côté de cette tangente que le point M', c'est-à-dire *du côté ou la courbe tourne sa concavité.*

La parallèle MZ à cette droite limite, tirée du point M, se nomme la *normale principale;* elle coïncide évidemment avec l'intersection du plan normal et du plan osculateur au point M, et sa direction est définie sans aucune ambiguité par les équations

$$\lambda = R\frac{d\alpha}{ds}, \quad \mu = R\frac{d\beta}{ds}, \quad \nu = R\frac{d\gamma}{ds}.$$

191. L'expression du rayon de courbure (5) peut être transformée de diverses manières. On a d'abord (176)

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \gamma = \frac{dz}{ds},$$

d'où

$$d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 = \frac{(dsd^2x - dxd^2s)^2 + (dsd^2y - dyd^2s)^2 + (dsd^2z - dzd^2s)^2}{ds^4}.$$

Développant les carrés, et observant que de l'égalité

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

on tire

$$dsd^2s = dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z,$$

on obtient

$$d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 = \frac{ds^2\,(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2) + ds^2d^2s^2 - 2ds^2d^2s^2}{ds^4}$$

$$= \frac{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2}{ds^2};$$

d'où

$$(6) \qquad R = \frac{ds^2}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2}}.$$

On a encore, en éliminant ds^2, d^2s^2 et usant d'une transformation connue (5),

$$R = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2) - (dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z)^2}},$$

ou enfin

$$R = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dxd^2y - dyd^2x)^2}}.$$

R est ainsi exprimé en fonction des différentielles des coordonnées seulement. Nous désignerons désormais par A, B, C les coefficients de ξ, η, ζ dans l'équation du plan osculateur, en sorte que l'on aura

(7) $A = dyd^2z - dzd^2y, \quad B = dzd^2x - dxd^2z, \quad C = dxd^2y - dyd^2x.$

Le rayon de courbure s'exprimera alors comme il suit :

$$(8) \qquad R = \frac{ds^3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

192. On nomme *cercle de courbure*, en un point donné M d'une courbe, un cercle qui a même courbure que la courbe en ce point, et est placé de manière à rendre sensible cette égalité des courbures : c'est-à-dire, dans le plan osculateur en M, tangent à la courbe en ce point, et tournant sa concavité du même côté. Il est visible que son centre Z est sur la normale principale, à une distance R du point $M(x, y, z)$: les coordonnées (x_1, y_1, z_1) de ce centre sont donc données par les équations

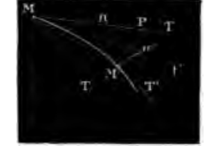
$$x_1 - x = R\lambda, \quad y_1 - y = R\mu, \quad z_1 - z = R\nu,$$

ou

$$x_1 = x + R^2 \frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\right), \quad y_1 = y + R^2 \frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{ds}\right), \quad z_1 = z + R^2 \frac{d}{ds}\left(\frac{dz}{ds}\right).$$

193. On peut donner, du rayon de courbure R d'une courbe gauche, une expression géométrique semblable à celle que nous avons donnée pour les courbes planes (150), et qui se déduit aussi de ce théorème, semblable à celui du n° 147 :

L'angle TMM' *compris entre la corde d'un arc infiniment petit et la tangente, dans une courbe gauche, est la moitié de l'angle* TMT_1 *des tangentes aux extrémités de cet arc, aux quantités près d'un ordre supérieur à cet angle.*



Il suffit, pour établir cette propriété, de projeter sur le plan osculateur en M l'arc MM', sa corde, la tangente M'T' dont la projection $m't'$ touchera en m' la projection Mm' de la courbe. On sait (147) que, dans la courbe plane Mm', l'égalité

$$\text{angle } TMm' = \frac{1}{2} \text{ angle } Tnt'$$

a lieu, lorsqu'on néglige des quantités infiniment petites par rapport à ces angles. Or, le plan M'MT, mené par la tangente MT et la corde MM', fait un angle infiniment petit avec le plan osculateur (186); l'angle TMM' et sa projection TMm' diffèrent donc d'une quantité infiniment petite par rapport à eux-mêmes. Il en est de même de l'angle des tangentes MT, M'T', et de sa projection Tnt', parce que le plan TMT_1, parallèle aux deux tangentes infiniment voisines, fait un angle infiniment petit avec le plan osculateur (187). L'égalité précédente subsiste donc, lorsqu'on substitue TMM' à TMm', TMT_1 à Tnt', et l'on a

$$\text{angle } TMM' = \frac{1}{2} \text{ angle } TMT_1,$$

les termes négligés étant d'ordre supérieur à ces angles.

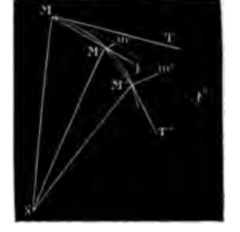
Cela étant posé, on abaissera du point M' une perpendiculaire M'P sur la tangente en M, et l'on démontrera, par un raisonnement identique à celui du n° 150, l'égalité

$$R = lim \frac{\overline{MP}^2}{2M'P}.$$

Les considérations qui précèdent montrent aussi facilement que le rayon et le centre de courbure, en un point d'une courbe gauche, coïncident avec le rayon et le centre de courbure relatifs à la courbe plane, qui est la projection de la courbe donnée sur son plan osculateur au point donné.

194. Le *cercle osculateur,* en un point M d'une courbe à double courbure, est la limite du cercle passant par ce point, et par deux autres points M', M'' infiniment voisins du premier.

Il suit déjà de cette définition que le cercle osculateur est situé dans le plan osculateur en M; on peut établir, en outre, qu'il coïncide avec le cercle de courbure. Pour cela, on élèvera des perpendiculaires MS, M''S aux cordes MM', M'M'', dans le plan MM'M''; MS sera le diamètre du cercle passant par les trois points.



Projetant toute la figure sur le plan osculateur au point M, on prouvera par la même méthode qu'au n° 193, que l'angle infiniment petit KM'M'', compris entre deux cordes consécutives, est égal à la moitié de l'angle des tangentes à la courbe en M et en M'', en négligeant des quantités d'ordre supérieur (152). Cela posé, la démonstration s'achèvera comme au n° 152, sans aucune modification : on fera

voir que *lim* M'S = 2R, que M'S tend vers une direction perpendiculaire à la tangente MT, et du côté de la concavité de la courbe; d'où il résultera, enfin, l'identité annoncée du cercle osculateur et du cercle de courbure.

195. La courbure considérée jusqu'ici dans les courbes à double courbure est la seule qui existe dans les courbes planes, où elle se définit de même. Mais, dans les courbes à double courbure, il y a lieu de considérer une seconde espèce de courbure, résultant de la déviation successive du plan osculateur à mesure que l'on chemine sur la courbe, et à laquelle, pour la distinguer de la première, on donne le nom de *torsion*.

La torsion, en un point M d'une courbe gauche, est la limite du rapport de l'angle compris entre les plans osculateurs en deux points infiniment



voisins M et M', à l'arc de courbe MM' compris entre ces deux points. Pour calculer cette limite, on procédera comme dans le cas de la première courbure. Elevant au point M des normales MU, MU_1 aux deux plans osculateurs consécutifs, l'angle compris entre ces normales est égal à celui des deux plans, et il est mesuré par un arc de cercle UU_1, de rayon 1, décrit de M comme centre et terminé à ces deux normales. Projetant le contour MUU_1M sur les trois axes coordonnés successivement, et désignant par $\frac{1}{T}$ la torsion, par X, Y, Z les cosinus directeurs de la perpendiculaire au plan osculateur, on trouvera comme au n° 189

$$\frac{1}{T} = \frac{\sqrt{dX^2 + dY^2 + dZ^2}}{ds}.$$

Reprenons les équations

$$(1) \qquad \begin{cases} X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, \\ Xdx + Ydy + Zdz = 0, \\ Xd^2x + Yd^2y + Zd^2z = 0, \end{cases}$$

et différentions-les en ayant égard à la troisième; il vient

$$\begin{cases} XdX + YdY + ZdZ = 0, \\ dxdX + dydY + dzdZ = 0, \\ d^2xdX + d^2ydY + d^2zdZ = -(Xd^3x + Yd^3y + Zd^3z). \end{cases}$$

Résolvant ces équations par rapport à dX, dY, dZ par la méthode

connue, et observant que le dénominateur commun $X(dyd^2z - dzd^2y) + \cdots$ n'est autre chose que $AX + BY + CZ$, on trouvera

$$\frac{dX}{Ydz - Zdy} = \frac{dY}{Zdx - Xdz} = \frac{dZ}{Xdy - Ydx} = -\frac{Xd^3x + Yd^3y + Zd^3z}{AX + BY + CZ},$$

et ces rapports égaux sont encore équivalents, d'après une propriété connue, à

$$\pm \frac{\sqrt{dX^2 + dY^2 + dZ^2}}{\sqrt{(Ydz - Zdy)^2 + (Zdx - Xdz)^2 + (Xdy - Ydx)^2}}.$$

Mais la quantité sous le radical, au dénominateur, se réduit à

$$(X^2 + Y^2 + Z^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2) - (Xdx + Ydy + Zdz)^2 = ds^2,$$

donc la fraction ci-dessus n'est autre chose que $\pm \frac{1}{T}$, donc

$$\frac{1}{T} = \pm \frac{Xd^3x + Yd^3y + Zd^3z}{AX + BY + CZ};$$

et si l'on remplace X, Y, Z, au numérateur et au dénominateur, par les quantités respectivement proportionnelles A, B, C, en vertu des formules (2), on aura enfin

$$(9) \qquad \frac{1}{T} = \pm \frac{Ad^3x + Bd^3y + Cd^3z}{A^2 + B^2 + C^2}$$

pour l'expression de la torsion. Il suffira d'y remplacer A, B, C par leurs valeurs (7), et de déterminer le signe de manière à obtenir pour T une valeur positive. On appelle la quantité T le *rayon de torsion*, par analogie avec le rayon de courbure, et $\frac{ds}{T}$ est *l'angle de torsion*.

Remarque. Lorsqu'une courbe est plane, les plans osculateurs en tous ses points coïncident, et la torsion est nulle en chaque point. Cette condition est exprimée par l'équation

$$Ad^3x + Bd^3y + Cd^3z = 0,$$

et réciproquement, il est facile de vérifier que cette relation signifie que tous les points de la courbe sont dans un plan. En effet, l'équation d'un plan quelconque

$$ax + by + cz + d = 0,$$

différentiée trois fois, donne

$$adx + bdy + cdz = 0, \quad ad^2x + bd^2y + cd^2z = 0, \quad ad^3x + bd^3y + cd^3z = 0,$$

et l'élimination des constantes a, b, c entre ces trois équations conduit à la condition unique

$$(dyd^2z - dzd^2y)\, d^3x + (dzd^2x - dxd^2z)\, d^3y + (dxd^2y - dyd^2x)\, d^3z = 0,$$

à laquelle doivent satisfaire les coordonnées de la courbe. Or, cette équation n'est autre que celle que nous avons donnée plus haut.

196. Le plan UMU_1 mené par les droites MU, MU_1, est perpendiculaire à l'intersection des deux plans osculateurs infiniment voisins, qui a pour limite la tangente en M. Ce plan a donc pour limite le plan normal, et *la droite* UU_1, située dans ce plan et faisant avec MU un angle qui tend vers 90°, *est évidemment, à la limite, parallèle à la normale principale.* Ses cosinus directeurs sont $\pm\lambda$, $\pm\mu$, $\pm\nu$.

D'après cela, si l'on projette le contour MUU_1M sur les trois axes coordonnés, comme il est dit plus haut, et si l'on raisonne comme au n° 189, en convenant d'affecter T du signe + ou du signe — selon que MU_1 fait un angle aigu ou obtus avec la normale principale MZ, on trouvera

$$\frac{dX}{ds} = \frac{\lambda}{T}, \quad \frac{dY}{ds} = \frac{\mu}{T}, \quad \frac{dZ}{ds} = \frac{\nu}{T}.$$

Exercices.

1. *Hélice* (ch. XX, ex. 1).

Plan osculateur :

$$\xi y - \eta x - (\zeta - z)\, a \operatorname{tg} \tau = 0.$$

Cosinus directeurs de la normale au plan osculateur :

$$X = -\frac{y \cos \tau}{a}, \quad Y = \frac{x \cos \tau}{a}, \quad Z = \sin \tau.$$

Rayons de courbure et de torsion :

$$R = \frac{a}{\sin^2 \tau}, \quad T = \frac{a}{\sin \tau \cos \tau};$$

ces deux rayons sont constants.

Cosinus directeurs de la normale principale :

$$\lambda = -\frac{x}{a}, \quad \mu = -\frac{y}{a}, \quad \nu = 0;$$

elle se confond avec la perpendiculaire abaissée du point donné sur l'axe du cylindre.

Centre de courbure :

$$x_1 = -x \cot^2 \tau, \quad y_1 = -y \cot^2 \tau, \quad z_1 = z.$$

Lieu du centre de courbure :

$$x_1 = -\frac{m^2}{a} \sin \frac{z_1}{m}, \quad y_1 = -\frac{m^2}{a} \cos \frac{z_1}{m}, \quad x_1^2 + y_1^2 = \frac{m^4}{a^2};$$

c'est une hélice décrite sur un cylindre de rayon $\frac{m^2}{a}$.

2. Courbe représentée par les équations

$$y=\frac{x^2}{2a}, \qquad z=\frac{x^3}{6a^2};$$

intersection de deux cylindres paraboliques.

Cosinus directeurs de la tangente :

$$\alpha=\frac{a}{a+y}, \qquad \beta=\frac{x}{a+y}, \qquad \gamma=\frac{y}{a+y}.$$

Equation du plan osculateur :

$$\frac{\xi y}{a}-\frac{\eta x}{a}+\zeta=\frac{x^3}{6a^2}.$$

Différentielle de l'arc :

$$ds=dx\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^4}{4a^4}}=\frac{a+y}{a}\,dx.$$

Normale au plan osculateur :

$$X=\frac{y}{a+y}=\gamma, \qquad Y=-\frac{x}{a+y}=-\beta, \qquad Z=\frac{a}{a+y}=\alpha.$$

Rayons de courbure et de torsion :

$$R=\frac{(a+y)^2}{a}=\frac{a}{\alpha^2}, \qquad T=R.$$

Normale principale :

$$\lambda=-\beta, \qquad \mu=\alpha-\gamma, \qquad \nu=\beta.$$

Centre de courbure :

$$x_1=-3z, \qquad y_1=y+\frac{a^2-y^2}{a}, \qquad z_1=x+4z.$$

3. Si l'on projette une courbe quelconque sur un plan passant par la tangente en un point M, et faisant un angle θ avec le plan osculateur en ce point, les rayons de courbure de la courbe et de sa projection, en M, sont liés par la relation

$$R=R_1\cos\theta.$$

4. Démontrer les formules suivantes :

$$d\lambda=-\left(\frac{\alpha}{R}+\frac{X}{T}\right)ds, \qquad d\mu=-\left(\frac{\beta}{R}+\frac{Y}{T}\right)ds, \qquad d\nu=-\left(\frac{\gamma}{R}+\frac{Z}{T}\right)ds.$$

5. Soient M, M′ deux points infiniment voisins, sur une courbe gauche ; s l'arc MM′ ; R, T les rayons de courbure et de torsion en M. Démontrer que la distance δ du point M′ au plan osculateur en M, la plus courte distance δ' des tangentes en M et en M′, la différence ε entre l'arc s et sa corde, ont respectivement pour expressions

$$\delta=\frac{s^3}{6RT}, \qquad \delta'=\frac{s^3}{12RT}, \qquad \varepsilon=\frac{s^3}{24RT},$$

aux infiniment petits près du 4e ordre.

6. Dans une courbe tracée sur la sphère, le cercle de courbure en un point M a pour *pôle*, sur la surface sphérique, le point de rencontre des arcs de grand cercle normaux à la courbe, aux points infiniment voisins M et M′. Ce cercle se confond avec l'intersection de la surface et du plan osculateur de la courbe au point M.

7. En désignant par θ l'inclinaison du plan osculateur en M sur le plan tangent à la sphère, par ε l'angle des grands cercles tangents à la courbe en M et en M', on trouve

$$\varepsilon = \frac{ds}{R}\cos\theta, \quad R = \sin\theta, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{ds}{\varepsilon}, \quad T = \frac{ds}{d\theta}, \quad R^2 + T^2\left(\frac{dR}{ds}\right)^2 = 1.$$

8. La courbe étant rapportée à une origine A sur la sphère, par les coordonnées sphériques ρ et ω (ch. XX, ex. 4), V étant l'angle sous lequel la courbe coupe son rayon vecteur ρ, on trouvera

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{ds}{dV + \cos\rho\, d\omega}, \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{\left(\sin^2\rho + \frac{d\rho^2}{d\omega^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(2\frac{d\rho^2}{d\omega^2} + \sin^2\rho\right)\cos\rho - \frac{d^2\rho}{d\omega^2}\sin\rho},$$

formules qui serviront à déterminer le pôle du cercle de courbure.

CHAPITRE XXIII.

SUITE DE LA THÉORIE DES COURBES A DOUBLE COURBURE.

Droite polaire, surface polaire; sphère osculatrice et développées.

197. La *droite polaire*, pour un point M d'une courbe gauche, est la limite de la droite, suivant laquelle le plan normal en M est coupé par un plan normal infiniment voisin.

Soient (x, y, z) les coordonnées rectangulaires du point M; $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ celles du point M'; $N = 0$ l'équation du plan normal en M (177). On en déduit celle du plan normal au point M' en changeant, dans l'équation $N = 0$, x, y, z en $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$, dans tous les termes qui dépendent des coordonnées de la courbe : soit $N + \Delta N = 0$ l'équation qui résulte de cette substitution. Les coordonnées (ξ, η, ζ) de la droite, intersection des deux plans normaux, vérifient à la fois ces deux équations, et par suite l'équation $\Delta N = 0$; ou encore celle-ci :

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = 0,$$

que l'on obtient en divisant la précédente par l'accroissement Δt que prend la variable t, dont dépendent les coordonnées de la courbe, lorsque l'on passe du point M au point M'. Ces points se rapprochant indéfiniment, Δt

tend vers zéro, et la droite limite satisfait aux équations

$$N = 0, \qquad dN = 0,$$

la différentiation indiquée ne portant, comme il résulte des raisonnements qui précèdent, que sur les quantités qui dépendent de la variable t dans l'équation du plan normal, et non sur ξ, η, ζ.

D'après cela, les équations de la droite polaire, au point dont les coordonnées sont (x, y, z), seront

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0, \\ (\xi - x)\,d^2x + (\eta - y)\,d^2y + (\zeta - z)\,d^2z - ds^2 = 0, \end{array} \right.$$

à cause de la relation

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2.$$

On tirera des équations de la courbe les valeurs des différentielles dx, d^2x,... en fonction des coordonnées x, y, z, et on les substituera dans les équations (1).

La droite polaire coïncide avec la normale au plan osculateur, élevée par le centre de courbure. En effet, l'intersection des deux plans normaux étant perpendiculaire à la fois aux tangentes à la courbe en M et en M′, est perpendiculaire au plan mené par la première parallèlement à la seconde, plan qui a pour limite le plan osculateur : la droite polaire est donc normale au plan osculateur, et il reste à faire voir qu'elle passe par le centre de courbure Z.

Les coordonnées de ce dernier point sont (192), en conservant les notations du chapitre précédent,

$$x_1 = x + R\lambda, \qquad y_1 = y + R\mu, \qquad z_1 = z + R\nu.$$

Substituons les à ξ, η, ζ dans les équations (1); la première est évidemment satisfaite. Quand à la seconde, si nous prenons l'arc pour variable indépendante, elle peut s'écrire comme il suit :

$$(\xi - x)\,d\alpha + (\eta - y)\,d\beta + (\zeta - z)\,d\gamma = ds,$$

d'où nous tirons, en vertu des équations (4) du n° 190,

$$(\xi - x)\,\lambda + (\eta - y)\,\mu + (\zeta - z)\,\nu = R.$$

En y substituant les valeurs de x_1, y_1, z_1 au lieu de ξ, η, ζ, on obtient l'identité

$$R(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) = R.$$

La proposition est donc démontrée; et il en résulte que les équations

de la droite polaire peuvent s'écrire sous la forme

$$(2) \qquad \frac{\xi - x_1}{X} = \frac{\eta - y_1}{Y} = \frac{\zeta - z_1}{Z}.$$

198. On appelle *surface polaire* d'une courbe à double courbure, la surface réglée qui est le lieu des droites polaires correspondantes aux différents points de la courbe. Son équation s'obtiendra, pour une courbe donnée, en éliminant x, y, z entre les équations de la courbe et les équations de la droite polaire relative à un point quelconque.

La surface polaire est développable. Pour le démontrer, cherchons d'abord, sur la droite polaire représentée par les équations (1), la limite O du point où cette droite est coupée par un plan normal infiniment voisin, qui répond au point $M'(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$. Représentons encore par $N=0$, $dN=0$, les équations de la droite polaire; par $N+\Delta N=0$ l'équation du plan normal en M'; le point d'intersection (ξ, η, ζ) satisfera à ces trois équations, et par suite à celle-ci

$$\Delta N = 0.$$

Mais si l'on considère N comme fonction de t, et qu'on développe ΔN par la formule de Taylor, on a

$$\Delta N = \frac{dN}{dt}\Delta t + \frac{d^2N}{dt^2}\frac{\Delta t^2}{2} + \cdots,$$

et comme $\frac{dN}{dt}$ est nul, puisque ξ, η, ζ satisfont à la seconde équation de la droite polaire, l'équation $\Delta N = 0$, multipliée par $\frac{\Delta t^2}{2}$, devient

$$\frac{d^2N}{dt^2} + P\Delta t + \cdots = 0.$$

A la limite, Δt est nul, et le point (ξ, η, ζ) satisfait à l'équation $d^2N=0$, jointe aux équations de la droite polaire. Comme ξ, η, ζ sont constants dans cette différentiation, l'équation $d^2N=0$ se réduit à

$$(\xi - x)\,d^3x + (\eta - y)\,d^3y + (\zeta - z)\,d^3z - 3ds\,d^2s = 0,$$

à cause de la relation

$$dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z = ds\,d^2s.$$

D'après cela, si nous désignons par (x', y', z') les coordonnées du point

nite O, ce point sera déterminé par les trois équations

$$(3)\quad \begin{cases} (x'-x)\,dx+(y'-y)\,dy+(z'-z)\,dz=0, \\ (x'-x)d^2x+(y'-y)\,d^2y+(z'-z)\,d^2z-ds^2=0, \\ (x'-x)\,d^3x+(y'-y)\,d^3y+(z'-z)\,d^3z-3ds\,d^2s=0. \end{cases}$$

Le lieu du point O, considéré successivement sur chacune des généra-ices de la surface polaire, est une certaine courbe OO′O″... : démontrons ue toutes les droites polaires sont tangentes à cette courbe. Pour cela, ifférentions complètement les deux premières équations, en considérant , y', z', x, y,..., comme fonctions de la même variable t. Nous aurons ccessivement, en réduisant les équations obtenues au moyen de la conde et de la troisième équation (3),

$$dx'dx+dy'dy+dz'dz=0,$$
$$dx'd^2x+dy'd^2y+dz'd^2z=0;$$

où

$$\frac{dx'}{dyd^2z-dzd^2y}=\frac{dy'}{dzd^2x-dxd^2z}=\frac{dz'}{dxd^2y-dyd^2x}.$$

Ces équations, qui peuvent (185) se mettre sous la forme

$$(4)\qquad \frac{dx'}{X}=\frac{dy'}{Y}=\frac{dz'}{Z},$$

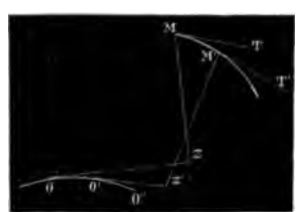
us apprennent que les cosinus directeurs de la tangente à la courbe, u du point (x', y', z'), sont proportionnels à ceux de la droite polaire sur quelle ce point se trouve : les deux droites coïncident donc. Donc *la sur-ce polaire est une surface développable, et la courbe, qui est le lieu du int O défini ci-dessus, est son arête de rebroussement.*

On obtiendra les équations de cette courbe en éliminant, entre les uations (3) et celles de la courbe donnée, les variables x, y, z et leurs fférentielles. On aura entre x', y', z' deux équations, qui seront celles l'arête.

On trouverait la même courbe, comme il est facile de le voir, en cher-ant le lieu du point d'intersection de trois plans normaux infiniment isins, considéré à la limite.

199. Le plan tangent à la surface polaire, le long de la génératrice Z, coïncide (182) avec la limite du plan mené par cette génératrice, rallèlement à la génératrice infiniment voisine O′Z′. Mais les droites OZ, Z′ étant respectivement normales aux plans osculateurs en M et M′,

tout plan qui leur est parallèle est normal, à la limite, à la tangente MT à la courbe donnée. Donc *le plan normal à la courbe, en un point* M, *touche la surface polaire tout le long de la génératrice qui correspond au point* M.



Le plan normal à la courbe est, d'après cela, osculateur de l'arête de rebroussement de la surface polaire, au point correspondant: il s'ensuit que l'angle de deux plans normaux infiniment voisins, dans la première, est égal à l'angle des deux plans osculateurs correspondants de la seconde; et, d'autre part, les tangentes à celle-ci étant normales aux plans osculateurs de la première (198), l'angle de deux de ces tangentes infiniment voisines, OZ, O'Z', est égal à l'angle des plans osculateurs correspondants dans la courbe proposée.

Il suit de là 1° que *l'angle de contingence d'une courbe gauche, en un point, égale l'angle de torsion de l'arête de rebroussement de la surface polaire au point correspondant;* 2° *que l'angle de contingence de l'arête est égal à l'angle de torsion de la courbe proposée.*

On voit aussi facilement que la normale principale de l'arête, au point O, est parallèle à la normale principale de la courbe, au point M.

200. Si par un point donné M, et par trois autres points infiniment voisins M', M'', M''' sur la courbe, on fait passer une sphère, la limite de cette sphère est appelée la *sphère osculatrice* de la courbe en M.

Démontrons que cette sphère limite existe, et calculons les coordonnées (x', y', z') de son centre, ainsi que son rayon r. Concevons que les points M, M', M'', M''' répondent respectivement aux valeurs t, $t+\Delta t$, $t+2\Delta t$, $t+3\Delta t$ de la variable indépendante qui détermine chaque point de la courbe donnée. L'équation de la sphère qui passe par ces quatre points étant mise sous la forme

$$(x'-\xi)^2+(y'-\eta)^2+(z'-\zeta)^2-r^2=0,$$

il faut exprimer que cette équation est satisfaite, lorsque l'on remplace successivement (ξ, η, ζ) par les coordonnées (x, y, z) du point M; puis par celles du point M', $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$, etc...; x', y', z', r restant invariables. Les quatre équations ainsi obtenues, et qui détermineraient x', y', z', r', peuvent s'écrire

$$S=0,\quad S+\Delta S=0,\quad S+2\Delta S+\Delta^2 S=0,\quad S+3\Delta S+3\Delta^2 S+\Delta^3 S=0,$$

et se réduisent aux suivantes :

$$S = 0, \quad \Delta S = 0, \quad \Delta^2 S = 0, \quad \Delta^3 S = 0.$$

Divisant respectivement les trois dernières par Δt, Δt^2, Δt^3, et faisant tendre Δt vers zéro, on voit que les coordonnées (x', y', z') du centre de la sphère limite, et son rayon r, satisferont aux équations

$$S = 0, \quad dS = 0, \quad d^2 S = 0, \quad d^3 S = 0;$$

les différentielles étant prises par rapport à t, en traitant x', y', z', r comme constants. D'après cela, le centre et le rayon de la sphère osculatrice sont déterminés par les équations suivantes :

$$(5) \quad \begin{cases} (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2 - r^2 = 0, \\ (x'-x)dx + (y'-y)dy + (z'-z)dz = 0, \\ (x'-x)d^2x + (y'-y)d^2y + (z'-z)d^2z - ds^2 = 0, \\ (x'-x)d^3x + (y'-y)d^3y + (z'-z)d^3z - 3ds d^2s = 0. \end{cases}$$

Les trois dernières de ces équations se confondent avec les équations (3), donc *le centre de la sphère osculatrice au point* M *est sur la droite polaire correspondante, et au point* O *où cette droite touche l'arète de rebroussement de la surface polaire.*

Le cercle passant par trois points infiniment voisins M, M', M'', a pour limite le *cercle osculateur* (194) : ce dernier est donc sur la sphère osculatrice, et comme il est aussi dans le plan osculateur, il coïncide avec l'intersection de la sphère et du plan. Mais, le centre de la sphère étant au point O, et OZ étant perpendiculaire au plan osculateur, Z est le centre du cercle, intersection de la sphère et du plan, et MZ son rayon. *Le cercle osculateur coïncide donc avec le cercle de courbure,* comme on l'avait déjà fait voir (194).

201. Pour calculer le rayon r de la sphère osculatrice, on observe que ce rayon est l'hypothénuse MO d'un triangle rectangle, dont les côtés sont le rayon de courbure $MZ = R$, et la distance $OZ = u$ du centre de la sphère osculatrice au plan osculateur. Or, on a évidemment

$$x' - x_1 = uX, \quad y' - y_1 = uY, \quad z' - z_1 = uZ,$$

en choisissant pour la direction (X, Y, Z) de la droite polaire, celle qui va du centre de courbure Z vers le point de contact O. Ces équations

donnent

$$dx' - dx_1 = udX + Xdu,$$
$$dy' - dy_1 = udY + Ydu,$$
$$dz' - dz_1 = udZ + Zdu.$$

Multiplions respectivement par λ, μ, ν ces équations, en observant que l'on a, ZO étant perpendiculaire à MZ,

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z = 0,$$
$$\lambda dx' + \mu dy' + \nu dz' = 0;$$

nous aurons

$$-(\lambda dx_1 + \mu dy_1 + \nu dz_1) = u(\lambda dX + \mu dY + \nu dZ),$$

ou

$$\lambda dx_1 + \mu dy_1 + \nu dz_1 = -u\frac{ds}{T},$$

en remplaçant dX, dY, dZ par leurs valeurs (196).

D'autre part, différentiant les valeurs de x_1, y_1, z_1, on trouve

$$dx_1 = dx + \lambda dR + Rd\lambda,\quad dy_1 = dy + \mu dR + Rd\mu,\quad dz_1 = dz + \nu dR + Rd\nu,$$

d'où, à cause des relations évidentes

$$\lambda dx + \mu dy + \nu dz = 0,\qquad \lambda d\lambda + \mu d\mu + \nu d\nu = 0,$$

on tire

$$\lambda dx_1 + \mu dy_1 + \nu dz_1 = dR.$$

On aura donc

$$dR = -u\frac{ds}{T},\qquad \text{ou}\qquad u = -T\frac{dR}{ds}$$

pour l'expression de la distance OZ du centre de la sphère osculatrice au centre de courbure.

D'après cela, le rayon de la sphère osculatrice sera donné par l'équation

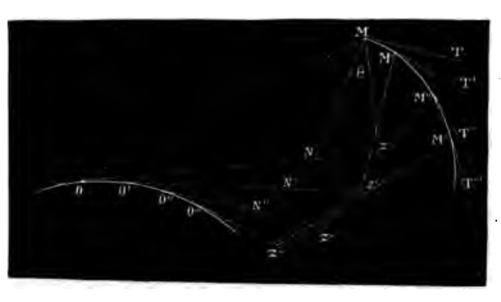
$$r^2 = R^2 + T^2\frac{dR^2}{ds^2}.$$

202. Le lieu des droites polaires est, comme on l'a vu, une surface développable; il ne peut en être de même de la surface réglée, qui est le lieu des normales principales à une courbe à double courbure. En effet, si ces normales MZ, M'Z',... étaient tangentes à une même courbe, le plan osculateur de cette courbe au point où elle touche la génératrice MZ coïnciderait avec le plan tangent à la surface développable le long de cette génératrice, c'est-à-dire avec le plan osculateur TMZ de la courbe donnée. La courbe donnée, et celle à laquelle les normales principales sont sup-

posées tangentes, auraient donc les mêmes plans osculateurs, et par suite (188) les mêmes tangentes, en leurs points correspondants; ce qui est évidemment impossible.

Il n'y a d'exception que lorsque la courbe donnée est plane; le plan osculateur en chaque point se confond alors avec le plan de la courbe, et la tangente n'est plus déterminée par la limite de l'intersection de deux plans osculateurs consécutifs.

203. Les courbes gauches admettent aussi des développées, jouissant de propriétés analogues à celles des développées des courbes planes. Nous appellerons *développée* d'une courbe gauche, une courbe telle que ses tangentes vont rencontrer la courbe donnée, et lui sont respectivement normales au point de rencontre.



D'après cela, soient toujours (x, y, z) les coordonnées d'un point quelconque M de la courbe donnée; (ξ, η, ζ) celles du point correspondant N de la développée; σ l'arc de cette courbe, compté dans le sens MN; ρ la distance MN. Les conditions du problème seront exprimées par les équations

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\xi}{d\sigma}=\dfrac{\xi-x}{\rho},\quad \dfrac{d\eta}{d\sigma}=\dfrac{\eta-y}{\rho},\quad \dfrac{d\zeta}{d\sigma}=\dfrac{\zeta-z}{\rho};\\ (\xi-x)dx+(\eta-y)dy+(\zeta-z)dz=0. \end{array}\right.$$

Mais, si nous différentions l'équation

$$(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2=\rho^2,$$

en tenant compte de la seconde des relations précédentes, il viendra

$$(\xi-x)\,d\xi+(\eta-y)\,d\eta+(\zeta-z)\,d\zeta=\rho d\rho,$$

ou, en remplaçant $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ par leurs valeurs tirées des équations (6),

$$\frac{d\sigma}{\rho}[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2]=\rho d\rho.$$

Cette relation revient évidemment à

$$d\sigma=d\rho,$$

et l'on conclut de là, comme nous l'avons fait pour les développées planes

(154), que *la longueur d'un arc quelconque de la développée est égale à la différence des longueurs des normales, tangentes à ses extrémités.* Si donc un fil flexible est appliqué sur la développée, et s'en détache tangentiellement pour se terminer à un point de la courbe donnée, lorsque l'on développera ce fil en le tenant toujours tendu, son extrémité libre décrira la courbe.

L'équation

$$(\xi - x)\, dx + (\eta - y)\, dy + (\zeta - z)\, dz = 0$$

étant différentiée, donne

$$(\xi - x)\, d^2x + (\eta - y)\, d^2y + (\zeta - z)\, d^2z - ds^2 = 0,$$

car la somme de termes

$$d\xi dx + d\eta dy + d\zeta dz$$

est évidemment nulle, les tangentes MT, MN à la courbe et à sa développée se coupant à angle droit. Mais les deux équations qui précèdent sont celles de la droite polaire correspondante au point M, si l'on y regarde ξ, η, ζ comme des coordonnées courantes; donc *le point où la normale* MN *à la courbe touche la développée de celle-ci est situé sur la droite-polaire correspondante au point* M, et, par suite, toutes les développées d'une courbe donnée sont des lignes tracées sur la surface polaire de cette courbe.

Observons encore que le plan osculateur en N de la développée, n'est autre que le plan tangent à la surface développable formée par les normales MN, M'N',..., suivant la génératrice MN. Cette surface s'appuyant sur la courbe donnée, le plan tangent contient la tangente MT; le plan osculateur cherché est donc NMT. Il suit de là que *le plan osculateur en un point de la développée, coupe à angle droit le plan tangent à la surface polaire au même point;* la normale principale de la développée est donc parallèle à la tangente MT de la courbe proposée.

204. Toute développée de la courbe MM'M''... jouit encore d'une propriété remarquable, qui achève de manifester la réalité de ces courbes en permettant de les construire. Désignons par θ l'angle NMZ compris entre la normale principale MZ et la tangente à la développée; cet angle étant le complément de celui que fait MN avec la droite polaire, on a évidemment

$$(\xi - x)\, X + (\eta - y)\, Y + (\zeta - z)\, Z = \rho \sin \theta.$$

Différentiant, observant que $Xdx + Ydy + Zdz = 0$, on a

$$(\xi - x)\, dX + (\eta - y)\, dY + (\zeta - z)\, dZ + Xd\xi + Yd\eta + Zd\zeta$$
$$= \rho \cos \theta d\theta + \sin \theta d\rho.$$

Mais les cosinus directeurs de la tangente à la développée étant $\frac{d\xi}{d\sigma}$, $\frac{d\eta}{d\sigma}$, $\frac{d\zeta}{d\sigma}$, et $d\sigma$ étant égal à $d\rho$, il vient

$$Xd\xi + Yd\eta + Zd\zeta = \sin\theta d\rho,$$

et l'équation précédente se réduit à

$$(\xi - x)\,dX + (\eta - y)\,dY + (\zeta - z)\,dZ = \rho\cos\theta d\theta,$$

ou, en substituant à dX, dY, dZ leurs valeurs (196) et observant que

$$\frac{\xi - x}{\rho}\lambda + \frac{\eta - y}{\rho}\mu + \frac{\zeta - z}{\rho}\nu = \cos\theta,$$

à celle-ci

$$\rho\cos\theta\frac{ds}{T} = \rho\cos\theta d\theta;$$

d'où enfin

$$d\theta = \frac{ds}{T}.$$

Ainsi, *l'angle* θ *que fait la tangente à la développée avec la normale principale à la courbe varie, lorsqu'on passe d'un point au point infiniment voisin, d'une quantité égale à l'angle de torsion de la courbe.*

Or, si l'on mène par le centre d'une sphère de rayon égal à l'unité des parallèles aux droites polaires successives de la courbe donnée, on tracera sur la sphère une courbe, dont l'arc infiniment petit $d\tau$ mesurera l'angle de deux droites polaires consécutives, et sera égal, par conséquent, à l'angle de torsion de la courbe donnée. On aura donc

$$d\tau = \frac{ds}{T} = d\theta,$$

d'où, C désignant une constante arbitraire,

$$\theta = \tau + C.$$

Il suffira donc, après avoir donné à C une valeur déterminée, de mener dans chacun des plans normaux successifs de la courbe une normale faisant, avec la normale principale correspondante, un angle θ déterminé par l'égalité précédente : le lieu des points de contact de ces normales avec la surface polaire sera une développée. Et comme la constante C peut recevoir une infinité de valeurs différentes, toute courbe gauche admet une infinité de développées, jouissant des propriétés que nous avons exposées.

205. La portion NZ de la droite polaire, comprise entre la développée

et la normale principale, est égale à $R \operatorname{tg} \theta$; on a donc

$$\xi - x_1 = RX \operatorname{tg} \theta, \quad \eta - y_1 = RY \operatorname{tg} \theta, \quad \zeta - z_1 = RZ \operatorname{tg} \theta,$$

d'où l'on déduit, pour les coordonnées (ξ, η, ζ) d'un point de la développée, les expressions

$$\left\{ \begin{aligned} \xi &= x + R[\lambda + X \operatorname{tg}(\tau + C)], \\ \eta &= y + R[\mu + Y \operatorname{tg}(\tau + C)], \\ \zeta &= z + R[\nu + Z \operatorname{tg}(\tau + C)]. \end{aligned} \right.$$

Si l'on a exprimé, en fonction de la variable indépendante t, toutes les quantités qui entrent dans les seconds membres de ces équations, ξ, η, ζ seront connus en fonction de t, et ces équations seront celles d'une développée quelconque. Mais la recherche des développées se fait plus directement en partant des équations

$$\frac{d\xi}{\xi - x} = \frac{d\eta}{\eta - y} = \frac{d\zeta}{\zeta - z},$$

$$d\xi dx + d\eta dy + d\zeta dz = 0,$$

où x, dx,... seront remplacés par leurs valeurs en fonction de t, dt. Cette recherche exige l'emploi du calcul intégral.

206. Lorsque l'on développe sur un plan la surface polaire, les développées tracées sur cette surface se transforment en lignes droites. Pour s'en assurer, il suffit de concevoir que le développement de la surface polaire se fasse comme il suit : un plan, parfaitement flexible et inextensible, est supposé enroulé sur la surface polaire, dont il se détache suivant une génératrice OZ, pour se confondre avec le plan OZM tangent à la surface suivant OZ. Concevons ensuite que l'on détache successivement ce plan flexible de la surface polaire, en le tenant exactement tendu, en sorte que sa portion plane coïncide successivement avec les divers plans normaux de la courbe donnée. Si l'on considère ce que devient dans ce développement la ligne continue, formée de la normale MN et de l'arc NN'N''... d'une développée, il est clair qu'elle joue le même rôle qu'un fil flexible qui serait appliqué sur la développée, et que l'on développerait en le tenant constamment tendu : il resterait tangent à la développée, et sa portion rectiligne croîtrait successivement de quantités égales aux arcs rectifiés de la développée. Donc, d'après la propriété caractéristique des développées, l'extrémité M de cette ligne décrirait la courbe proposée MM'M''... Donc, *lorsque la surface polaire est développée sur un plan, les développées se réduisent*

à des lignes droites qui toutes vont passer par un même point, le point sur lequel vient se rabattre toute la courbe donnée. De plus, comme le développement n'altère pas les longueurs des lignes tracées sur la surface, *les développées sont les lignes les plus courtes que l'on puisse tracer sur la surface polaire, entre deux quelconques de leurs points*, puisque cette propriété appartient aux droites dans lesquelles elles se transforment par le développement.

207. Dans une courbe plane, le plan osculateur en un point quelconque coïncide avec le plan de la courbe; la surface polaire est une surface cylindrique, dont la génératrice est normale au plan de la courbe; sa trace sur ce plan coïncide avec le lieu des centres de courbure. L'angle de torsion étant nul, $d\theta = 0$, et l'angle θ que fait la tangente à une développée donnée avec le plan de la courbe, est constant. Les développées coupent donc les génératrices du cylindre sous un angle constant, et sont des *hélices*. Parmi ces développées, une seule est plane, et correspond au cas où $\theta = 0$: c'est le lieu des centres de courbure, ou la développée que nous avons étudiée en traitant des courbes planes.

Dans une courbe sphérique, tous les plans normaux passent par le centre de la sphère : la surface polaire est un cône dont ce centre est le sommet.

Exercices.

1. *Hélice* (ch. XX, ex. 1). — Les équations de la droite polaire au point (x, y, z) sont

$$\begin{cases} \xi y - \eta x + m(\zeta - z) = 0, \\ \xi x + \eta y + m^2 = 0. \end{cases}$$

L'équation de la surface polaire s'obtient en substituant d'abord à x et y leurs valeurs en fonction de z, dans ces deux équations, portant les derniers termes dans les seconds membres, élevant au carré et ajoutant; ce qui donne

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{m^2}{a^2}[(\zeta - z)^2 + m^2].$$

On tire de là z, que l'on substitue dans la seconde équation de la droite polaire, et l'on a

$$\xi \sin\left[\frac{\zeta \pm \sqrt{(\xi^2+\eta^2)\operatorname{tg}^2\tau - a^2\cot^2\tau}}{a\cot\tau}\right] + \eta\left[\frac{\cos\zeta \pm \sqrt{(\xi^2+\eta^2)\operatorname{tg}^2\tau - a^2\cot^2\tau}}{a\cot\tau}\right] = -a\cot^2\tau.$$

Le centre de la sphère osculatrice satisfait aux deux équations de la droite polaire, et à celle-ci :

$$\xi y - \eta x = 0,$$

d'où l'on tire $\zeta = z$; par suite, ce point coïncide avec le centre de courbure. L'arête de rebroussement de la surface polaire se confond donc avec le lieu des centres de courbure : la surface polaire est une héliçoïde développable, lieu des tangentes à l'hélice qui est le lieu de ces centres de courbure (ch. XXII, ex. 1).

Les équations d'une développée de l'hélice sont, l'arc s de l'hélice étant pris pour variable indépendante,

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= -\frac{a\cos\tau}{\sin^2\tau}\left[\cos\tau\sin\left(\frac{s}{a}\sin\tau\right) - \cos\left(\frac{s}{a}\sin\tau\right)\operatorname{tg}\left(\frac{as+C}{\sin\tau\cos\tau}\right)\right],\\ \eta &= -\frac{a\cos\tau}{\sin^2\tau}\left[\cos\tau\cos\left(\frac{s}{a}\sin\tau\right) + \sin\left(\frac{s}{a}\sin\tau\right)\operatorname{tg}\left(\frac{as+C}{\sin\tau\cos\tau}\right)\right],\\ \zeta &= s\cos\tau - \frac{a}{\sin\tau}\operatorname{tg}\left(\frac{as+C}{\sin\tau\cos\tau}\right). \end{aligned}\right.$$

2. Sur un rayon d'une sphère comme diamètre, on décrit un cercle, que l'on prend pour base d'un cylindre droit. Trouver la courbe d'intersection du cylindre et de la sphère, et lui appliquer les formules générales.

R. Le rayon de la sphère étant pris pour unité, et son centre pour origine, l'axe des z parallèle à la génératrice du cylindre, l'axe des x passant par le centre de sa base, soit ω l'angle que fait le plan YZ avec le plan passant par l'axe des z et un point de la courbe. Les équations de la courbe sont

$$x = \sin^2\omega, \qquad y = \sin\omega\cos\omega, \qquad z = \cos\omega.$$

Tangente et plan normal :

$$\frac{\xi - x}{\sin 2\omega} = \frac{\eta - y}{\cos 2\omega} = \frac{\zeta - z}{-\sin\omega}; \qquad \xi\sin 2\omega + \eta\cos 2\omega = \zeta\sin\omega.$$

Différentielle de l'arc :

$$ds = d\omega\sqrt{1+\sin^2\omega}.$$

Plan osculateur :

$$\xi\cos\omega\,(1+2\sin^2\omega) - 2\eta\sin^3\omega + 2\zeta - \cos\omega\,(2+\sin^2\omega) = 0.$$

Rayons de courbure et de torsion :

$$R = \frac{(1+\sin^2\omega)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{5+3\sin^2\omega}}, \qquad T = \frac{5+3\sin^2\omega}{6\sin\omega}.$$

Equations de la droite polaire :

$$\xi\sin 2\omega + \eta\cos 2\omega = \zeta\sin\omega, \qquad \xi\cos 2\omega - \eta\sin 2\omega = \frac{1}{2}\zeta\cos\omega.$$

Equation de la surface polaire :

$$4(\xi^2+\eta^2) - \zeta^2 - 3\zeta^{\frac{4}{3}}\eta^{\frac{2}{3}} = 0.$$

3. Trouver, pour une courbe quelconque, l'angle ε de deux normales principales infiniment voisines, leur plus courte distance η, l'inclinaison τ de cette plus courte distance sur la tangente, l'élément ds_1 de l'arc de la courbe, lieu des centres de courbure, et l'angle φ sous lequel cette courbe coupe la droite polaire.

R. Par le point donné M, on mène la tangente, la normale principale et la normale au plan osculateur; puis des parallèles aux droites correspondantes pour un point infiniment voisin M'. On projette celles-ci sur le plan normal, puis sur le plan osculateur en M,

et l'on trouve, en ayant égard aux théorèmes du n° 36,

$$\varepsilon = ds\sqrt{\frac{1}{R^2}+\frac{1}{T^2}}, \quad \operatorname{tg}\tau=\frac{T}{R}, \quad \eta=\frac{T ds}{\sqrt{R^2+T^2}}, \quad \frac{\eta}{\varepsilon}=\frac{R^2T}{R^2+T^2}.$$

En projetant l'arc ds_1 sur la normale principale et sur la droite polaire, on obtient

$$ds_1=\frac{r ds}{T}, \qquad \operatorname{tg}\varphi=\frac{R}{u},$$

R, T, r, u ayant la même signification que dans ce qui précède.

4. Une courbe dont le rayon de courbure R est constant, et le lieu de ses centres de courbure, ont même normale principale en chaque point : chacune d'elles est la ligne des centres de courbure et l'arète de rebroussement de la surface polaire, par rapport à l'autre; leurs rayons de courbure sont égaux, et le produit de leurs rayons de torsion est constant, égal au carré du rayon de courbure commun.

CHAPITRE XXIV.

§ 1. SURFACES ENVELOPPES.

208. La théorie des surfaces enveloppes est analogue à celle des courbes enveloppes (ch. XIX). Une équation

$$(1) \qquad F(x, y, z, \alpha)=0,$$

α étant un paramètre arbitraire, représente une infinité de surfaces. Deux surfaces, correspondant à deux valeurs α, $\alpha+h$ du paramètre, se coupent suivant une courbe, qui a pour limite une courbe déterminée, lorsque h tend vers zéro. Le lieu de ces courbes limites est *l'enveloppe* des surfaces comprises dans l'équation $F=0$.

On prouverait, comme au n° 168, que l'équation de l'enveloppe s'obtient en éliminant le paramètre α entre les équations

$$F(x, y, z, \alpha)=0, \qquad \frac{dF}{d\alpha}=0,$$

pourvu que la fonction F ne soit pas à détermination multiple.

L'enveloppe touche chacune des enveloppées tout le long de la courbe d'intersection limite; on le démontre comme au n° 170. Soit $\alpha=\varphi(x, y, z)$ la valeur de α tirée de la seconde équation ; l'enveloppe a pour équation

$$F(x, y, z, \varphi)=0,$$

et l'on a, en différentiant totalement,

$$\frac{dF}{dx}dx+\frac{dF}{dy}dy+\frac{dF}{dz}dz+\frac{dF}{d\varphi}d\varphi=0.$$

Mais $\frac{dF}{d\varphi}$ est nul identiquement, et l'on a, pour déterminer dz, la même équation que si l'on avait différentié l'équation d'une enveloppée, sauf que α est remplacé par φ. Et comme, en chaque point de la courbe commune à l'enveloppée et à l'enveloppe, $\varphi = \alpha$, le dz a la même valeur pour les deux surfaces en chaque point de cette courbe. Il en résulte que les dérivées partielles p et q de z sont les mêmes de part et d'autre, et que les plans tangents coïncident.

209. Quand l'équation (1) est celle d'un plan mobile, l'enveloppe est le lieu d'une droite; c'est une surface réglée, et de plus, développable, puisque d'après le théorème ci-dessus, le plan mobile touche la surface enveloppe tout le long d'une génératriee de celle-ci. Réciproquement, toute développable peut être considérée comme l'enveloppe d'un plan mobile, savoir, le plan osculateur de l'arête de rebroussement de la surface. En effet, deux plans osculateurs infiniment voisins se coupent, à la limite, suivant la tangente à l'arête, c'est-à-dire suivant la génératrice de la développable.

La surface polaire d'une courbe gauche, d'après sa définition (198), est l'enveloppe des plans normaux à cette courbe. La règle ci-dessus, appliquée à l'équation du plan normal, conduit immédiatement aux équations de la droite polaire et de la surface polaire, et de plus, le théorème général du numéro précédent nous ramène à la propriété du plan normal, d'être tangent à la surface polaire (199).

210. Si l'équation de la surface enveloppée renfermait deux paramètres α et β liés entr'eux par une équation, en sorte que l'on eût

$$(2) \qquad F(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \qquad \varphi(\alpha, \beta) = 0,$$

on suivrait la même marche qu'au n° 171. La limite de l'intersection de deux surfaces infiniment voisines serait déterminée par les équations (2) et par celles-ci

$$\frac{dF}{d\alpha} + \frac{dF}{d\beta}\frac{d\beta}{d\alpha} = 0, \qquad \frac{d\varphi}{d\alpha} + \frac{d\varphi}{d\beta}\frac{d\beta}{d\alpha} = 0,$$

et l'élimination de α, β, $d\beta : d\alpha$ entre ces quatre équations donnerait l'équation de l'enveloppe. On opèrerait de même si l'on avait trois paramètres liés entr'eux par deux équations, etc.

211. Il existe un autre genre de surfaces enveloppes. Reprenons l'équa-

tion d'une surface variable

$$F(x, y, z, \alpha, \beta) = 0,$$

α, β étant des paramètres *indépendants*. En cherchant la limite de l'intersection de cette surface par une surface infiniment voisine, on trouverait encore que cette courbe satisfait à l'équation

$$\frac{dF}{d\alpha} + \frac{dF}{d\beta}\frac{d\beta}{d\alpha} = 0,$$

et comme $d\beta : d\alpha$ est indéterminé, cette courbe dépendrait de la relation arbitraire que l'on établirait entre les paramètres α et β. Mais il y a un ou plusieurs points de la surface $F=0$ qui sont communs à toutes ces courbes; ce sont ceux dont les coordonnées annullent les dérivées partielles de F par rapport à α et à β : le lieu de ces points est dit la *surface enveloppe* des surfaces comprises dans l'équation $F(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$. L'équation de cette surface enveloppe résulte de l'élimination de α, β, entre les équations

$$F(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \qquad \frac{dF}{d\alpha} = 0, \qquad \frac{dF}{d\beta} = 0.$$

Chacune des enveloppées, correspondante à des valeurs déterminées de de α, β, est touchée par la surface enveloppe, au point d'intersection limite défini par les équations précédentes. La démonstration de cette propriété, analogue à celle que nous avons donnée plus haut, n'offre aucune difficulté.

Exercices.

1. Enveloppe d'un plan qui coupe les axes rectangulaires OX, OY, OZ, aux distances respectives $\frac{\alpha^2}{a+\alpha}$, $\frac{\alpha^2}{b+\alpha}$, $\frac{\alpha^2}{c+\alpha}$, a, b, c étant donnés.

R. L'équation de l'enveloppe est

$$(x+y+z)^2 + 4(ax+by+cz) = 0.$$

2. Enveloppe des sphères, ayant leurs centres sur une ellipse, et passant par le centre de l'ellipse.

R. Les équations de l'ellipse étant

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad z = 0,$$

celle de l'enveloppe sera

$$(x^2+y^2+z^2)^2 - 4(a^2x^2+b^2y^2) = 0.$$

3. On coupe un ellipsoïde par un plan : trouver l'enveloppe des plans tangents à l'ellipsoïde aux différents points de la section.

R. Les équations de l'ellipsoïde et du plan sécant étant

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad lx + my + nz = p,$$

celle de l'enveloppe sera

$$(a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2 - p^2)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) - (lx + my + nz - p)^2 = 0.$$

C'est un cône qui a son sommet au point dont les coordonnées sont

$$\frac{a^2l}{p}, \quad \frac{b^2m}{p}, \quad \frac{c^2n}{p}.$$

4. Enveloppe du plan qui détache d'un trièdre tri-rectangle un tétraèdre à volume constant k^3.

R. La surface, rapportée aux arêtes du trièdre, a pour équation

$$xyz = 27k^3.$$

5. Enveloppe de la surface

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^m + \left(\frac{y}{\beta}\right)^m + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^m = 1,$$

les paramètres (α, β, γ) satisfaisant à l'équation

$$\left(\frac{\alpha}{a}\right)^p + \left(\frac{\beta}{b}\right)^p + \left(\frac{\gamma}{c}\right)^p = 1.$$

R. L'équation de la surface enveloppe est

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{mp}{m+p}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{mp}{m+p}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{mp}{m+p}} = 1,$$

6. Trouver l'enveloppe du plan passant par les projections d'un point quelconque de l'ellipsoïde sur ses trois axes. — Cas particulier du problème 5.

7. Trouver l'enveloppe du plan

$$lx + my + nz = V,$$

les paramètres l, m, n, V vérifiant les équations

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1, \qquad \frac{l^2}{V^2 - a^2} + \frac{m^2}{V^2 - b^2} + \frac{n^2}{V^2 - c^2} = 1,$$

où a, b, c sont donnés.

R. Posant $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, on trouve

$$\frac{x^2}{r^2 - a^2} + \frac{y^2}{r^2 - b^2} + \frac{z^2}{r^2 - c^2} = 1.$$

§ 2. CONTACTS DES COURBES GAUCHES, DES SURFACES.

212. *Contact des courbes gauches.* — Deux courbes (A) et (B) ayant un point commun M, si l'on mène à une distance infiniment petite du point M un plan qui coupe ces courbes respectivement en M′ et μ', et si la distance M′μ' est de l'ordre $n+1$ par rapport à l'arc MM′, on dit que les deux courbes ont, au point M, un contact de l'ordre n. Cette définition sera d'ailleurs indépendante de la direction du plan sécant, s'il n'est point parallèle à la tangente

en M à l'une des courbes (A) ou (B), comme on le prouverait en décrivant du centre M une sphère de rayon MM' et raisonnant comme au n° 163.

Supposons que ce plan soit parallèle au plan des xy; l'arc MM' étant de même ordre que l'accroissement de z lorsque l'on passe du point M au point M', et la distance M'μ' étant, en général, de même ordre que ses projections sur les plans XZ, YZ, on conclut immédiatement de ce qui précède que, si les courbes (A) et (B) ont en M un contact de l'ordre n, leurs projections sur les plans XZ et YZ auront un contact du même ordre; et, par conséquent, les dérivées

$$\frac{dx}{dz}, \quad \frac{d^2x}{dz^2}, \ldots, \quad \frac{d^nx}{dz^n}; \quad \frac{dy}{dz}, \quad \frac{d^2y}{dz^2}, \ldots, \quad \frac{d^ny}{dz^n},$$

auront respectivement mêmes valeurs dans les deux courbes, au point considéré.

Si les équations de la courbe (B) renferment un certain nombre de paramètres arbitraires, on pourra déterminer ces paramètres par la condition que les courbes (A) et (B) aient un contact de l'ordre le plus élevé possible : on aura la courbe *osculatrice* de l'espèce (B).

Exercices. Chercher la droite osculatrice et le cercle osculateur en un point d'une courbe donnée (A). On trouvera, respectivement, la tangente et le cercle de courbure, comme il était facile de le prévoir.

213. Une courbe (A) et une surface (S), qui ont un point commun M, ont en ce point *un contact de l'ordre n*, lorsque, prenant sur la courbe un arc infiniment petit du premier ordre MM', et abaissant du point M' une normale M'M'' terminée à la surface, on trouve cette distance M'M'' infiniment petite de l'ordre $n+1$. On conclut facilement de là que la différence des ordonnées de la courbe et de la surface, qui répondent à un même accroissement infiniment petit Δt de la variable indépendante à partir du point M, sera aussi de l'ordre $n+1$ par rapport à Δt, pourvu que la direction de ces ordonnées ne soit parallèle, ni à la tangente à (A), ni au plan tangent à (S), au point M. On développera par la formule de Taylor la différence des ordonnées de la courbe et de la surface, suivant les puissances de Δt, et l'on obtiendra les conditions analytiques du contact de l'ordre n. Ces conditions pourront servir à déterminer les paramètres arbitraires de l'équation d'une surface (S), de telle manière que cette surface ait avec une courbe donnée, en un point donné, un contact d'ordre aussi élevé que possible.

Par exemple, l'équation du plan renfermant trois paramètres, on pourra

lui imposer un contact du second ordre avec une courbe (A) : on trouvera le plan osculateur.

L'équation de la sphère renfermant quatre paramètres, une sphère pourra avoir avec une courbe (A) un contact du troisième ordre : on retrouve ainsi la sphère osculatrice.

214. *Contact de deux surfaces.* — Deux surfaces, (S) et (Σ), qui ont un point commun M, ont en ce point un contact de l'ordre n, lorsqu'à une distance infiniment petite du premier ordre du point M sur la surface (S), la distance M′M″ des deux surfaces, mesurée normalement à l'une d'entr'elles, est un infiniment petit de l'ordre $n+1$. Si l'axe des z n'est pas parallèle au plan tangent à l'une des deux surfaces en M, la différence des ordonnées des surfaces (S) et (Σ) parallèles à cet axe, dans le voisinage du point M, sera aussi de l'ordre $n+1$ par rapport aux accroissements infiniment petits h et k de x et de y, considérés comme étant du premier ordre.

D'après cela, si l'on développe par la série de Taylor (118) la différence des ordonnées des surfaces (S) et (Σ), suivant les puissances de h et de k, on voit immédiatement que la condition ci-dessus revient à la suivante : il faut et il suffit que les dérivées partielles de z, jusqu'à l'ordre n inclusivement,

$$\frac{dz}{dx},\quad \frac{dz}{dy},\quad \frac{d^2z}{dx^2},\quad \frac{d^2z}{dxdy},\quad \frac{d^2z}{dy^2},\ldots,\quad \frac{d^nz}{dx^n},\ldots,\quad \frac{d^nz}{dy^n},$$

conservent les mêmes valeurs, au point M, lorsque l'on passe de la surface (S) à la surface (Σ).

Si l'équation de la surface (Σ) renferme des paramètres indéterminés, et que l'on détermine ces paramètres en assujétissant la surface (Σ) à avoir, au point M, un contact d'ordre aussi élevé que possible avec (S), on obtiendra la surface (Σ) *osculatrice* de (S). Ainsi, l'équation du plan renfermant trois paramètres, la condition d'un contact du premier ordre avec la surface (S) suffit pour les déterminer. On trouve ainsi le plan tangent à la surface (S).

L'équation d'une surface du second ordre contient neuf paramètres : on peut donc lui donner un contact du second ordre, et il restera trois arbitraires dont on pourra disposer pour satisfaire à d'autres conditions (1).

---

(1) Nous ne faisons qu'indiquer ces théories des divers ordres de contact des lignes ou des surfaces. On les trouvera développées dans les *Applications du calcul infinitésimal à la géométrie* de Cauchy, 21me et 22me leçons.

DEUXIÈME PARTIE.

CALCUL INTÉGRAL.

LIVRE QUATRIÈME.

INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES.

CHAPITRE XXV.

NOTIONS FONDAMENTALES.

215. Le *calcul intégral* est l'inverse du calcul différentiel : il a pour objet de remonter, des relations données entre les variables et leurs différentielles, aux relations qui ont lieu entre les variables seulement.

Le cas le plus simple de ce problème, celui qui nous occupera d'abord, est celui où l'on se propose de trouver une fonction d'une seule variable, connaissant sa dérivée par rapport à cette variable en fonction explicite de celle-ci. Mais ce problème présente une liaison intime avec le problème des limites de sommes dont nous avons parlé au commencement du cours (33), et que nous avons énoncé ainsi : *Trouver la limite vers laquelle converge la somme des valeurs successives d'une fonction, multipliées respectivement par les accroissements infiniment petits correspondants de*

la variable dont elle dépend, celle-ci étant supposée passer d'une valeur donnée à une autre valeur donnée par un nombre indéfiniment croissant de valeurs intermédiaires.

Pour établir cette relation, appelons $f(x)$ la fonction, et admettons qu'elle soit continue par rapport à x depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$, x_0 et X étant deux valeurs déterminées de x. Concevons que la variable passe de la valeur x_0 à la valeur X par une suite d'accroissements de même signe

$$x_1 - x_0, \quad x_2 - x_1, \ldots, \quad X - x_{n-1},$$

désignés en général par Δx, et soit $\Sigma f(x) \Delta x$ la somme des valeurs de la fonction multipliées respectivement par ces accroissements, en sorte que l'on ait

$$\Sigma f(x) \Delta x = (x_1 - x_0) f(x_0) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \cdots + (X - x_{n-1}) f(x_{n-1}).$$

Lorsque tous les accroissements Δx tendent vers zéro, n devenant infini, la somme $\Sigma f(x) \Delta x$ tend vers une limite finie et déterminée. En effet, si l'on construit la courbe représentée en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$y = f(x),$$

la quantité $\Sigma f(x) \Delta x$ représentera (32) la somme des rectangles construits sur les ordonnées de cette courbe qui répondent aux abscisses x_0, x_1,..., x_{n-1}, et sur les portions infiniment petites correspondantes de l'axe des x; or, cette somme a pour limite, comme nous l'avons démontré, l'aire plane comprise entre la courbe, l'axe des x, et les ordonnées $f(x_0)$, $f(X)$, aire qui est nécessairement finie et déterminée.

Nous supposons ici, implicitement, que $X - x_0$ et $f(x)$ soient positifs; mais il est facile de voir que, s'il en était autrement, il suffirait de regarder comme négatives les aires correspondantes de la courbe, pour que nos conclusions subsistent entièrement.

Cette limite de $\Sigma f(x) \Delta x$, pour des valeurs infiniment petites de Δx, a été désignée par la notation

$$\int_{x_0}^{X} f(x) dx,$$

et se nomme *l'intégrale définie de* $f(x) dx$ *depuis* x_0 *jusqu'à* X; x_0, X sont les *limites* de l'intégrale. On aura donc, par définition,

$$\int_{x_0}^{x} f(x) dx = lim \Sigma f(x) \Delta x.$$

216. Concevons maintenant que, la limite x_0 restant invariable, on fasse varier la limite X; la valeur de l'intégrale variera avec X, et sera une fonction déterminée de cette quantité. Remplaçons X par x pour indiquer plus clairement que cette limite est variable; la fonction de x désignée par la notation

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

sera toujours représentée géométriquement par l'aire plane comprise entre la courbe $y = f(x)$, l'axe des x, une ordonnée fixe $f(x_0)$, et une ordonnée variable $f(x)$. Il suit de là, d'abord, que cette fonction est continue par rapport à x en même temps que $f(x)$, car, si un accroissement infiniment petit de l'abscisse produit un accroissement infiniment petit de l'ordonnée de la courbe, l'accroissement correspondant de l'aire de courbe sera aussi infiniment petit, et par suite celui de la fonction $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$.

De plus, nous avons fait voir (141) que l'aire d'une courbe plane, entre une ordonnée fixe et une ordonnée variable, est une fonction de l'abscisse x de cette dernière ordonnée, qui a pour dérivée par rapport à x l'ordonnée elle-même, si les axes sont rectangulaires. Cette propriété, qui subsiste quels que soient les signes de $x - x_0$ et de $f(x)$ si l'on conserve la convention ci-dessus, nous donne ce théorème général :

Théorème I. *La limite de somme que nous désignons par la notation*

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx,$$

est une fonction de la variable x, dont la dérivée par rapport à x est égale à $f(x)$.

On a donc

$$D_x \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = f(x), \qquad d\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

Quand la limite supérieure de l'intégrale sera variable, la limite inférieure étant une constante x_0, comme ici, nous dirons simplement que *l'intégrale est prise à partir de x_0*, réservant le nom d'intégrale définie pour le cas où les deux limites sont des constantes données.

217. Plusieurs conséquences importantes résultent du théorème énoncé.

1° Il est d'abord démontré que le problème de calcul intégral dont nous

voulons nous occuper admet toujours une solution, c'est-à-dire qu'il existe toujours une fonction y de x propre à satisfaire à l'équation

$$dy = \mathrm{f}(x)dx,$$

$\mathrm{f}(x)$ étant une fonction continue donnée. Car la fonction $\int_{x_0}^{x} \mathrm{f}(x)dx$, dont nous avons démontré l'existence, jouit de cette propriété comme on vient de l'établir.

2° Supposons que l'on ait trouvé, par une méthode quelconque, une fonction $\mathrm{F}(x)$ qui satisfasse à la question, c'est-à-dire qui ait pour dérivée la fonction proposée $\mathrm{f}(x)$. En lui ajoutant une *constante arbitraire* C, on aura une nouvelle solution, plus générale, de la question, puisque la dérivée de $\mathrm{F}(x) + \mathrm{C}$ sera encore $\mathrm{f}(x)$. C'est même la plus générale, car on a démontré dans le calcul différentiel (31) que deux fonctions de x, dont les dérivées sont constamment égales, ne peuvent différer que par une quantité indépendante de x. Toute fonction de x ayant pour dérivée $\mathrm{f}(x)$ sera donc comprise dans l'expression $\mathrm{F}(x) + \mathrm{C}$, C étant une constante arbitraire. Donc

Théorème II. *Lorsque l'on a trouvé une fonction* $\mathrm{F}(x)$ *de* x *dont la dérivée est égale, pour toute valeur de* x *comprise dans un intervalle déterminé, à une fonction donnée* $\mathrm{f}(x)$, *on aura la fonction la plus générale qui remplisse la même condition dans le même intervalle, en ajoutant à la première* $\mathrm{F}(x)$ *une constante arbitraire.*

Cette fonction la plus générale dont la dérivée est $\mathrm{f}(x)$, se nomme *l'intégrale indéfinie* de $\mathrm{f}(x)dx$, et se représente par la notation

$$\int \mathrm{f}(x)\,dx.$$

Les signes d, $\int$ indiquent donc deux opérations inverses l'une de l'autre, et qui se détruisent :

$$d\int \mathrm{f}(x)\,dx = \mathrm{f}(x)\,dx.$$

3° Enfin, le théorème I ramène, comme nous l'avons dit, le problème des limites de sommes à dépendre d'une question de calcul intégral. Supposons qu'il s'agisse de déterminer cette limite d'une somme d'infiniment petits que nous désignons par la notation

$$\int_{x_0}^{\mathrm{X}} \mathrm{f}(x)dx.$$

On cherchera d'abord une fonction $\mathrm{F}(x)$ dont la dérivée, pour toute

valeur de x entre x_0 et X, soit égale à $f(x)$; on lui ajoutera une constante arbitraire C, et l'on aura l'intégrale indéfinie de $f(x)\,dx$.

On sait, d'autre part, que l'intégrale prise à partir de x_0, c'est-à-dire la fonction

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx,$$

a pour dérivée $f(x)$; elle est donc comprise dans l'intégrale indéfinie, et répond à une certaine valeur C_1 de la constante C. On a donc

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = F(x) + C_1.$$

Pour déterminer C_1, on observe que l'intégrale est nulle, évidemment, pour $x = x_0$, et en introduisant cette hypothèse dans les deux membres, on trouve

$$0 = F(x_0) + C_1, \qquad C_1 = -F(x_0),$$

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = F(x) - F(x_0).$$

Enfin, il suffit de donner à la variable la valeur particulière X, dans cette égalité, et l'on aura

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = F(X) - F(x_0).$$

Théorème III. *La somme des valeurs successives d'une fonction continue* $f(x)$, *multipliées respectivement par les accroissements infiniment petits correspondants de la variable, lorsque celle-ci passe d'une valeur* x_0 *à une valeur* X, *a pour limite l'accroissement total que prend, de* $x = x_0$ *à* $x = X$, *une fonction* $F(x)$ *qui a pour dérivée* $f(x)$.

Ce théorème important, qui exprime la relation annoncée, se vérifie d'ailleurs en observant que l'accroissement total de $F(x)$ est la somme de ses accroissements infiniment petits, et que ceux-ci peuvent être (43) remplacés par les valeurs successives de la différentielle de $F(x)$, en sorte que

$$F(X) - F(x_0) = \Sigma\Delta F(x) = lim\ \Sigma F'(x)\Delta x = lim\ \Sigma f(x)\Delta x = \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx.$$

218. La recherche des limites de sommes se ramenant à celle des fonctions dont la dérivée est donnée, on conçoit sans peine l'utilité du calcul intégral dans une foule de questions qui dépendent de l'évaluation

de ces limites, comme la *quadrature des aires planes*, etc. (1). Pour en donner un exemple très-simple, supposons qu'il s'agisse de trouver l'aire de la courbe dont l'équation est, en coordonnées rectangulaires,

$$y = \frac{1}{1 + x^2},$$

entre les ordonnées qui répondent à $x = 0$, $x = 1$.

D'après ce qui précède, cette aire est représentée par l'intégrale définie

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}.$$

Or, on sait que la fonction arc tg x a pour dérivée $(1 + x^2)^{-1}$, et si l'on applique l'équation ci-dessus, on aura

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \text{arc tg}\,(1) - \text{arc tg}\,(0) = \frac{\pi}{4} = 0{,}785398...$$

Ce sera donc là la valeur de l'aire demandée.

Dans tout ce qui précède, nous avons admis que la fonction $f(x)$ soit continue depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$, x_0 et X ayant des valeurs finies. Si pourtant elle devenait discontinue sans devenir infinie, pour une ou plusieurs valeurs de x comprises entre x_0 et X, on reconnait facilement que tous nos raisonnements subsisteraient. Il existerait encore une fonction *continue* $F(x)$, ayant sa dérivée égale à $f(x)$, et à laquelle les théorèmes II et III s'appliqueraient. Mais si la fonction $f(x)$ cessait d'être finie soit aux limites, soit entre les limites, il faudrait un examen particulier.

La recherche des intégrales définies étant ramenée à celle des intégrales indéfinies, nous nous occuperons d'abord de ces dernières.

CHAPITRE XXVI.

DIVERSES MÉTHODES D'INTÉGRATION.

219. La différentiation et l'intégration étant deux opérations inverses l'une de l'autre, chaque proposition concernant la première a sa réciproque

---

(1) C'est pour cela que l'on appelle ordinairement *quadrature* l'opération par laquelle on cherche l'intégrale indéfinie d'une fonction donnée.

concernant la seconde. Ainsi, a désignant une constante, on a

$$\int a\mathrm{f}(x)\,dx = a\int \mathrm{f}(x)\,dx\,;$$

car le second membre a pour différentielle, d'après une règle établie dans la première partie, $a\mathrm{f}(x)dx$; et comme il renferme implicitement une constante arbitraire, il est égal à l'intégrale indéfinie de $a\mathrm{f}(x)dx$.

Ainsi, *tout facteur constant peut être mis hors du signe d'intégration.*

Les autres règles de différentiation donnent pareillement divers théorèmes, qui constituent autant de procédés d'intégration, et que nous allons passer en revue.

220. *Intégration immédiate.* — Lorsque, dans l'expression à intégrer $\mathrm{f}(x)dx$, on reconnait la différentielle d'une fonction connue $\mathrm{F}(x)$, il suffit d'ajouter à celle-ci une constante arbitraire pour obtenir l'intégrale indéfinie de $\mathrm{f}(x)\,dx$. En appliquant cette remarque aux différentielles des fonctions simples, on obtient immédiatement le tableau suivant, qui répond à celui du n° 57.

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + \mathrm{C}, \qquad \int \mathrm{A}^x dx = \frac{\mathrm{A}^x}{\mathrm{l.A}} + \mathrm{C},$$

$$\int e^x dx = e^x + \mathrm{C}, \qquad \int \frac{dx}{x} = \mathrm{l.}x + \mathrm{C},$$

$$\int \cos x dx = \sin x + \mathrm{C}, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + \mathrm{C}.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + \mathrm{C}, \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + \mathrm{C},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{arc}\sin x + \mathrm{C}, \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arc\,tg}\, x + \mathrm{C},$$

etc.

Ces formules constituent une sorte de *dictionnaire* que la mémoire doit bien posséder, parce que c'est à elles que l'on tend toujours à réduire toute intégration.

221. *Intégration par substitution.* — Cette méthode, basée sur la règle pour différentier une fonction de fonction, consiste en ceci : soit

$$u = \int \mathrm{f}(x)\,dx, \qquad \text{d'où} \qquad du = \mathrm{f}(x)dx.$$

Si nous posons $x = \varphi(z)$, z désignant une nouvelle variable, nous aurons

$$dx = \varphi'(z)\,dz, \qquad du = \mathrm{f}[\varphi(z)]\,\varphi'(z)\,dz,$$

et par conséquent u, considéré comme fonction de z, sera donné par la formule

$$u = \int f[\varphi(z)]\,\varphi'(z)\,dz.$$

Or, on conçoit que la relation entre x et z pourra être, dans bien des cas, choisie de manière à simplifier l'expression de la différentielle de u, et à la ramener à une forme immédiatement intégrable. Ayant la valeur de u en fonction de z, on tirera celle de z en fonction de x de l'équation $x = \varphi(z)$, et en la portant dans l'expression de u, on aura l'intégrale demandée.

Par exemple, soit à chercher

$$\int \frac{dx}{a+bx};$$

on posera

$$a + bx = z, \qquad \text{d'où} \qquad bdx = dz,$$

et l'on aura

$$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\int \frac{dz}{z} = \frac{1}{b}\,\text{l.}\,z + \text{C} = \frac{1}{b}\,\text{l.}\,(a+bx) + \text{C}.$$

De même,

$$\int \frac{dx}{(a+bx)^m} = \frac{1}{b}\int \frac{dz}{z^m} = -\frac{1}{(m-1)b}\,\frac{1}{z^{m-1}} + \text{C} = -\frac{1}{(m-1)b(a+bx)^{m-1}} + \text{C}.$$

L'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$$

s'obtient en divisant par $\cos^2 x$ les deux termes de la fraction et posant $\text{tg}\, x = z$. On trouve

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{dz}{z} = \text{l.}\,z + \text{C} = \text{l.}\,\text{tg}\,x + \text{C}.$$

Exercices.

$$\int \frac{dx}{a^2 + b^2x^2} = \frac{1}{ab}\,\text{arc tg}\,\frac{bx}{a} + \text{C};$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \text{arc sin}\,\frac{x}{a} + \text{C}; \qquad \int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2} + \text{C};$$

$$\int \frac{dx}{x\,\text{l.}\,x} = \text{l.}\,\text{l.}\,x + \text{C}; \qquad \int \frac{dx}{\alpha^2 e^x + \beta^2 e^{-x}} = \frac{1}{\alpha\beta}\,\text{arc tg}\left(\frac{\alpha e^x}{\beta}\right) + \text{C};$$

$$\int \frac{xdx}{a^4 + x^4} = \frac{1}{2a^2}\,\text{arc tg}\,\frac{x^2}{a^2} + \text{C}; \qquad \int \frac{dx}{1 + \cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{arc tg}\left(\frac{\text{tg}\,x}{\sqrt{2}}\right) + \text{C};$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} \text{arc sin}(1-2x) = -\frac{1}{2}[\text{arc sin}(1-2x)]^2 + C;$$

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

En général, si $F'(x) = f(x)$, on aura

$$\int f(a^2+x^2)\, x dx = \frac{1}{2} F(a^2+x^2) + C, \qquad \int f(e^x) e^x dx = F(e^x) + C,$$

$$\int f(\sin x) \cos x dx = F(\sin x) + C, \qquad \int f(\text{l}.\, x) \frac{dx}{x} = F(\text{l}.\, x) + C,$$

etc. etc.

222. *Intégration par décomposition.* — Cette méthode repose sur la propriété suivante, conséquence de la règle pour différentier une somme :

$$\int [f(x) + \varphi(x) + \psi(x) + \ldots] dx = \int f(x) dx + \int \varphi(x) dx + \int \psi(x) dx + \ldots$$

En effet, d'après cette règle, la différentielle du second membre est égale à

$$[f(x) + \varphi(x) + \psi(x) + \ldots] dx,$$

et comme la constante arbitraire est comprise dans le signe d'intégration indéfinie, etc. Ainsi *l'intégrale de la somme algébrique de plusieurs différentielles est la somme algébrique des intégrales de ces différentielles.*

En décomposant donc une différentielle donnée en une somme de plusieurs autres, on parviendra dans beaucoup de cas à simplifier et à effectuer les intégrations; mais une habileté particulière est souvent nécessaire pour transformer la différentielle de manière à rendre cette décomposition possible. Exemple :

$$\int \frac{dx}{a^2-b^2x^2} = \int \frac{dx}{(a-bx)(a+bx)} = \frac{1}{2a} \int \frac{(a-bx+a+bx)\, dx}{(a-bx)(a+bx)} = \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{a+bx}$$

$$+ \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{a-bx} = \frac{1}{2ab} \text{l}.(a+bx) - \frac{1}{2ab} \text{l}.(a-bx) + C,$$

d'où enfin

$$\int \frac{dx}{a^2-b^2x^2} = \frac{1}{2ab} \text{l}. \frac{a+bx}{a-bx} + C.$$

De même, en introduisant le facteur $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, on trouvera

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \text{tg}\, x - \cot x + C = -2 \cot 2x + C.$$

Exercices. $$\int \frac{dx}{\alpha+\beta e^x} = \frac{1}{\alpha}[x - \mathrm{l.}(\alpha+\beta e^x)] + C;$$

$$\int dx\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \arc\sin x - \sqrt{1-x^2} + C; \qquad \int \mathrm{tg}^2 x dx = \mathrm{tg}\, x - x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x} = \frac{1}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2\sin^2 x} + 2\,\mathrm{l.\,tg.}\, x + C;$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C;$$

$$\int \sin \alpha x \cos \beta x dx = -\int \frac{\cos(\alpha+\beta)x}{2(\alpha+\beta)} - \frac{\cos(\alpha-\beta)x}{2(\alpha-\beta)} + C;$$

$$\int \frac{dx}{a^4 - b^4x^4} = \frac{1}{2a^3b}\left(\mathrm{arc\,tg}\frac{bx}{a} + \frac{1}{2}\mathrm{l.}\frac{a+bx}{a-bx}\right) + C.$$

223. *Intégration par partie.* — En désignant par u, v deux fonctions d'une variable x, on a trouvé pour différentier le produit uv la formule

$$d.\,uv = vdu + udv,$$

d'où

$$udv = d.\,uv - vdu.$$

Intégrant les deux membres et appliquant la règle (222), on aura

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Cette équation constitue la règle de *l'intégration par partie.* Toutes les fois que la différentielle donnée $f(x)dx$ sera décomposable dans le produit d'une fonction u par la différentielle dv d'une autre fonction, cette règle ramènera le problème à la recherche de l'intégrale de vdu, qui sera souvent plus facile à trouver. Soit, comme exemple, à déterminer l'intégrale

$$\int \mathrm{arc\,tg}\, x\, dx.$$

Faisant dans la formule générale $u = \mathrm{arc\,tg}\, x$, $v = x$, on a

$$\int \mathrm{arc\,tg}\, x\, dx = x\, \mathrm{arc\,tg}\, x - \int \frac{xdx}{1+x^2} = x\, \mathrm{arc\,tg}\, x - \frac{1}{2}\mathrm{l.}(1+x^2) + C.$$

Soit encore, m étant entier et positif,

$$\int x^m \cos x dx = \int x^m d(\sin x) = x^m \sin x - m\int x^{m-1}\sin x dx.$$

Une seconde intégration par partie ramènera cette intégrale à celle de $x^{m-2}\cos x dx$, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on arrive à $\int \cos x dx$ ou à

$\int \sin x\, dx$, lesquelles, étant connues, feront connaître toutes les précédentes.

Exercices. $\int x^3e^xdx = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)$;

$$\int \text{arc sin } x\, dx = x \text{ arc sin } x + \sqrt{1-x^2} + C;$$

$$\int \frac{xe^xdx}{(1+x)^2} = \frac{e^x}{1+x} + C; \quad \int \frac{x \text{ arc sin } x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = x - \sqrt{1-x^2} \text{ arc sin } x + C;$$

$$\int \text{arc sin } x \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ arc sin } x + \frac{1}{2} \text{l.}(1-x^2) + C;$$

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{(1-x)^m} = \frac{1}{m-1}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{m-1} - \frac{1}{m-2}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{m-2} + \cdots \pm \frac{x}{1-x} \pm \text{l.}(1-x) + C.$$

224. *Remarques.* 1° Il arrive souvent que l'intégrale d'une même expression, obtenue par divers procédés, se présente sous des formes différentes, ce qui peut tenir à ce que l'on a dégagé de la constante arbitraire une constante déterminée, pour la réunir à la fonction qui représente l'intégrale. C'est ainsi que l'intégrale

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tg } x + C$$

peut se présenter sous la forme

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tg } \frac{x-1}{x+1} + C_1,$$

si l'on pose $C = C_1 - \frac{\pi}{4}$, et si l'on observe que l'on a

$$\frac{\pi}{4} = \text{arc tg } 1, \qquad \text{arc tg } x - \text{arc tg } 1 = \text{arc tg } \frac{x-1}{x+1}.$$

2° On a démontré que, $F(x)$ désignant une fonction qui a pour différentielle $f(x)dx$ pour toute valeur de x comprise dans un intervalle déterminé, toute fonction qui jouit de la même propriété dans le même intervalle ne diffère de $F(x)$ que par une constante. Il faut bien se garder de conclure de là que l'intégrale de $f(x)dx$ soit nécessairement représentée par une même expression analytique, dans toute l'étendue des valeurs de la variable. Il peut se faire que l'intégrale, représentée entre certaines limites de la variable par une expression, soit représentée entre d'autres limites par une autre expression; et la première pourrait devenir imagi-

ginaire dans ce second intervalle, sans que l'on fût en droit d'en conclure que la différentielle proposée n'admet plus d'intégrale réelle. Par exemple, si l'on suppose $x < a$, on a

$$\int \frac{dx}{a-x} = -\text{l.}\,(a-x) + \text{C}.$$

Lorsque x devient $> a$, $a - x$ est négatif et son logarithme imaginaire; mais, comme la fonction à intégrer reste réelle, il est évident qu'elle admet encore une intégrale réelle. Or, on a

$$\int \frac{dx}{a-x} = -\int \frac{dx}{x-a} = -\text{l.}\,(x-a) + \text{C},$$

et sous cette forme, l'intégrale est réelle pour $x > a$. Ainsi, l'intégrale de la différentielle proposée a pour expression analytique $-\text{l.}\,(a-x)$ ou $-\text{l.}\,(x-a)$, selon que x est $<$ ou $> a$.

On ne doit pas perdre de vue cette remarque toutes les fois que l'on intègre par logarithmes.

Exercices (combinaison des diverses méthodes).

1. $\int dx\sqrt{a^2-x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \text{C}.$

2. $\int \frac{dx}{x}\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{x^2-a^2} - a\arccos\frac{a}{x} + \text{C}.$

3. $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\text{arc tg}\,x dx = x\,\text{arc tg}\,x - \frac{1}{2}(\text{arc tg}\,x)^2 - \frac{1}{2}\,\text{l.}\,(1+x^2) + \text{C}.$

4. $\int dx \arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}} = \int dx\,\text{arc tg}\sqrt{\frac{x}{a}} = (a+x)\,\text{arc tg}\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{ax} + \text{C}.$

5. $\int e^{m \arcsin x}dx = \frac{e^{m\arcsin x}(x+m\sqrt{1-x^2})}{1+m^2} + \text{C}.$

6. $$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\,\text{l.}\,\frac{2cx+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2cx+b+\sqrt{b^2-4ac}} + \text{C}, & \text{si } b^2-4ac>0; \\ -\frac{2}{2cx+b}, & \text{si } b^2-4ac=0; \\ \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\,\text{arc tg}\,\frac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}}, & \text{si } b^2-4ac<0; \end{cases}$$

CHAPITRE XXVII.

INTÉGRATION DES FONCTIONS RATIONNELLES.

§ 1. DÉCOMPOSITION D'UNE FRACTION RATIONNELLE EN FRACTIONS SIMPLES.

225. L'intégration des différentielles rationnelles reposant, en grande partie, sur la décomposition d'une fraction rationnelle en fractions plus simples, nous traiterons d'abord cette dernière question.

Soient $f(x)$, $F(x)$ deux fonctions rationnelles entières de la variable x; a une racine réelle de l'équation $F(x) = 0$, et m son degré de multiplicité, en sorte que

$$(1) \qquad F(x) = (x - a)^m F_1(x),$$

$F_1(x)$ étant une nouvelle fonction rationnelle entière de x, qui ne s'annulle plus pour $x = a$. On posera, A étant une constante finie,

$$A = \frac{f(a)}{F_1(a)}, \qquad \text{d'où} \qquad f(a) - AF_1(a) = 0.$$

La fonction $f(x) - AF_1(x)$ s'annulle donc pour $x = a$, et est divisible par $x - a$; en d'autres termes,

$$f(x) - AF_1(x) = (x - a) f_1(x),$$

$f_1(x)$ désignant une fonction entière de x. Divisant les deux membres de cette équation par $F(x)$, en ayant égard à l'équation (1), on trouvera

$$(2) \qquad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{(x-a)^m} + \frac{f_1(x)}{(x-a)^{m-1} F_1(x)}.$$

La fraction rationnelle $f(x) : F(x)$ *est donc toujours décomposable en deux autres, l'une qui a pour numérateur une constante, et pour dénominateur le facteur* $(x - a)$ *élevé à la plus haute puissance à laquelle il entre dans le dénominateur* $F(x)$*; l'autre, qui a pour numérateur une fonction entière* $f_1(x)$*, et pour dénominateur la fonction* $F(x)$ *dans laquelle l'exposant de* $(x - a)$ *est abaissé d'une unité.*

Ce théorème, appliqué à la dernière fraction, permettra de la décomposer à son tour en deux autres; et ainsi de suite, jusqu'à ce que, l'exposant de $(x - a)$ s'abaissant chaque fois d'une unité, on arrive à une

fraction dont le dénominateur soit complètement débarrassé de ce facteur. On aura donc

$$(3)\quad \frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{(x-a)^m}+\frac{A_1}{(x-a)^{m-1}}+\dots+\frac{A_{m-1}}{x-a}+\frac{f_m(x)}{F_1(x)},$$

$A, A_1, \ldots, A_{m-1}$ étant des constantes déterminées comme on l'a vu plus haut et qui ne sont jamais infinies; et $f_m(x)$ une fonction entière de x.

Si a était une racine simple de l'équation $F(x)=0$, m se réduirait à l'unité, et les fractions simples correspondantes à cette racine à une seule.

226. Soit maintenant b une seconde racine, du degré n de multiplicité, de l'équation $F(x)=0$, en sorte que

$$F(x)=(x-a)^m(x-b)^n F_2(x),\qquad F_1(x)=(x-b)^n F_2(x),$$

F_2 désignant une fonction entière. En appliquant le théorème ci-dessus à la fraction

$$\frac{f_m(x)}{F_1(x)}=\frac{f_m(x)}{(x-b)^n F_2(x)},$$

on la décomposera encore en n fractions simples correspondantes à la racine b, et une fraction dégagée de cette racine, et l'on aura

$$\frac{f_m(x)}{F_1(x)}=\frac{B}{(x-b)^n}+\frac{B_1}{(x-b)^{n-1}}+\dots+\frac{B_{n-1}}{x-b}+\frac{f_{m+n}(x)}{F_2(x)}.$$

Et l'on continuera cette série d'opérations jusqu'à ce que, ayant successivement épuisé tous les facteurs correspondants aux racines de l'équation $F(x)=0$, on soit ramené à une fraction dont le dénominateur ne renferme plus aucun facteur en x, c'est-à-dire *à une fonction entière* $E(x)$.

227. La décomposition de la fraction rationnelle $f(x):F(x)$ pourrait se faire de la même manière, si les racines $a, b, \ldots$, au lieu d'être réelles, étaient imaginaires, car nous n'avons rien dit qui ne soit applicable à ces dernières. Mais comme les coefficients $A, A_1, \ldots$ seraient alors imaginaires, il est préférable d'opérer la décomposition sous une autre forme, qui ne donne que des fractions réelles. On s'appuie pour cela sur un théorème tout semblable au premier.

Soit $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ une racine imaginaire, du degré m de multiplicité, de l'équation $F(x)=0$; les racines imaginaires étant conjuguées deux à deux,

comme on sait, l'équation aura aussi m racines égales à $\alpha - \beta\sqrt{-1}$; F(x) sera donc divisible par

$$(x-\alpha-\beta\sqrt{-1})^m(x-\alpha+\beta\sqrt{-1})^m = [(x-\alpha-\beta\sqrt{-1})(x-\alpha+\beta\sqrt{-1})]^m,$$

en sorte que l'on aura, quelque soit x,

$$(4) \qquad F(x) = [(x-\alpha)^2 + \beta^2]^m F_1(x),$$

$F_1(x)$ étant une fonction réelle et entière de x.

Posons

$$(5) \qquad M(\alpha+\beta\sqrt{-1}) + N = \frac{f(\alpha+\beta\sqrt{-1})}{F_1(\alpha+\beta\sqrt{-1})}.$$

Le second membre de cette égalité se réduira (8, 9) à une certaine quantité imaginaire $P + Q\sqrt{-1}$ qui ne sera pas infinie, puisque $F_1(x)$ ne s'annule plus pour $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, et l'équation

$$M(\alpha+\beta\sqrt{-1}) + N = P + Q\sqrt{-1}$$

se décomposera en deux autres

$$M\alpha + N = P, \qquad M\beta = Q,$$

qui, évidemment, détermineront pour M, N des valeurs toujours réelles et finies.

Or, l'équation (5), mise sous la forme

$$f(\alpha+\beta\sqrt{-1}) - [M(\alpha+\beta\sqrt{-1}) + N]\,F_1(\alpha+\beta\sqrt{-1}) = 0,$$

montre que l'équation

$$f(x) - (Mx + N)\,F_1(x) = 0$$

admet la racine imaginaire $\alpha + \beta\sqrt{-1}$; et comme cette équation est à coefficients réels, elle admet aussi la racine $\alpha - \beta\sqrt{-1}$; on a donc, pour toute valeur de x,

$$f(x) - (Mx+N)\,F_1(x) = [(x-\alpha)^2 + \beta^2]\,f_1(x),$$

$f_1(x)$ étant une fonction réelle et entière de x.

Divisant les deux membres par F(x), et ayant égard à l'équation (4), on aura

$$(6) \qquad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{Mx+N}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^m} + \frac{f_1(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{m-1}F_1(x)}.$$

La fraction rationnelle f(x): F(x) *se décomposera donc en deux autres, l'une qui aura pour numérateur une fonction du premier degré en* x, *et pour dénominateur la plus haute puissance du facteur* $(x-\alpha)^2+\beta^2$ *qui entre dans* F(x)*; l'autre, ayant pour numérateur une fonction entière, et pour dénominateur la fonction* F(x), *dans laquelle l'exposant du facteur est abaissé d'une unité.*

Cette dernière fraction se décomposera, à son tour, en deux autres par le même théorème, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on trouve une fraction dont le dénominateur, ne renfermant plus $(x-\alpha)^2+\beta^2$ en facteur, se réduit à $F_1(x)$.

En combinant ce théorème avec celui que nous avons établi précédemment, on voit que toute fraction rationnelle $\frac{f(x)}{F(x)}$ sera décomposable 1° en une somme de fractions simples à coefficients réels, ayant pour dénominateurs les facteurs réels du premier ou de second degré en x, qui répondent aux racines de l'équation $F(x)=0$, élevés à des puissances égales ou inférieures à celles auxquelles ces facteurs entrent dans $F(x)$; 2° en une partie entière $E(x)$. En sorte que, connaissant les racines de l'équation $F(x)=0$, on pourra immédiatement écrire la formule de décomposition de la fraction $f(x):F(x)$, sauf que les numérateurs A, A_1,..., $Mx+N$,..., resteront à déterminer.

La marche suivie pour la démonstration des théorèmes conduirait à la détermination de coefficients, mais il existe pour cela des procédés plus expéditifs.

228. On peut d'abord employer la méthode des coefficients indéterminés. Après avoir cherché les racines de l'équation $F(x)=0$, et décomposé $F(x)$ en ses facteurs réels du premier ou du second degré correspondants à ces racines, on posera la formule de décomposition de la fraction suivant la nature et le degré de multiplicité des racines, comme on l'a dit plus haut. Multipliant ensuite par $F(x)$ les deux membres de l'équation, le premier se réduira à $f(x)$; dans le second, tous les dénominateurs des fractions simples disparaîtront, comme étant des facteurs de la fonction $F(x)$, en sorte que ce second membre se réduira aussi à une fonction entière de x. On ordonnera les deux membres de l'équation suivant les puissances ascendantes de x, et, l'égalité devant avoir lieu pour toute valeur de x, il faudra que les coefficients des mêmes puissances de x soient égaux dans les deux membres. On aura ainsi une suite d'égalités, du premier degré par rapport

aux coefficients inconnus A, A_1,..., B, B_1,..., M, N,..., et qui seront toujours en nombre suffisant pour les déterminer, ainsi que $E(x)$.

De là résulte cette conséquence importante : *si le degré de* $f(x)$ *par rapport à* x *est inférieur à celui du dénominateur* $F(x)$, *la partie entière* $E(x)$ *s'évanouira*. Car, soit λ le degré de $F(x)$. Le premier membre $f(x)$ de l'équation ci-dessus est de degré inférieur à λ, par hypothèse. Dans le second membre, les termes qui proviennent de la multiplication des fractions simples par $F(x)$ sont aussi, évidemment, de degré inférieur à λ; tandis que, si $E(x)$ n'était pas nul, le terme $F(x)\,E(x)$ renfermerait des termes de degré égal ou supérieur à λ, qui seraient conséquemment irréductibles avec les autres termes du second membre. Les deux membres de l'identité ne seraient donc pas de même degré par rapport à x, ce qui est absurde.

La méthode des coefficients indéterminés entraîne à des calculs compliqués lorsque $F(x)$ est de degré quelque peu élevé; la suivante est alors préférable.

229. On procède d'abord comme dans la méthode précédente. Après avoir résolu l'équation $F(x) = 0$, et établi la formule de décomposition de la fraction rationnelle proposée, suivant la nature et le degré de multiplicité des racines de cette équation, on multiplie les deux membres de l'équation par $F(x)$, de manière à réduire le premier membre à $f(x)$, et le second à un polynôme rationnel et entier par rapport à x.

Soit a l'une des racines réelles, m son degré de multiplicité, $F_1(x)$ le quotient de $F(x)$ par $(x-a)^m$, et proposons-nous de trouver les numérateurs A, A_1,..., A_{m-1} des fractions qui, dans la formule de décomposition, correspondent à la racine a. Ces fractions étant, comme nous l'avons établi,

$$\frac{A}{(x-a)^m} + \frac{A_1}{(x-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{A_{m-1}}{x-a},$$

et les autres fractions ne renfermant pas $(x-a)$ en dénominateur, la multiplication par $F(x)$ ou $(x-a)^m F_1(x)$ introduira le facteur $(x-a)^m$ dans tous ces autres termes, en sorte que l'on pourra écrire

$$(7)\quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) = AF_1(x) + A_1(x-a)\,F_1(x) + A_2\,(x-a)^2\,F_1(x) + \cdots \\ \qquad + A_{m-1}\,(x-a)^{m-1}\,F_1(x) + (x-a)^m\varphi(x), \end{array} \right.$$

$\varphi(x)$ désignant une fonction entière de x.

Cette équation ayant lieu quel que soit x, faisons $x=a$; tous les termes du second membre sont nuls sauf le premier, et il vient

$$f(a)=AF_1(a),$$

équation qui détermine A.

Remarquons maintenant que, d'après la loi de formation des dérivées successives d'un produit, la dérivée

$$D^k_x(x-a)^r F_1(x)$$

renferme le facteur $(x-a)$ aussi longtemps que k est moindre que r, et s'annulle conséquemment encore pour $x=a$; mais que, pour $k=r$ ou $k>r$, cette dérivée, ne renfermant plus le facteur $x-a$, ne s'annulera plus pour $x=a$.

Cela posé, prenons les dérivées des deux membres de l'équation (7), puis faisons $x=a$: tous les termes du second membre s'annulant, sauf les deux premiers, nous aurons

$$f'(a)=AF'_1(a)+A_1[D_x(x-a)F_1(x)]_a,$$

et, A étant déjà connu, on tirera de là A_1.

Prenant les dérivées secondes des deux membres de l'équation (7), puis faisant $x=a$, ce qui annulera tous les termes du second membre à l'exception des trois premiers, nous trouverons

$$f''(a)=AF''_1(a)+A_1[D^2_x(x-a)F_1(x)]_a+A_2[D^2_x(x-a)^2F_1(x)]_a,$$

ce qui détermine A_2.

Continuant de cette manière, on voit clairement qu'après $m-1$ dérivations, suivies chaque fois de la supposition $x=a$, les m coefficients A, $A_1, \ldots, A_{m-1}$ seront déterminés. Nous ne développons pas explicitement les résultats de ces calculs, parce qu'il est plus simple d'appliquer à chaque cas particulier la méthode indiquée, que d'user des formules générales que nous trouverions.

Il importe de remarquer que le dernier terme $(x-a)^m\varphi(x)$, après chacune des $m-1$ dérivations, renferme encore le facteur $(x-a)$ et s'évanouit pour $x=a$; il est donc inutile d'en tenir compte dans la détermination des coefficients A, $A_1, \ldots$, et *l'on peut raisonner comme si ce terme n'existait pas,* ce qui abrége les opérations.

Lorsque a est une racine simple à laquelle ne répond qu'une fraction

$$\frac{A}{x-a},$$

l'équation

$$f(a) = AF_1(a)$$

suffit pour déterminer le numérateur A. Mais la théorie des équations nous apprend que, dans ce cas, la fonction $F_1(x)$ se réduit, pour $x = a$, à $F'(a)$; on a conséquemment la formule très-commode

$$A = \frac{f(a)}{F'(a)}$$

pour déterminer les numérateurs des fractions qui répondent aux racines simples.

230. Pour les numérateurs $Mx+N$, etc., des fractions réelles qui correspondent aux racines imaginaires conjuguées, on suivra exactement la même marche. Soit $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ une racine imaginaire du degré m de multiplicité; posons

$$F(x) = [(x-\alpha)^2 + \beta^2]^m F_1(x),$$

et écrivons, d'après le n° 227, les termes de la décomposition qui répondent à cette racine. En multipliant par $F(x)$ les deux membres de l'équation ainsi formée, on aura un résultat que l'on peut écrire sous la forme

$$(8)\ \begin{cases} f(x) = (Mx+N)F_1(x) + (M_1x+N_1)[(x-\alpha)^2+\beta^2]F_1(x) + \cdots \\ +(M_{m-1}x+N_{m-1})[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{m-1}F_1(x) + [(x-\alpha)^2+\beta^2]^m\varphi(x). \end{cases}$$

Faisant dans cette équation $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, on obtient

$$f(\alpha+\beta\sqrt{-1}) = [M(\alpha+\beta\sqrt{-1}) + N]\,F_1(\alpha+\beta\sqrt{-1}),$$

équation imaginaire, qui se décompose en deux équations réelles d'où l'on tire M, N. Prenant les dérivées par rapport à x des deux membres de l'équation (8) et faisant encore $x = \alpha+\beta\sqrt{-1}$, les termes du second membre s'annulent tous, sauf les deux premiers, et l'on a une équation imaginaire qui détermine M_1, N_1; et ainsi de suite. Il suffit de $m-1$ dérivations pour trouver tous les coefficients, et, par conséquent, il est inutile de s'occuper du terme $[(x-\alpha)^2+\beta^2]^m\varphi(x)$, qui donnerait zéro après chaque différentiation.

Lorsque toutes les racines de l'équation $F(x)=0$ sont inégales, le moyen le plus rapide d'opérer la décomposition de la fraction proposée consiste à faire usage de la formule

$$A = \frac{f(a)}{F'(a)},$$

qui s'applique également au cas où la racine a est réelle et à celui où elle est imaginaire. Il suffira ensuite de réduire ensemble les fractions imaginaires correspondantes à deux racines imaginaires conjuguées, pour obtenir la décomposition de la fraction sous la forme réelle, considérée ci-dessus.

231. Il résulte de ce procédé que la décomposition d'une fraction rationnelle en fractions simples, ne peut se faire que d'une seule manière sous la forme que nous avons adoptée, et dont la possibilité a été établie. En effet, si chacun des coefficients $A, A_1, \ldots, M, N, \ldots$ admettait plusieurs valeurs, la méthode que nous venons de suivre pour déterminer ces coefficients devrait les donner toutes. Or, chaque coefficient est donné par une équation où il n'entre qu'au premier degré, et n'admet par conséquent qu'une seule valeur.

232. *Exemples.* — I. Comme application de la méthode qui vient d'être exposée, décomposons la fraction

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{x^3 + x^2 + 2}{x^5 - 2x^3 + x}.$$

L'équation

$$x^5 - 2x^3 + x = 0$$

a pour racines $x = 0$, $x = 1$ double, $x = -1$ double. On a donc

$$x^5 - 2x^3 + x = x(x-1)^2(x+1)^2,$$

$$(\alpha) \quad \frac{x^3 + x^2 + 2}{x^5 - 2x^3 + x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{C_1}{x+1}.$$

Il n'y a pas de partie entière. De là on tire

$$x^3 + x^2 + 2 = A(x-1)^2(x+1)^2 + Bx(x+1)^2 + B_1x(x-1)(x+1)^2 + Cx(x-1)^2 + C_1x(x-1)^2(x+1).$$

L'hypothèse $x = 0$ donne $A = 2$. L'hypothèse $x = 1$ donne $B = 1$. Différentiant et faisant encore $x = 1$, en négligeant d'ailleurs les termes où figure $(x-1)^2$, on trouve

$$5 = 8B + 4B_1, \qquad B_1 = -\frac{3}{4}.$$

Enfin, si l'on pose $x = -1$ dans l'équation ci-dessus, on trouve $C = -\frac{1}{2}$; puis, différentiant, négligeant les termes en $(x+1)^2$ et posant $x = -1$, on a

$$1 = 8C - 4C_1, \quad \text{d'où} \quad C_1 = -\frac{5}{4}.$$

Il suffit de substituer les valeurs trouvées dans la formule (α), pour obtenir définitivement l'équation

$$\frac{x^3+x^2+2}{x^5-2x^3+x}=\frac{2}{x}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{3}{4(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)^2}-\frac{5}{4(x+1)}.$$

II. Soit encore

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{x^3-1}{x^5-2x^4+8x^2-12x+8}.$$

L'équation $F(x)=0$ a pour racines -2, $1+\sqrt{-1}$ double; $1-\sqrt{-1}$ double. On a donc

$$x^5-2x^4+8x^2-12x+8=(x+2)[(x-1)^2+1]^2=(x+2)(x^2-2x+2)^2,$$

et l'on doit poser, la partie entière $E(x)$ étant nulle,

$$\frac{x^3-1}{x^5-2x^4+8x^2-12x+8}=\frac{A}{x+2}+\frac{Mx+N}{(x^2-2x+2)^2}+\frac{M_1x+N_1}{x^2-2x+2}.$$

Multipliant les deux membres par $F(x)$, on a

$$x^3-1=A(x^2-2x+2)^2+(Mx+N)(x+2)+(M_1x+N_1)(x+2)(x^2-2x+2).$$

Il suffit, pour trouver A, de poser $x=-2$, et l'on a

$$-9=100A,\qquad A=-\frac{9}{100}.$$

On posera ensuite $x=1+\sqrt{-1}$, ce qui donnera

$$(1+\sqrt{-1})^3-1=(M+N+M\sqrt{-1})(3+\sqrt{-1}),$$

ou, en développant et égalant séparément les parties réelles et les coefficients de $\sqrt{-1}$,

$$-3=2M+N,\qquad 2=4M+N,$$

d'où

$$M=\frac{9}{10},\qquad N=-\frac{8}{5}.$$

Pour déterminer M_1 et N_1, on prend les dérivées des deux membres de l'identité ci-dessus, en négligeant le terme $A(x^2-2x+2)^2$, et l'on fait $x=1+\sqrt{-1}$, ce qui donne après réductions

$$6\sqrt{-1}=4M+N-8M_1-2N_1+\sqrt{-1}\,(2M+4M_1+6N_1),$$

d'où

$$4M + N - 8M_1 - 2N_1 = 0,$$
$$2M + 4M_1 + 6N_1 = 6,$$

et après avoir substitué à M, N leurs valeurs, on trouvera sans peine

$$M_1 = \frac{9}{100}, \qquad N_1 = \frac{16}{25}.$$

La décomposition de la fraction proposée sera donc effectuée par la substitution des valeurs de A, M, N, M_1, N_1.

§ 2. INTÉGRATION DES FONCTIONS RATIONNELLES.

233. Soit à intégrer la différentielle $\varphi(x)\,dx$, $\varphi(x)$ étant une fonction rationnelle.

Si la fonction $\varphi(x)$ est entière, elle est de la forme

$$\varphi(x) = a + bx + cx^2 + \cdots + kx^n,$$

et les principes établis au chapitre précédent donnent

$$\int \varphi(x)\,dx = ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3} + \cdots + \frac{kx^{n+1}}{n+1} + C.$$

Si elle est fractionnaire, en effectuant la division du numérateur par le dénominateur, on saura toujours décomposer $\varphi(x)$ en deux parties, l'une entière $E(x)$, l'autre fractionnaire $\frac{f(x)}{F(x)}$, dans laquelle le numérateur sera de degré moindre que le dénominateur.

La partie entière $E(x)\,dx$ s'intègre sans difficulté comme ci-dessus; pour intégrer la partie fractionnaire, on décomposera la fraction $f(x) : F(x)$, comme on l'a vu (227), en une somme de fractions simples appartenant toutes à l'un des quatre types suivants :

$$\frac{A}{x-a}, \qquad \frac{A}{(x-a)^m}, \qquad \frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2}, \qquad \frac{Mx+N}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^m}.$$

Les méthodes connues donnent

1° $$\int \frac{A\,dx}{x-a} = A\,l.(x-a) + C.$$

2° $$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^m} = -\frac{1}{m-1}\,\frac{A}{(x-a)^{m-1}} + C.$$

3° Pour intégrer les différentielles appartenant au troisième type, on introduit au numérateur la différentielle du dénominateur, en posant

$$\int \frac{Mx + N}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} dx = \int \frac{M(x - \alpha + \alpha) + N}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} dx = \frac{M}{2} \int \frac{2(x-\alpha)\,dx}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}$$

$$+ (M\alpha + N) \int \frac{dx}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}.$$

La première de ces deux intégrales a pour valeur $\mathrm{l}.[(x-\alpha)^2 + \beta^2]$; la seconde se ramène, en posant $x-\alpha = \beta z$, à

$$\int \frac{\beta dz}{\beta^2(1+z^2)} = \frac{1}{\beta} \operatorname{arc\,tg} z + C = \frac{1}{\beta} \operatorname{arc\,tg} \frac{x-\alpha}{\beta} + C,$$

d'où

$$\int \frac{Mx + N}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} dx = \frac{M}{2} \mathrm{l}.[(x-\alpha)^2 + \beta^2] + \frac{M\alpha + N}{\beta} \operatorname{arc\,tg} \frac{x-\alpha}{\beta} + C.$$

4° On décompose de la même manière

$$\int \frac{Mx+N}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^m} dx = \frac{M}{2} \int \frac{2(x-\alpha)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^m} + (M\alpha+N) \int \frac{dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^m}.$$

Le premier terme a pour valeur

$$-\frac{M}{2} \cdot \frac{1}{(m-1)[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^{m-1}},$$

et le second se ramène, comme ci-dessus, à

$$\frac{M\alpha + N}{\beta^{2m-1}} \int \frac{dz}{(1+z^2)^m}.$$

Tout est donc réduit au calcul de la valeur de cette dernière intégrale. Pour cela, on suivra une méthode qui trouve de fréquentes applications dans le calcul intégral. Ecrivons

$$\int \frac{dz}{(1+z^2)^m} = \int \frac{(1 + z^2 - z^2)\,dz}{(1+z^2)^m} = \int \frac{dz}{(1+z^2)^{m-1}} - \int \frac{z^2 dz}{(1+z^2)^m};$$

l'intégration par partie nous donne

$$\int \frac{z^2 dz}{(1+z^2)^m} = \frac{1}{2} \int z \cdot \frac{2z dz}{(1+z^2)^m} = -\frac{z}{2(m-1)(1+z^2)^{m-1}} + \frac{1}{2(m-1)} \int \frac{dz}{(1+z^2)^{m-1}}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation précédente et réduisant, nous

aurons

$$\int \frac{dz}{(1+z^2)^m} = \frac{z}{(2m-2)(1+z^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2m-2}\int \frac{dz}{(1+z^2)^{m-1}}.$$

C'est là ce qu'on nomme une *formule de réduction :* elle ramène l'intégrale proposée à une autre de même forme, mais dans laquelle l'exposant m est diminué d'une unité. En changeant dans cette formule m en $m-1$, on fera dépendre la nouvelle intégrale d'une troisième dans laquelle l'exposant m sera diminué de deux unités, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on arrive, m étant un nombre entier, à

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \text{arc tg}\, z + C.$$

Cette dernière étant connue, fait connaître toutes les précédentes, et l'on doit par conséquent regarder l'intégrale

$$\int \frac{dz}{(1+z^2)^m}$$

comme connue, quel que soit l'entier m.

Il suit de là que l'intégrale de la différentielle $\frac{(Mx+N)dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^m}$ doit aussi être considérée comme connue.

En réunissant tout ce qui vient d'être dit, on voit que le problème proposé est complètement résolu, et que *l'intégrale d'une différentielle rationnelle en x peut toujours s'exprimer par un nombre limité de termes au moyen des fonctions élémentaires de l'analyse.*

234. Quoique la méthode générale soit toujours applicable, il est souvent plus simple de recourir à des artifices particuliers, que suggère l'habitude du calcul. Ainsi, pour trouver l'intégrale de l'expression

$$\frac{2dx}{x^3(x^2-5)^5},$$

il faudrait, suivant la méthode exposée, déterminer treize coefficients, ce qui serait assez laborieux. Il vaut mieux introduire plusieurs fois le facteur (x^2-5-x^2) en divisant par -5 chaque fois. On a ainsi

$$\frac{1}{x^3(x^2-5)^5} = -\frac{1}{5}\,\frac{x^2-5-x^2}{x^3(x^2-5)^5} = -\frac{1}{5}\,\frac{1}{x^3(x^2-5)^4} + \frac{1}{5x(x^2-5)^5}.$$

Opérant de même sur ces deux fractions, on trouve

$$-\frac{1}{5^2}\,\frac{1}{x^3(x^2-5)^3}-\frac{2}{5^2x(x^2-5)^4}+\frac{x}{5^2(x^2-5)^5}.$$

Répétant l'opération sur les deux premiers termes, on a

$$-\frac{1}{5^3}\,\frac{1}{x^3(x^2-5)^2}+\frac{3}{5^3}\,\frac{1}{x(x^2-5)^3}-\frac{2}{5^3}\,\frac{x}{(x^2-5)^4}+\frac{x}{5^2(x^2-5)^5}.$$

Continuant de la même manière, on arrive enfin à

$$\frac{1}{x^3(x^2-5)^5}=-\frac{1}{5^5x^3}-\frac{1}{5^5x}+\frac{x}{5^5(x^2-5)}-\frac{4x}{5^5(x^2-5)^2}+\frac{3x}{5^4(x^2-5)^3}$$
$$-\frac{2x}{5^3(x^2-5)^4}+\frac{x}{5^2(x^2-5)^5}.$$

La fonction est maintenant préparée pour l'intégration, à cause de la relation $2xdx=d(x^2-5)$, et l'on trouvera

$$\int\frac{2dx}{x^3(x^2-5)^5}=\frac{1}{5^5}\,\mathrm{l.}\,\frac{x^2-5}{x^2}+\frac{1}{5^2}\left[\frac{1}{5^3x^2}+\frac{4}{5^3(x^2-5)}-\frac{3}{2\cdot 5^2(x^2-5)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{2}{3\cdot 5\cdot(x^2-5)^3}-\frac{1}{4(x^2-5)^4}\right]+\mathrm{C}.$$

Exercices.

Trouver les valeurs des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int\frac{x^2-x+2}{x^4-2x^2+4}dx;$ R. $\displaystyle\frac{1}{3}\,\mathrm{l.}\,\frac{(x-2)(x+1)^2}{(x-1)(x+2)^2}.$

2. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3(x-1)};$ R. $\displaystyle\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x}+\mathrm{l.}\,\frac{x-1}{x}+\mathrm{C}.$

3. $\displaystyle\int\frac{x^3-2}{x^4+x^3-3x^2-x+2}dx;$

R. $\displaystyle\frac{1}{6(x-1)}+\frac{25}{36}\,\mathrm{l.}\,(x-1)-\frac{3}{4}\,\mathrm{l.}\,(x+1)+\frac{10}{9}\,\mathrm{l.}\,(x+2).$

4. $\displaystyle\int\frac{(x^3-1)\,dx}{x^5-2x^4+8x^2-12x+8};$

R. $\displaystyle\frac{9}{100}\,\mathrm{l.}\,\frac{\sqrt{x^2-2x+2}}{x+2}-\frac{7x+2}{20(x^2-2x+2)}+\frac{38}{100}\,\mathrm{arc\,tg}\,(x-1)+\mathrm{C}.$

5. $\int \frac{2x^4 - 5x^3 + 1}{(x^2+1)^3(x^2-3x+2)}\,dx;$

R. $\frac{1}{4}\,\mathrm{l.}\,(x-1) - \frac{7}{125}\,\mathrm{l.}\,(x-2) - \frac{97}{1000}\,\mathrm{l.}\,(x^2+1) + \frac{58x+11}{100(x^2+1)} - \frac{6x+7}{20(x^2+1)^2}$

$$+ \frac{58}{100}\,\mathrm{arc\,tg}\,x + \mathrm{C}.$$

6. $\int \frac{x^5dx}{a+bx^2};$ R. $\frac{(a+bx^2)^2}{4b^3} - \frac{a(a+bx^2)}{b^3} + \frac{a}{2b^3}\,\mathrm{l.}\,(a+bx^2) + \mathrm{C}.$

7. $$\int \frac{dx}{a+bx^4} = \begin{cases} \frac{k}{2a\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{l.}\,\frac{x^2+kx\sqrt{2}+k^2}{x^2-kx\sqrt{2}+k^2} + \mathrm{arc\,tg}\,\frac{kx\sqrt{2}}{k^2-x^2}\right), & \text{si } \frac{a}{b} = k^4 > 0; \\ \frac{k}{2a}\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{l.}\,\frac{k+x}{k-x} + \mathrm{arc\,tg}\,\frac{x}{k}\right) + \mathrm{C}, & \text{si } \frac{a}{b} = -k^4 < 0. \end{cases}$$

8. $\int \frac{dx}{(a+bx^4)^5};$ R. On a, en intégrant par partie,

$$\frac{x}{16a(a+bx^4)^4} + \frac{5x}{64a^2(a+bx^4)^3} + \frac{55x}{512a^3(a+bx^4)^2} + \frac{385x}{2048a^4(a+bx^4)}$$

$$+ \frac{1155}{2048a^4}\int \frac{dx}{a+bx^4}.$$

9. $\int \frac{dx}{a+bx^2+cx^4};$

1er cas : si $b^2-4ac>0$, on pose $k=\sqrt{b^2-4ac}$; on a

$$-\frac{1}{k}\sqrt{\frac{2c}{b+k}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x\sqrt{2c}}{\sqrt{b+k}} + \frac{1}{k}\sqrt{\frac{2c}{b-k}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x\sqrt{2c}}{\sqrt{b-k}} + \mathrm{C}.$$

2me cas : $b^2-4ac<0$; on pose $b^2-4ac=-k^2$, $-b+k\sqrt{-1}=2c\rho e^{\theta\sqrt{-1}}$, et l'on a

$$\frac{1}{4c\rho^{\frac{3}{2}}\cos\frac{\theta}{2}}\left\{\frac{1}{2}\,\mathrm{l.}\,\frac{x^2+2x\rho^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\theta}{2}+\rho}{x^2-2x\rho^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\theta}{2}+\rho} + \cot\frac{\theta}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2\rho^{\frac{1}{2}}\,x\sin\frac{\theta}{2}}{\rho^2-x^2}\right. + \mathrm{C}.$$

10. $\int \frac{dx}{1-x^6} = \frac{1}{12}\,\mathrm{l.}\,\frac{(1+x)^2(x^2+x+1)}{(1-x)^2(x^2-x+1)} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2} + \mathrm{C}.$

CHAPITRE XXVIII.

INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES IRRATIONNELLES.

235. L'intégration des fonctions algébriques irrationnelles, dans le petit nombre de cas où elle est possible en termes finis, s'effectue généralement par l'un des deux procédés suivants : 1° rendre rationnelle la différentielle proposée à l'aide d'une substitution de variables, ce qui ramène le problème à un autre déjà résolu; 2° faire dépendre, au moyen de l'intégration par partie, l'intégrale cherchée d'une autre de même forme, mais plus simple; celle-ci d'une autre plus simple encore, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on arrive à une intégrale facile à évaluer.

Nous allons successivement appliquer ces deux procédés aux problèmes les plus importants.

236. *Fonctions de monômes irrationnels.* — Supposons que $f(x)$ soit une fonction rationnelle des quantités

$$x, \quad x^{\frac{m}{n}}, \quad x^{\frac{p}{q}}, \quad x^{\frac{r}{s}}, \ldots,$$

$m, n, p, q, r, s, \ldots$ étant des nombres entiers. On posera

$$x = z^{nqs\cdots}, \quad \text{d'où} \quad dx = nqs\cdots z^{nqs\cdots-1}dz,$$

$$x^{\frac{m}{n}} = z^{mqs\cdots}, \quad x^{\frac{p}{q}} = z^{nps\cdots}, \quad x^{\frac{r}{s}} = z^{nqr\cdots}, \ldots,$$

et, par ces substitutions, la différentielle $f(x)\,dx$ deviendra évidemment rationnelle en z. On lui appliquera les méthodes du chapitre précédent, et l'on remplacera ensuite z par sa valeur en fonction de x.

On opérerait de même si $f(x)$ renfermait des puissances fractionnaires d'un binôme $a + bx$.

Exemples :

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}} = \int \frac{6z^2dz}{1+z} = 6\left[\frac{x^{\frac{1}{3}}}{2} - x^{\frac{1}{6}} + \mathrm{l.}\left(1 + x^{\frac{1}{6}}\right)\right] + \mathrm{C}.$$

$$\int \frac{1+x^{\frac{1}{3}}}{1+x^{\frac{1}{4}}}\,dx = 12\left[\frac{x}{13}x^{\frac{1}{12}} - \frac{x^{\frac{5}{6}}}{10} + \frac{x^{\frac{3}{4}}}{9} + \frac{x^{\frac{7}{12}}}{7} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{6} - \frac{x^{\frac{1}{3}}}{4} + \frac{x^{\frac{1}{4}}}{3} + x^{\frac{1}{12}}\right]$$

$$+ 2\,\mathrm{l}.\frac{\left(1 - x^{\frac{1}{12}} + x^{\frac{1}{6}}\right)}{\left(1 + x^{\frac{1}{4}}\right)^{2}\left(1 + x^{\frac{1}{12}}\right)^{2}} - \frac{12}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2x^{\frac{1}{12}} - 1}{\sqrt{3}} + \mathrm{C}.$$

$$\int \frac{x\,dx}{(1+x)^{\frac{1}{3}} - (1+x)^{\frac{1}{2}}} = -(1+x)^{\frac{2}{3}}\left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{5}{6}} + \frac{3}{4}(1+x)^{\frac{2}{3}} + \frac{6}{7}(1+x)^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left. + (1+x)^{\frac{1}{3}} + \frac{6}{5}(1+x)^{\frac{1}{6}} + \frac{3}{2}\right] + \mathrm{C}.$$

237. ***Différentielles renfermant la racine carrée d'un trinôme du second degré.*** — Soit à intégrer une expression de la forme $f(x, X)\,dx$, f désignant une fonction rationnelle des variables x, X, et X désignant le radical

$$\sqrt{A + Bx + Cx^2},$$

A, B, C étant les constantes. On peut réduire la constante C à ± 1, car il suffit de diviser sous le radical par la valeur absolue de C. Nous poserons donc simplement

$$X = \sqrt{a + bx \pm x^2},$$

les constantes a, b pouvant avoir des signes quelconques, et nous examinerons les divers cas qui peuvent se présenter.

1er *cas :* $X = \sqrt{a+bx+x^2}$. — On pose, z étant une nouvelle variable,

$$\sqrt{a + bx + x^2} = z - x, \qquad \text{d'où} \qquad a + bx = z^2 - 2zx,$$

$$b\,dx = 2z\,dz - 2x\,dz - 2z\,dx, \qquad x = \frac{z^2 - a}{b + 2z}, \qquad dx = \frac{2(z-x)\,dz}{b + 2z};$$

la valeur de x étant rationnelle en z, si on la substitue dans les expressions de dx et de X, ces quantités s'exprimeront rationnellement en z, et la différentielle $f(x, X)\,dx$ deviendra rationnelle par la substitution proposée. On aura ensuite

$$z = x + \sqrt{a + bx + x^2}.$$

2me *cas :* $X = \sqrt{a+bx-x^2}$. — Soient α, β les racines, supposées réelles, de l'équation

$$x^2 - bx - a = 0,$$

en sorte que l'on ait identiquement

$$a + bx - x^2 = (x - \alpha)(\beta - x).$$

On posera

$$X = \sqrt{(x-\alpha)(\beta - x)} = (x - \alpha)z,$$

d'où

$$\beta - x = (x-\alpha)z^2, \qquad -dx = z^2dx + 2(x-\alpha)zdz,$$

$$x = \frac{\beta + \alpha z^2}{1 + z^2}, \qquad dx = -\frac{2(x-\alpha)zdz}{1+z^2}.$$

Comme x est fonction rationnelle de z, il en sera de même de X, dx, et de $f(x, X)dx$: l'intégration se fera donc sans difficulté, et l'on substituera ensuite

$$z = \sqrt{\frac{\beta - x}{x - \alpha}}.$$

Si les racines α, β étaient imaginaires, le trinôme sous le radical serait négatif pour toute valeur de x, et X étant imaginaire, l'intégration ne pourrait plus se faire en quantités réelles.

On peut observer que la même méthode serait applicable au premier cas, si les racines de l'équation

$$a + bx + x^2 = 0$$

étaient réelles.

3me *cas.* — Quel que soit le signe du terme en x^2 sous le radical, on peut encore, lorsque a est positif, poser

$$X = \sqrt{a + bx \pm x^2} = \sqrt{a} + xz.$$

Elevant au carré et réduisant, on a successivement

$$b \pm x = 2z\sqrt{a} + xz^2, \qquad \pm dx = z^2dx + 2(\sqrt{a} + xz)dz,$$

$$x = \frac{b - 2z\sqrt{a}}{z^2 \mp 1}, \qquad dx = -\frac{2(\sqrt{a} + xz)dz}{z^2 \mp 1},$$

en sorte que x, et par conséquent dx et X, s'exprimeront rationnellement en z, et que la différentielle $f(x, X)dx$, étant rendue rationnelle, s'intégrera sans difficulté. On aura d'ailleurs

$$z = \frac{\sqrt{a + bx \pm x^2} - \sqrt{a}}{x}.$$

228. Comme application de ces transformations, considérons l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}},$$

qui rentre dans le premier cas. On a immédiatement

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}} = \int \frac{dx}{z-x} = \int \frac{2dx}{b+2z} = \int \frac{dz}{\frac{b}{2}+z} = \mathrm{l}.\left(\frac{b}{2}+z\right) + \mathrm{C},$$

d'où

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}} = \mathrm{l}.\left(\frac{b}{2}+x+\sqrt{a+bx+x^2}\right) + \mathrm{C}.$$

Si l'on a, en particulier, $b=0$, $a=\alpha^2$, il viendra

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2+x^2}} = \mathrm{l}.\,(x+\sqrt{\alpha^2+x^2}) + \mathrm{C},$$

formule d'un usage fréquent.

On aurait de même, par la seconde transformation,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}} = \int \frac{dx}{(x-\alpha)z} = -2\int \frac{dz}{1+z^2} = -2 \operatorname{arc\,tg} z + \mathrm{C}$$

$$= -2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\beta-x}{x-\alpha}} + \mathrm{C};$$

mais cette intégrale s'obtient sous une forme plus commode en écrivant

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(a+\frac{b^2}{4}\right)-\left(x-\frac{b}{2}\right)^2}} = \arcsin \frac{2x-b}{\sqrt{b^2+4a}} + \mathrm{C},$$

d'après la formule connue,

$$\int \frac{dz}{\sqrt{\alpha^2-z^2}} = \arcsin \frac{z}{\alpha} + \mathrm{C}.$$

On suppose que (b^2+4a) soit positif : s'il était négatif, il est facile de voir que la quantité sous le radical serait négative, et que, X étant imaginaire, il n'y a plus lieu de chercher une intégrale réelle.

229. Comme exemple de la troisième transformation, nous choisirons

l'intégrale importante

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{ax - x^2}},$$

m étant entier et positif. Nous poserons donc

$$\sqrt{ax - x^2} = xz, \quad \text{d'où} \quad a - x = xz^2, \quad -dx = z^2dx + 2xzdz,$$

$$x = \frac{a}{1 + z^2}, \quad dx = -\frac{2xzdz}{1 + z^2},$$

et nous aurons

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{ax - x^2}} = -2a^m \int \frac{dz}{(1 + z^2)^{m+1}}.$$

Nous sommes ramenés à l'intégrale traitée au n° 233 (4°), et que nous pouvons considérer comme connue : nous remplacerons ensuite z par sa valeur

$$z = \frac{\sqrt{ax - x^2}}{x},$$

240. On ramène un bon nombre d'intégrales aux précédentes, par des artifices de calcul. Ainsi, l'on a

$$\frac{(\alpha x + \beta) dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{2c} \frac{\alpha(2cx + b) dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} + \frac{1}{2c} \frac{(2\beta c - \alpha b) dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}};$$

le premier terme du second membre est la différentielle de

$$\frac{\alpha}{c} \sqrt{a + bx + cx^2};$$

le second rentre dans l'un des cas étudiés au n° 237.

Soit encore

$$\int \frac{dx}{(\alpha + \beta x^2)\sqrt{a + bx^2}}.$$

En faisant successivement $x = \frac{1}{z}$, $z^2 = u$, on a

$$\int \frac{dx}{(\alpha + \beta x^2)\sqrt{a + bx^2}} = -\int \frac{zdz}{(\beta + \alpha z^2)\sqrt{b + az^2}} = -\frac{1}{2} \int \frac{du}{(\beta + \alpha u)\sqrt{b + au}}.$$

On opère comme au n° 235 : on pose

$$\sqrt{b + au} = v; \quad u = \frac{v^2 - b}{a}, \quad du = \frac{2vdv}{a},$$

d'où

$$\int \frac{dx}{(\alpha+\beta x^2)\sqrt{a+bx^2}} = -\int \frac{dv}{a\beta - b\alpha + \alpha v^2} = -\frac{1}{\alpha}\int \frac{dv}{v^2 \pm k^2},$$

en faisant

$$a\beta - b\alpha = \pm k^2\alpha.$$

On est donc ramené à une intégrale connue, et l'on n'a plus qu'à substituer à v sa valeur

$$v = \sqrt{b+au} = \sqrt{b+az^2} = \frac{\sqrt{a+bx^2}}{x}.$$

On trouvera ainsi, si $\dfrac{a\beta - b\alpha}{\alpha} > 0$,

$$\int \frac{dx}{(\alpha+\beta x^2)\sqrt{a+bx^2}} = -\frac{1}{\alpha k}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{a+bx^2}}{kx} + C, \quad k = \sqrt{\frac{a\beta - b\alpha}{\alpha}};$$

si $\dfrac{a\beta - b\alpha}{\alpha} < 0$,

$$\int \frac{dx}{(\alpha+\beta x^2)\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{2\alpha k}\,\mathrm{l.}\,\frac{kx+\sqrt{a+bx^2}}{kx-\sqrt{a+bx^2}} + C, \quad k = \sqrt{\frac{b\alpha - a\beta}{\alpha}};$$

si $a\beta - b\alpha = 0$,

$$\int \frac{dx}{(\alpha+\beta x^2)\sqrt{a+bx^2}} = \frac{x}{\alpha\sqrt{a+bx^2}} + C.$$

Exercices.

1. $\displaystyle\int (x+\sqrt{1+x^2})^n dx = \frac{(x+\sqrt{1+x^2})^{n+1}}{2n+2} + \frac{(x+\sqrt{1+x^2})^{n-1}}{2n-2} + C.$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}} = -2\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1+x-x^2}-(1+x)}{x} + C.$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2x}(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}) + \frac{1}{2}\,\mathrm{l.}\,(x+\sqrt{1+x^2})$
$+ \arcsin x + C.$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx)(f+gx)}} = \frac{1}{\sqrt{bg}}\,\mathrm{l.}\,\frac{\sqrt{g(a+bx)}+\sqrt{b(f+gx)}}{\sqrt{g(a+bx)}-\sqrt{b(f+gx)}} + C.$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{(a-bx)(f+gx)}} = \frac{2}{\sqrt{bg}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{b(f+gx)}{g(a-bx)}} + C.$

N. B. a, b, f, g sont positifs.

6. $\int \frac{dx}{(\alpha+\beta x)\sqrt{a+bx^2}}.$

R. Si $a\beta^2+b\alpha^2=k^2$, $\quad -\frac{1}{k}\,\mathrm{l}.\,\frac{a\beta-b\alpha x+k\sqrt{a+bx^2}}{\alpha+\beta x}+C$;

si $a\beta^2+b\alpha^2=-k^2$, $\quad -\frac{1}{k}\arcsin\frac{a\beta-b\alpha x}{(\alpha+\beta x)\sqrt{-ab}}+C$;

si $a\beta^2+b\alpha^2=0$, $\quad \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{\beta x-\alpha}{b(\beta x+\alpha)}}+C.$

241. *Différentielles binômes.* — On donne ce nom aux différentielles de la forme

$$x^m(a+bx^n)^p dx,$$

les exposants m, n, p étant entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs. Lorsque m, n, p sont entiers, la différentielle est rationnelle en x, et rentre dans un type que l'on sait intégrer. Les cas où, la différentielle étant irrationnelle, on sait l'intégrer, sont les suivants :

1° Si p est entier, m et n étant fractionnaires, l'expression $x^m(a+bx^n)^p$ est une fonction de monômes irrationnels, et rentre dans le cas du n° 236.

2° Supposons que l'on ait $p=\frac{\mu}{\nu}$, μ, ν étant des nombres entiers, et posons

$$(a+bx^n)^{\frac{1}{\nu}}=z, \qquad \text{d'où} \qquad x=\left(\frac{z^\nu-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}},$$

$$dx=\frac{\nu}{nb}\left(\frac{z^\nu-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1}z^{\nu-1}dz, \qquad (a+bx^n)^p=z^\mu.$$

Il viendra, par cette substitution,

$$x^m(a+bx^n)^p dx=\frac{\nu}{nb}z^{\mu+\nu-1}dz\left(\frac{z^\nu-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1},$$

et cette expression sera évidemment fonction rationnelle de z, si

$$\frac{m+1}{n}$$

est un nombre entier, positif, nul ou négatif. Donc, quand cette condition sera remplie, la substitution indiquée rendra la différentielle binôme rationnelle en z, et son intégration se ramènera aux règles du chapitre XXVII.

3° On peut encore écrire la différentielle binôme sous la forme

$$x^m (a + bx^n)^p dx = x^{m+np} (b + ax^{-n}) dx,$$

et si l'on pose

$$m + np = m', \qquad -n = n',$$

puis que l'on applique le théorème ci-dessus (2°), on verra que *la différentielle donnée peut être rendue rationnelle et intégrée lorsque*

$$\frac{m'+1}{n'} = -\frac{m+np+1}{n}$$

est un nombre entier ou se réduit à zéro. Et pour obtenir ce résultat, on mettra d'abord la différentielle sous la forme indiquée, puis on emploiera la substitution qui convient au cas précédent.

On trouvera, par l'application de ces principes,

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x-1}} = \frac{3x+2}{4x^2}\sqrt{x-1} - \frac{3}{4}\operatorname{arc\,sin}\frac{1}{\sqrt{x}} + C.$$

$$\int \frac{xdx}{(a+bx)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{b^2}\,\frac{2a+bx}{\sqrt{a+bx}} + C. \qquad \int \frac{x^2dx}{(a+bx^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{x^3}{3a(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}} + C.$$

$$\int x^3dx(a+x^2)^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{14}(a+x^2)^{\frac{4}{3}}\left(x^2 - \frac{3a}{4}\right) + C.$$

$$\int \frac{xdx}{(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{x}{2a-x}} + C.$$

$$\int \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{5}}}{x^3}dx = -\frac{z^3}{2(z^5-1)} + \frac{3}{2}\int \frac{z^2dz}{z^5-1}, \qquad z = (1+x^2)^{\frac{1}{5}}.$$

$$\int \frac{(1-\sqrt{x})^{\frac{1}{3}}dx}{x^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2(1-\sqrt{x})^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{x}} - \mathrm{l.}\,\frac{1-(1-\sqrt{x})^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{6}}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2(1-\sqrt{x})^{\frac{1}{3}}+1}{\sqrt{3}} + C$$

$$\int (a+bx^3)^{\frac{2}{3}}dx = \frac{az^2}{3(z^3-b)} - \frac{2a}{3}\int\frac{zdz}{z^3-b}, \qquad z = \frac{(a+bx^3)^{\frac{1}{3}}}{x}.$$

$$\int \frac{ax^3-x^4}{\sqrt{ax^3-\frac{5}{6}x^4}}\,dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\left(a-\frac{5}{6}x\right)^{\frac{1}{2}} + \mathrm{C}.$$

242. Le second procédé dont nous avons parlé, et dont nous allons maintenant faire l'application, consiste à préparer la différentielle proposée de manière à effectuer une intégration par partie, et à décomposer l'intégrale à laquelle on est ramené en deux autres, dont l'une est précisément celle que l'on cherche, l'autre étant de même forme, mais plus simple. On a ainsi une formule de réduction dont l'application répétée conduit à la solution, ou du moins à la simplification du problème.

Cette méthode s'applique même avec avantage aux différentielles rationnelles, et nous en avons déjà vu un exemple (233).

Considérons, comme exemple, la différentielle binôme

$$\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

et, en observant que

$$\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -d.\sqrt{1-x^2},$$

nous aurons successivement

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x^{m-1}\sqrt{1-x^2} + (m-1)\int x^{m-2}dx\sqrt{1-x^2}$$
$$= -x^{m-1}\sqrt{1-x^2} + (m-1)\int\frac{x^{m-2}(1-x^2)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Décomposant cette dernière intégrale, on y retrouve la proposée que l'on fait passer dans le premier membre, et l'on a

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}{m} + \frac{m-1}{m}\int\frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Telle est la formule de réduction de l'intégrale proposée. Elle permet d'abaisser l'exposant m de deux unités, et par suite, de quatre, six, etc... Si m est entier, positif et pair, on sera ramené par ces réductions succes-

sives à

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\text{arc sin } x + \text{C}.$$

Si m est impair, on arrivera à

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + \text{C}.$$

Si m est entier, mais négatif, la relation ci-dessus ne servirait qu'à élever la valeur absolue de l'exposant de x, mais en la renversant et changeant m en $m+2$, on a

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^{m+1}\sqrt{1-x^2}}{m+1} + \frac{m+2}{m+1}\int \frac{x^{m+2}dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

d'où, remplaçant m par $-m$, on tire

$$\int \frac{dx}{x^m\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{1-x^2}}.$$

Au moyen de cette formule, on abaissera successivement l'exposant de x de deux, quatre,... unités, et l'on sera ramené, si m est pair, à

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \text{C};$$

si m est impair, à

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}},$$

à laquelle la formule ne s'applique pas, vu que $m-1=0$. On cherchera directement sa valeur, en posant

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - xz,$$

d'où

$$-x = -2z + xz^2, \qquad dx = \frac{2(1-xz)dz}{1+z^2}, \qquad x = \frac{2z}{1+z^2},$$

et l'on aura

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dz}{z} = \text{l}.z = \text{l}.\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} + \text{C}.$$

La valeur de cette intégrale étant connue, fera connaître celles de toutes les intégrales qui s'y ramènent.

On trouve, par l'application des formules qui précèdent,

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{3}(x^2+2)+C;$$

$$\int \frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{4}\left(x^3+\frac{3}{2}x\right)+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\text{arc sin } x + C;$$

$$\int \frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{5}\left(x^4+\frac{4}{3}x^2+\frac{2\cdot 4}{1\cdot 3}\right)+C.$$

$$\int \frac{x^6dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{6}\left(x^5+\frac{5}{4}x^3+\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}x\right)+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\text{arc sin } x + C;$$

. . . .

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x^2}+\frac{1}{2}\text{l.}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}+C;$$

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{3x}\left(\frac{1}{x^2}+2\right)+C;$$

$$\int \frac{dx}{x^5\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{4x}\left(\frac{1}{x^3}+\frac{3}{2x}\right)+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\text{l.}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}+C;$$

$$\int \frac{dx}{x^6\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{5x}\left(\frac{1}{x^4}+\frac{4}{3x^2}+\frac{2\cdot 4}{1\cdot 3}\right)+C;$$

$$\int \frac{dx}{x^7\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{6x}\left(\frac{1}{x^5}+\frac{5}{4x^3}+\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\right)+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\text{l.}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}+C;$$

. . . .

248. La même marche sert à réduire les différentielles binômes, considérées en général. On a en effet

$$x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{1}{nb}x^{m-n+1}(a+bx^n)^p d(a+bx^n),$$

et l'intégration par partie donnera

$$(1)\int x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)} - \frac{m-n+1}{nb(p+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}dx.$$

Mais on a évidemment

$$x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1} = ax^{m-n}(a+bx^n)^p + bx^m(a+bx^n)^p,$$

et en décomposant ainsi la dernière intégrale, on trouve sans peine

$$(2)\int x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{b(m+np+1)} - \frac{a(m-n+1)}{b(m+np+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^p dx.$$

Cette formule réduit l'exposant m à $m-n$; si l'on y remplace m par $m+n$, et que l'on tire de l'équation la valeur de l'intégrale au second membre, on trouvera

$$(3)\int x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{a(m+1)} - \frac{b(m+np+n+1)}{a(m+1)}\int x^{m+n}(a+bx^n)^p dx.$$

Au lieu de faire porter l'intégration par partie sur le facteur $(a+bx^n)^p dx$, on peut la faire porter sur le facteur

$$x^m dx = \frac{d.\,x^{m+1}}{m+1},$$

et l'on a

$$(4)\int x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+1} - \frac{pbn}{m+1}\int x^{m+n}(a+bx^n)^{p-1}dx.$$

Décomposant

$$bx^{m+n}(a+bx^n)^{p-1} = x^m(a+bx^n)^p - ax^m(a+bx^n)^{p-1},$$

et ramenant dans le premier membre l'intégrale cherchée, on aura

$$(5)\int x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+np+1} + \frac{pna}{m+np+1}\int x^m(a+bx^n)^{p-1}dx.$$

Enfin, si l'on veut augmenter l'exposant p d'une unité au lieu de le diminuer, on change dans cette formule p en $p+1$, on tire de l'équation la valeur de l'intégrale au second membre, et l'on a

$$(6)\int x^m(a+bx^n)^p dx = -\frac{x^{m+1}}{(p+1)na} + \frac{m+np+n+1}{(p+1)na}\int x^m(a+bx^n)^{p+1}dx.$$

Les formules (1) à (6) servent à la réduction des intégrales binômes.

Observons d'abord que n peut toujours être supposé > 0, car si cela n'était pas, on mettrait la différentielle binôme sous la forme

$$x^{m+np}(b+ax^{-n})^p dx.$$

Si l'exposant m est positif, au moyen de l'équation (2) on abaissera cet exposant d'autant de fois n qu'il y est contenu. Si, au contraire, il est négatif, on fera usage de la formule (3) qui permet de réduire cet exposant jusqu'à ce qu'il ait une valeur numérique moindre que n.

De même, les formules (5) et (6) serviront, selon que l'exposant p de $a+bx^n$ est positif ou négatif, à diminuer cet exposant de une, deux, trois,... unités, jusqu'à ce qu'il ait une valeur moindre que l'unité, et cette réduction pourra se faire, soit avant, soit après la précédente.

Enfin, les formules (1) et (4) sont applicables à la réduction simultanée des exposants m et p, la première lorsque l'on a $m>0$, $p<0$; la seconde lorsque $m<0$, $p>0$.

Les formules (2) et (5) conduisent à une indétermination $(\infty-\infty)$ lorsque $m+np+1=0$: mais on sait que l'on est alors dans un des cas d'intégrabilité (241). Il en est de même des formules (3) et (4) lorsque $m+1=0$. Enfin, les équations (1) et (6) ne s'appliquent plus lorsque $p+1=0$, mais la différentielle proposée est alors une fonction de monômes irrationnels (241).

Exemple. Soit à déterminer l'intégrale de

$$\frac{x^3dx}{(a+bx)^{\frac{7}{2}}}.$$

On trouvera d'abord, en se servant de la formule (6),

$$\int\frac{x^3dx}{(a+bx)^{\frac{7}{2}}}=\frac{2x^4}{5a}\left(1-\frac{1}{a}+\frac{5}{a^2}\right)-\frac{7}{a^3}\int\frac{x^3dx}{(a+bx)^{\frac{1}{2}}}.$$

Ensuite, on fera usage de la formule (2), et il viendra

$$\int\frac{x^3dx}{(a+bx)^{\frac{1}{2}}}=\frac{2\sqrt{a+bx}}{7b}\left(x^3-\frac{6}{5}\frac{ax^2}{b}+\frac{4\cdot6}{3\cdot5}\frac{a^2x}{b^2}-\frac{2\cdot4\cdot6}{1\cdot3\cdot5}\frac{a^3}{b^3}\right)+C.$$

Exercices.

1. $$\int \frac{x^{2n}dx}{(1-x^2)^{\frac{2n+1}{2}}} = \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(1-x^2)^{\frac{2n-1}{2}}} - \frac{x^{2n-3}}{(2n-3)(1-x^2)^{\frac{2n-3}{2}}} + \frac{x^{2n-5}}{(2n-5)(1-x^2)^{\frac{2n-5}{2}}}$$
$$- \cdots \pm \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} \mp \text{arc sin } x + \text{C}.$$

2. $$\int \frac{dx}{x^3(a+bx)^{p+\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2ax(a+bx)^{p-\frac{1}{2}}}\left(\frac{1}{x} - \frac{2p+3}{2}\frac{b}{a}\right) + \frac{(2p+1)(2p+3)}{2\cdot 4}\frac{b^2}{a^2}\int \frac{dx}{x(a+bx)^{p+\frac{1}{2}}}.$$

3. $$\int (a^2-x^2)^{\frac{7}{2}}dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{8}\left[(a^2-x^2)^3 + \frac{7a^2}{6}(a^2-x^2)^2 + \frac{5\cdot 7}{4\cdot 6}a^4(a^2-x^2)\right.$$
$$\left. + \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}a^6\right] + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}a^8 \text{ arc sin } \frac{x}{a} + \text{C}.$$

4. $$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}{m} - \frac{m-1}{m}\int \frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

5. $$\int \frac{x^m dx}{(a+bx)^{\frac{1}{3}}} = \frac{3(a+bx)^{\frac{2}{3}}}{b(3m+2)}\left[x^m - \frac{3ma}{(3m-1)b}x^{m-1} + \frac{3^2(m-1)m}{(3m-1)(3m-4)}\cdot\frac{a^2}{b^2}x^{m-2}\right.$$
$$\left. - \cdots \pm \frac{3^m 1\cdot 2\cdots m}{2\cdot 5\cdots(3m-1)}\,\frac{a^m}{b^m}\right] + \text{C}.$$

CHAPITRE XXIX.

INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES RENFERMANT DES FONCTIONS EXPONENTIELLES OU CIRCULAIRES.

244. Le peu que l'on sait de l'intégration des différentielles transcendantes se tire encore de la méthode de substitution et de l'intégration par partie.

Dans un grand nombre de cas, l'introduction d'une nouvelle variable

ramène la différentielle proposée à la forme algébrique. Ainsi, si $f(z)$ est une fonction algébrique de z, les différentielles

$$f(e^x)e^x dx,\quad f(\operatorname{tg} x)\frac{dx}{\cos^2 x},\quad f(\arcsin x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\ldots$$

se ramèneront à la forme $f(z)dz$ par les substitutions respectives

$$e^x = z,\quad \operatorname{tg} x = z,\quad \arcsin x = z,\ldots$$

Par exemple, on aura, en posant $e^{ax} = z$,

$$\int\frac{dx}{e^{ax}+e^{-ax}} = \int\frac{e^{ax}dx}{1+e^{2ax}} = \frac{1}{a}\int\frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc tg}(e^{ax}) + C.$$

Si l'on remarque que les fonctions $l.x$, arc sin x, arc tg x,... ont leurs différentielles algébriques en x, on pourra aussi rendre algébriques les différentielles de la forme

$$f(e^x)\,dx,\quad f(\sin x)\,dx,\quad f(\sin x, \cos x)\,dx,\quad f(\operatorname{tg} x)\,dx,\ldots$$

f désignant toujours une fonction algébrique. En effet, si l'on considère la première et que l'on pose $e^x = z$, on aura

$$x = l.z,\quad dx = \frac{dz}{z},$$

et par suite

$$f(e^x)\,dx = f(z)\frac{dz}{z}.$$

On opèrera de même pour les autres. Soit, par exemple,

$$\frac{dx}{\sin x\,(a+b\cos x)}$$

la différentielle donnée. En posant $\cos x = z$, on lui donnera la forme

$$-\frac{dz}{(a+bz)(1-z^2)} = \frac{b^2dz}{(a^2-b^2)(a+bz)} - \frac{dz}{2(a+b)(1-z)} - \frac{dz}{2(a-b)(1+z)},$$

et en intégrant, puis remplaçant z par cos x, on aura

$$\int\frac{dx}{\sin x\,(a+b\cos x)} = \frac{b}{a^2b^2}l.(a+b\cos x) - \frac{l.(1-\cos x)}{2(a+b)} - \frac{l.(1+\cos x)}{2(a-b)} + C.$$

245. D'autres transformations conduisent quelquefois à un résultat plus simple. Ainsi, l'on a

$$\int\frac{dx}{a+b\cos x} = \int\frac{dx}{a\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right) + b\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)},$$

d'où, divisant haut et bas par $\cos^2 \frac{x}{2}$ et faisant $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = z$, on trouve

$$\int \frac{dx}{a + b\cos x} = \int \frac{2dz}{(a+b) + (a-b)z^2}.$$

On peut toujours supposer $a + b$ positif; $a - b$ sera positif ou négatif, donc

$$a + b = \alpha^2, \qquad a - b = \pm \beta^2,$$

et comme on a

$$\int \frac{dz}{\alpha^2 + \beta^2 z^2} = \frac{1}{\alpha\beta} \operatorname{arc\,tg} \frac{\beta z}{\alpha}, \quad \int \frac{dz}{\alpha^2 - \beta^2 z^2} = \frac{1}{2\alpha\beta}\, \mathrm{l}.\, \frac{\alpha + \beta z}{\alpha - \beta z},$$

on aura définitivement

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right) + \mathrm{C}, & \text{si } a - b > 0; \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\, \mathrm{l}.\, \dfrac{(a+b) - (a-b)\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{(a+b) + (a-b)\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}} + \mathrm{C}, & \text{si } a - b < 0. \end{cases}$$

En général, si $f(\sin x, \cos x)$ est une fonction rationnelle de $\sin x$, $\cos x$, en posant $z = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, on aura

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2}, \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \quad dx = \frac{2dz}{1+z^2},$$

et $f(\sin x, \cos x)\, dx$ deviendra une fonction rationnelle de z.

246. L'intégration par partie s'emploie très-utilement pour l'évaluation ou la réduction des différentielles transcendantes. Soient u, v deux fonctions de x, n un nombre entier positif, et faisons

$$v_1 = \int v dx.$$

Nous aurons

$$(1) \qquad \int u^n v dx = u^n v_1 - n \int u^{n-1} v_1 du,$$

et si les fonctions u, v_1 satisfont à la condition

$$v_1 du = g v dx,$$

g étant constant, cette équation deviendra la formule de réduction

$$\int u^n v dx = u^n v_1 - ng \int u^{n-1} v dx,$$

qui conduira immédiatement à la valeur de l'intégrale

$$\int u^n v dx = v_1[u^n - ngu^{n-1} + n(n-1)g^2u^{n-2} - \cdots \pm n(n-1)\cdots 1 g^n] + C.$$

La condition ci-dessus est remplie si l'on prend

$$u = x, \qquad v = e^{ax}, \qquad g = \frac{1}{a},$$

donc

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}\left[x^n - \frac{n}{a}x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{a^2}x^{n-2} - \cdots \pm \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{a^n}\right] + C.$$

De même, $u = 1.x$, $v = x^{m-1}$, $g = \frac{1}{m}$, donneront

$$\int (1.x)^n x^{m-1} dx = \frac{x^m}{m}\left[(1.x)^n - \frac{m}{n}(1.x)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{m^2}(1.x)^{n-2} - \cdots \pm \frac{n(n-1)\cdots 1}{m^n}\right].$$

Reprenons l'équation (1), et supposons que l'on ait

$$\int v_1 du = v_2, \qquad v_2 du = gv dx:$$

une nouvelle intégration par partie nous donnera

$$\int u^{n-1} v_1 du = u^{n-1} v_2 - (n-1)\int u^{n-2} v_2 du,$$

et par suite

$$(2) \quad \int u^n v dx = u^n v_1 - nu^{n-1} v_2 + n(n-1) g \int u^{n-2} v dx,$$

formule de réduction qui abaissera l'exposant n de deux unités. Par exemple, si l'on fait

$$u = x, \qquad v = \cos x, \qquad \text{d'où} \qquad v_1 = \sin x, \qquad v_2 = -\cos x,$$

on aura

$$v_2 du = -\cos x dx = -v dx,$$

et il suffira de poser $g = -1$ pour que la condition soit satisfaite. La formule (2) donnera

$$\int x^n \cos x dx = x^n \sin x + nx^{n-1} \cos x - n(n-1)\int x^{n-2} \cos x dx,$$

et l'on sera ramené, selon que n sera pair ou impair, à

$$\int \cos x dx = \sin x, \qquad \text{ou à} \qquad \int x \cos x dx = x \sin x + \cos x.$$

On trouverait de même l'intégrale de $x^n \sin x dx$.

247. Si l'exposant n était négatif, l'intégration par partie, portant sur

le facteur $v dx$, ne servirait qu'à élever cet exposant : il faudrait alors la faire porter sur le facteur $u^n dx$. On aurait, par exemple,

$$\int \frac{e^{ax}}{x^n} dx = -\frac{e^{ax}}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a}{n-1}\int \frac{e^{ax}dx}{x^{n-1}};$$

changeant dans cette formule n en $n-1$, on abaisserait l'exposant de x de deux unités, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on arrive à

$$\int \frac{e^{ax}dx}{x},$$

qui ne peut plus être soumise à aucune réduction et constitue une nouvelle fonction transcendante.

248. L'intégration par partie peut encore, dans certains cas, être dirigée de manière à reproduire, après un certain nombre d'opérations, l'intégrale primitive : on a alors un système d'équations qui détermine celle-ci, et toutes celles par lesquelles on a dû passer. Ainsi l'on a

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a} \cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax} \sin bx dx,$$

et, en intégrant de nouveau par partie,

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a} \sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax} \cos bx dx.$$

On retombe sur l'intégrale proposée : résolvant ces deux équations par rapport aux intégrales qu'elles renferment, on trouvera facilement

$$\left\{\begin{aligned} \int e^{ax} \cos bx dx &= \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2} + C, \\ \int e^{ax} \sin bx dx &= \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C. \end{aligned}\right.$$

249. On a fréquemment à intégrer des différentielles de la forme

$$\sin^m x \cos^n x dx,$$

les exposants m et n étant entiers, mais positifs ou négatifs. Il est facile de les ramener aux différentielles binômes : il suffit de poser

$$\sin x = z, \qquad \cos x = \sqrt{1-z^2}, \qquad dx = (1-z^2)^{-\frac{1}{2}} dz,$$

d'où

$$\sin^m x \cos^n x \, dx = z^m (1 - z^2)^{\frac{n-1}{2}} dz.$$

On peut aussi, lorsque m et n sont positifs, développer $\sin^m x \cos^n x$ en une somme de sinus ou de cosinus des multiples de x, à l'aide des formules du n° 11. Ainsi l'on a

$$\sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{4}(1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{4}(1 - \cos^2 2x) dx$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 4x}{2}\right) dx,$$

dont l'intégrale est $\frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C$.

Mais le meilleur procédé consiste à réduire, dans les différentielles de cette forme, les exposants m et n, au moyen de l'intégration par partie, et de la décomposition de l'intégrale trouvée en deux autres, absolument comme au N° 242.

En observant que

$$\cos x dx = d. \sin x, \quad \sin x dx = - d. \cos x, \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x,$$
$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x,$$

on trouvera par ce procédé

(3) $(m+1)\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \sin^{m+1} x \cos^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x \, dx.$

(4) $(m+n)\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \sin^{m+1} x \cos^{n-1} x + (n-1)\int \sin^m x \cos^{n-2} x \, dx.$

(5) $(n+1)\int \sin^m x \cos^n x \, dx = -\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x + (m+n+2)\int \sin^m x \cos^{n+2} x \, dx.$

(6) $(n+1)\int \sin^m x \cos^n x \, dx = -\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x + (m-1)\int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x \, dx.$

(7) $(m+n)\int \sin^m x \cos^n x \, dx = -\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x + (m-1)\int \sin^{m-2} x \cos^n x \, dx.$

(8) $(m+1)\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \sin^{m+1} x \cos^{n+1} x + (m+n+2)\int \sin^{m+2} x \cos^n x \, dx.$

La formule (4) servira, dans le cas où n est positif, à abaisser successivement cet exposant de deux, quatre, six,... unités, jusqu'à ce qu'il se réduise à zéro ou à l'unité. La formule (7) réduira de même l'exposant m s'il est positif. Les formules (5) et (8) réduiront, au contraire, l'exposant n ou l'exposant m, supposé négatif, en lui ajoutant successivement deux, quatre,... unités, jusqu'à ce qu'il devienne -1 ou zéro. Enfin, si l'on avait à la fois $m < 0$, $n > 0$, on pourrait se servir de la formule (3) pour réduire simul-

tanément les deux exposants; si l'on avait $m > 0$, $n < 0$, on ferait usage de la formule (6).

Par l'emploi combiné de ces formules de réduction, on sera donc ramené à l'une des intégrales suivantes, dont la valeur s'obtient immédiatement :

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x\, dx = \sin x + C,$$

$$\int \sin x \cos x\, dx = \frac{\sin^2 x}{2} + C, \qquad \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\mathrm{l.} \cos x + C,$$

$$\int \frac{\cos x\, dx}{\sin x} = \mathrm{l.} \sin x + C, \qquad \int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \mathrm{l.}\ \mathrm{tg}\, x = C\,(221),$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \mathrm{l.}\ \mathrm{tg} \frac{x}{2} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \mathrm{l.} \left(1 + \mathrm{tg} \frac{x}{2}\right) - \mathrm{l.} \left(1 - \mathrm{tg} \frac{x}{2}\right) = \mathrm{l.}\ \mathrm{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C \quad (245).$$

Les formules (4) et (7) sont inapplicables lorsque l'on a $m = -n$, mais on peut alors se servir, si $m > 0$, de la forme (6) qui donne

$$(m-1) \int \mathrm{tg}^m x\, dx = \mathrm{tg}^{m-1} x - (m-1) \int \mathrm{tg}^{m-2} x\, dx;$$

si $m < 0$, de la formule (3) qui donne

$$(n-1) \int \cot^n x\, dx = -\cot^{n-1} x - (n-1) \int \cot^{n-2} x\, dx.$$

On observera encore que si l'on arrive, de réduction en réduction, à une intégrale dans laquelle l'exposant de $\sin x$ ou de $\cos x$ soit réduit à l'unité, sa valeur s'obtiendra immédiatement, car l'on a

$$\int \sin^m x \cos x\, dx = \frac{\sin^{m+1} x}{m+1} + C, \qquad \int \cos^n x \sin x\, dx = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + C.$$

Concluons que, dans le cas où m, n sont entiers, la différentielle $\sin^m x \cos^n x\, dx$ peut toujours s'intégrer sous forme finie.

Exercices.

1. $$\int dx \sqrt{1+e^{ax}} = \frac{2\sqrt{1+e^{ax}}}{a} + \frac{1}{a} \mathrm{l.} \frac{\sqrt{1+e^{ax}}+1}{\sqrt{1+e^{ax}}-1} + C.$$

2. $$\int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{1}{ab} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{b}{a} \mathrm{tg}\, x\right) + C.$$

3. $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\,dx = \mathrm{l.}\,(2+\cos x) + \frac{4}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right) + \mathrm{C}.$

4. $\int \frac{(1-r\cos x)\,dx}{1-2r\cos x+r^2} = \frac{x}{2} + \mathrm{arc\,tg}\left(\frac{1+r}{1-r}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right) + \mathrm{C}.$

5. $\int \frac{dx}{a+b\cos x+c\sin x} = \int \frac{dx}{a+r\cos(x-\alpha)}$ (245); $\quad b=r\cos\alpha, \quad c=r\sin\alpha.$

6. $\int [\mathrm{l.}\,(x+\sqrt{1+x^2})]^n dx = [\mathrm{l.}\,(x+\sqrt{1+x^2})]^{n-1}[x\,\mathrm{l.}\,(x+\sqrt{1+x^2}) - n\sqrt{1+x^2}]$
$+\, n(n-1)\int [\mathrm{l.}\,(x+\sqrt{1+x^2})]^{n-2}\,dx.$

7. $\int x^2\cos^5 x\,dx = \frac{1}{12}\left(x^2-\frac{2}{9}\right)\sin 3x + \frac{x\cos 3x}{18} + \frac{3}{4}(x^2-2)\sin x + \frac{3}{2}x\cos x + \mathrm{C}.$

8. $\int e^{ax}\cos^2 x\,dx = \frac{e^{ax}}{a(a^2+4)}(a^2\cos^2 x + 2a\sin x\cos x + 2) + \mathrm{C}.$

9. $\int e^{ax}\sin^2 x\,dx = \frac{e^{ax}}{a(a^2+4)}(a^2\sin^2 x - 2a\sin x\cos x + 2) + \mathrm{C}.$

10. $\int e^{ax}\sin x\cos x\,dx = \frac{e^{ax}(a\sin 2x - 2\cos 2x)}{2(a^2+4)} + \mathrm{C}.$

11. $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x} = -x\cot x + \mathrm{l.}\,\sin x + \mathrm{C}.$

12. $\int \sin^5 x\,dx = -\frac{\cos x}{5}\left(\sin^4 x + \frac{4}{3}\sin^2 x + \frac{2\cdot 4}{1\cdot 3}\right) + \mathrm{C}.$

13. $\int \cos^4 x\,dx = \frac{\sin x\cos x}{6}\left(\cos^4 x + \frac{5}{4}\cos^2 x + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\right) + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x + \mathrm{C}.$

14. $\int \sin^8 x\cos^7 x\,dx = \frac{\sin^9 x}{15}\left(\cos^6 x + \frac{6}{13}\cos^4 x + \frac{4\cdot 6}{11\cdot 13}\cos^2 x + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{9\cdot 11\cdot 13}\right) + \mathrm{C}.$

15. $\int \frac{\sin^4 x\,dx}{\cos x} = -\frac{\sin^3 x}{3} - \sin x + \mathrm{l.}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) + \mathrm{C}.$

16. $\int \frac{dx}{\sin^4 x} = \frac{\cos x}{3\sin^3 x}(1+2\sin^2 x) + \mathrm{C}.$

17. $\int \mathrm{tg}^7 x\,dx = \frac{\mathrm{tg}^6 x}{6} - \frac{\mathrm{tg}^4 x}{4} + \frac{\mathrm{tg}^2 x}{2} - \mathrm{l.}\,\cos x + \mathrm{C}.$

18. $$\int \frac{\sin^5 x dx}{\cos^8 x} = \frac{1}{3\cos^7 x}\left(\sin^4 x - \frac{4}{5}\sin^2 x - \frac{2\cdot 4}{5\cdot 7}\right) + \mathrm{C}.$$

19. $$\int \frac{dx}{\sin^7 x \cos x} = -\left(\frac{1}{6\sin^6 x} + \frac{1}{4\sin^4 x} + \frac{1}{2\sin^2 x}\right) + \mathrm{l.\,tg}\, x + \mathrm{C}.$$

CHAPITRE XXX.

INTÉGRATION PAR LES SÉRIES.

250. Le développement d'une intégrale en série convergente repose sur un théorème que nous allons démontrer.

Soit $u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + \cdots$ une série dont les termes sont fonctions continues de la variable x, et qui est en outre convergente, pour toutes les valeurs de la variable depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = \mathrm{X}$; et soit $\mathrm{f}(x)$ la somme de cette série, *en sorte que l'on ait, pour toute valeur de x depuis x_0 jusqu'à* X,

$$(1) \qquad \mathrm{f}(x) = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + \mathrm{R}_n,$$

R_n *tendant vers zéro quand n devient infini.* Multiplions par dx et intégrons les deux membres de cette égalité, à partir de x_0 : il viendra évidemment

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{f}(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} u_0\,dx + \int_{x_0}^{x} u_1\,dx + \cdots + \int_{x_0}^{x} u_{n-1}\,dx + \int_{x_0}^{x} \mathrm{R}_n\,dx.$$

Le dernier terme tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment, car il représente (216) l'aire, terminée aux abscisses x_0 et x, d'une courbe dont l'ordonnée R_n devient infiniment petite, quelque soit x. Il en résulte que la somme des autres termes tend indéfiniment vers l'intégrale de $\mathrm{f}(x)\,dx$, lorsque n croît indéfiniment, *ou, en d'autres termes, que l'on a le développement en série convergente*

$$(2) \qquad \int_{x_0}^{x} \mathrm{f}(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} u_0\,dx + \int_{x_0}^{x} u_1\,dx + \int_{x_0}^{x} u_2\,dx + \cdots$$

La limite supérieure des intégrations, x, peut avoir une valeur quelconque depuis x_0 jusqu'à X.

Il est bon d'observer que, si la série qui représente $f(x)$ devenait divergente sans être infinie, pour certaines valeurs de x entre x_0 et X, R_n ne tendrait pas vers zéro pour ces valeurs de x, mais cela n'introduirait dans l'aire de courbe $\int_{x_0}^{x} R_n\, dx$ que des éléments infiniment petits, et l'équation (2) existerait toujours.

Le développement de l'intégrale indéfinie est facile à déduire de là. On a en effet

$$\int f(x)\, dx = \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx + C,$$

et par suite,

$$(3) \qquad \int f(x)\, dx = C + \int_{x_0}^{x} u_0\, dx + \int_{x_0}^{x} u_1\, dx + \cdots$$

Le développement en série convergente d'une intégrale indéfinie est donc ramené au développement de la fonction sous le signe $\int$.

251. On déduit encore du théorème précédent une conséquence fort utile. *Si les termes d'une série convergente sont fonctions de x, leurs dérivées formeront une nouvelle série qui ne sera pas toujours convergente : mais, si elle l'est, elle aura pour somme la dérivée de la somme de la série primitive.*

Car, soient $F(x)$ la somme de la série primitive, et

$$f(x) = u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots$$

celle de la série formée des dérivées de ses différents termes. En intégrant à partir d'une valeur x_0 convenablement choisie, on aura, d'après le numéro précédent,

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\, dx = \int_{x_0}^{x} u_0\, dx + \int_{x_0}^{x} u_1\, dx + \cdots,$$

et cette série convergente aura pour somme $F(x) + C$, puisque ses termes ne diffèrent des termes correspondants de la série primitive que par des constantes. Donc on a

$$\int_{x_0}^{x} f(x) dx = F(x) + C, \qquad f(x) = F'(x),$$

ce que nous voulions établir.

Comme application de cette remarque, on peut déduire l'une de l'autre par une simple différentiation, les deux séries qui représentent respectivement sin x, cos x (91).

252. Le théorème du n° 250 est susceptible de deux sortes d'applications très-importantes, l'une qui se rapporte aux différentielles dont l'intégrale peut être obtenue sous forme finie ; l'autre qui se rapporte aux différentielles qui ne sont pas dans ce cas.

Dans le premier cas, en développant la fonction sous le signe d'intégration, et appliquant le théorème, on obtient sous forme de série convergente une intégrale dont la valeur est déjà connue sous forme finie, et en égalant ces deux expressions, on est conduit à des séries nouvelles.

Par exemple, en supposant x compris entre -1 et $+1$, on a

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \cdots,$$

et par suite

$$\int_0^x (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots$$

Mais on sait, d'autre part, que l'intégrale au premier membre n'est autre chose que arc sin x, sans constante, puisque cette fonction s'annulle avec x. Donc

$$\text{arc sin } x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots,$$

et cette série sera convergente, comme la première, pour toute valeur de x comprise entre -1 et $+1$.

Pour $x = 1$, on démontre (note Ire) que la série est encore convergente; d'autre part, la somme de cette série est fonction continue de x jusque et y compris $x = 1$ (85, *remarque*) ; en sorte que, x tendant vers l'unité, la limite du second membre est la somme de la série

$$1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7} + \cdots$$

Cette limite étant nécessairement égale à celle de arc sin x, on a

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7} + \cdots$$

253. On trouvera de même, x étant compris entre -1 et $+1$,

$$(1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots,$$

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots,$$

d'où l'on conclura

$$\text{arc tg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, \qquad x = \mathrm{M}(-1, +1).$$

Cette formule a déjà été trouvée (95). Si x était numériquement plus grand que l'unité, on poserait $x = \frac{1}{z}$, d'où $dx = -\frac{dz}{z^2}$, et l'on aurait

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = -\int \frac{dz}{1+z^2} = \mathrm{C} - z + \frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \cdots,$$

cette série étant convergente, puisque $z^2 < 1$. De là résulte l'équation

$$\text{arc tg}\, x = \mathrm{C} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \cdots,$$

et l'on déterminera C en faisant croître indéfiniment x, ce qui donnera à la limite

$$\frac{\pi}{2} = \mathrm{C}.$$

254. Passons à la seconde application. Nous avons démontré au n° 219 qu'il existe toujours une fonction de x ayant pour dérivée une fonction continue donnée, mais rien ne prouve que cette fonction intégrale soit exprimable par un nombre limité de ces opérations élémentaires que nous avons jusqu'ici introduites dans l'analyse, sous le nom de fonctions simples. En fait, il n'en est pas ainsi, et il existe un nombre illimité de différentielles dont l'intégrale n'est pas exprimable de cette manière; telle est, par exemple, $\frac{e^{ax}dx}{x}$ que nous avons déjà rencontrée (247).

Le but que l'on doit alors se proposer est de calculer, avec autant d'approximation qu'il est nécessaire, la valeur de l'intégrale, de manière à construire une *table* qui donne, pour chacune des valeurs que l'on peut attribuer à la variable x, la valeur correspondante de l'intégrale. Cela fait,

l'intégrale pourra être considérée comme une fonction connue de la variable x, tout aussi bien que les fonctions logarithmiques et circulaires, et pourra être introduite au même titre que ces dernières dans l'analyse; ce sera une nouvelle *transcendante* qui pourra servir, à son tour, à exprimer les intégrales d'autres différentielles plus compliquées, et ainsi de suite.

Il est clair que l'on devra choisir, pour leur appliquer ce travail, les intégrales qui, par le rôle plus important qu'elles jouent dans les applications, par le grand nombre d'autres intégrales qui en dépendent, se recommandent particulièrement à l'attention du géomètre : telles sont les *transcendantes elliptiques* dont nous parlerons plus loin.

Or, parmi les méthodes que l'on emploie pour calculer les valeurs approchées des intégrales, lorsque leur expression ne peut être obtenue sous forme finie, le développement de ces intégrales en séries convergentes est une des plus commodes, et le théorème du n° 250 fournit le moyen d'effectuer ce développement dans un grand nombre de cas.

255. Prenons pour premier exemple la fonction elliptique *de première espèce*

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}},$$

la constante k étant <1. La formule du binôme nous donne, x^2 étant aussi <1, la série convergente

$$(1-k^2x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}k^2x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}k^6x^6 + \cdots$$

Nous aurons donc (250)

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}k^2\int_0^x \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\int_0^x \frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}} + \cdots$$

et les intégrales qui figurent dans ce développement sont toutes comprises dans celle-ci :

$$\int \frac{x^{2n}dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

dont nous avons donné la valeur au n° 242. En les remplaçant donc par

leurs expressions connues, nous aurons, en série convergente,

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}} = \arcsin x + \frac{1}{2}k^2\left(-\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x\right)$$

$$+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\left[-\frac{x\sqrt{1-x^2}}{4}\left(x^2+\frac{3}{2}\right)+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\arcsin x\right]$$

$$+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}k^6\left[-\frac{x\sqrt{1-x^2}}{6}\left(x^4+\frac{5}{4}x^2+\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\right)+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\arcsin x\right]$$

$$+\;\cdots\cdots$$

Cette équation peut être mise sous une forme plus simple : tous les termes affectés du facteur arc sin x formant, comme on le voit sans peine, une série convergente, l'ensemble des autres termes doit aussi former une série convergente (25), et le second membre de l'équation peut être regardé comme égal à la somme de ces deux séries. On écrira donc

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}} = \left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2k^4+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2k^6+\cdots\right]\arcsin x$$

$$-x\sqrt{1-x^2}\left[\frac{1}{2}\frac{k^2}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(x^2+\frac{3}{2}\right)\frac{k^4}{4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\left(x^4+\frac{5}{4}x^2+\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\right)\frac{k^6}{6}+\cdots\right],$$

avec la condition

$$x = \mathrm{M}(-1,\ +1).$$

256. Considérons encore l'intégrale irréductible

$$\int \frac{e^x dx}{x};$$

substituons à e^x son développement

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots,$$

et désignons par x_0 une valeur de x différente de zéro. Nous aurons

$$\int_{x_0}^x \frac{e^x dx}{x} = \int_{x_0}^x \frac{dx}{x} + \int_{x_0}^x dx + \frac{1}{1\cdot 2}\int_{x_0}^x x\,dx + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\int_{x_0}^x x^2dx + \cdots$$

$$= \mathrm{l.}\,\frac{x}{x_0} + (x - x_0) + \frac{1}{1\cdot 2}\cdot\frac{x^2-x_0^2}{2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{x^3-x_0^3}{3} + \cdots,$$

ou, en désignant par C la constante

$$-\left(\mathrm{l}.\,x_0 + x_0 + \frac{1}{1\cdot 2}\,\frac{x_0^2}{2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\,\frac{x_0^3}{3} + \cdots\right),$$

$$\int \frac{e^x dx}{x} = \mathrm{C} + \mathrm{l}.\,x + x + \frac{1}{1\cdot 2}\,\frac{x^2}{2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\,\frac{x^3}{3} + \cdots$$

Exercices.

Développer, sous forme finie et en séries convergentes, les valeurs des intégrales suivantes :

1. $\int_0^x \frac{dx}{1+x^3}, \qquad x = \mathrm{M}(-1, +1).$

R. $\frac{1}{3}\,\mathrm{l}.\,\frac{1+x}{\sqrt{1-x+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x\sqrt{3}}{2-x} = x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^{10}}{10} - \frac{x^{13}}{13} + \cdots$

2. $\int_0^x \frac{1+x^2}{1+x^4}dx, \qquad x = \mathrm{M}(-1, +1).$

R. $\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} = x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \frac{x^{11}}{11} - \cdots$

3. $\int_0^x \frac{1+x^4}{1+x^6}\,dx, \qquad x = \mathrm{M}(-1, +1);$

R. $\frac{1}{3}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{3x(1-x^2)}{1-4x^2+x^4} = x + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} - \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{13}}{13} + \frac{x^{17}}{17} \cdots$

4. $\int_0^x dx\sqrt{ax-x^2}, \qquad x = \mathrm{M}(0, +a).$

R. $-\frac{(a-2x)}{4}\sqrt{ax-x^2} + \frac{a^2}{8}\,\mathrm{arc\,cos}\,\frac{a-2x}{a} = x^{\frac{3}{2}}\sqrt{a}\left(\frac{2}{3} - \frac{x}{5a} - \frac{x^2}{4\cdot 7a^2} - \frac{3x^3}{4\cdot 6\cdot 7a^3}\right).$

5. $\int_0^x \frac{dx}{2-2x+x^2} = \frac{1}{4}\int_0^x (1+2x+x^2)\left(1-\frac{x^4}{4}\right)^{-1} dx, \qquad x^2 < 2.$

R. $2\,\mathrm{arc\,tg}\,(x-1) + \frac{\pi}{2} = \frac{x}{1\cdot 1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{2\cdot 3} - \left(\frac{x^5}{4\cdot 5} + \frac{x^6}{4\cdot 6} + \frac{x^7}{8\cdot 7}\right) + \left(\frac{x^9}{16\cdot 9} + \frac{x^{10}}{16\cdot 10} + \frac{x^{11}}{32\cdot 11}\right) -$

6. $\int_0^x \frac{\mathrm{arc\,tg}\,x\,dx}{1+x^2}, \qquad x = \mathrm{M}(-1, +1);$

R. $(\text{arc tg}\, x)^2 = \frac{x^2}{2} - \left(1 + \frac{1}{3}\right)\frac{x^4}{4} + \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)\frac{x^6}{6} - \cdots$

Développer les intégrales irréductibles

1. $\int_0^x \frac{\text{l.}\,(1-x)}{x}\,dx = -\left(x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^4}{4^2} + \cdots\right),\qquad x = \text{M}\,(-1, +1).$

2. $\int_0^x \frac{\text{l.}\,(1+x)}{x}\,dx = x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \frac{x^4}{4^2} + \cdots,\qquad x = \text{M}\,(-1, +1).$

3. $\int_0^x \frac{\text{arc tg}\, x\, dx}{x} = x - \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^5}{5^2} - \frac{x^7}{7^2} + \cdots,\qquad x = \text{M}\,(-1, +1).$

4. $\int_0^x \frac{e^{-ax}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{a} - \frac{e^{ax}}{a}\left[1 + \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{x}{a}\right) + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(x^4 + \frac{3}{a}x^3 + \frac{2\cdot 3}{a^2}x^2 + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{a^3}x\right) + \cdots\right],$

$x = \text{M}\,(-1, +1).$

5. $\int_0^x \frac{\text{arc tg}\, x\ \text{l.}\,(1+x^2)}{x^3}\,dx = x - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\frac{x^3}{3} + \left(\frac{1}{3\cdot 1} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 5}\right)\frac{x^5}{5}$

$- \left(\frac{1}{4\cdot 1} + \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{1\cdot 7}\right)\frac{x^7}{7} + \cdots;\qquad x = \text{M}\,(-1, +1).$

6. $\int x^m (a + bx^n)^p dx = a^p\left[\frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{pb}{a}\,\frac{x^{m+n+1}}{m+n+1} + \frac{p\,(p-1)}{1\cdot 2}\,\frac{b^2}{a^2}\,\frac{x^{m+2n+1}}{m+2n+1}\right.$

$\left. + \frac{p\,(p-1)\,(p-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,\frac{b^3}{a^3}\,\frac{x^{m+3n+1}}{m+3n+1} + \cdots\right],\qquad x^n = \text{M}\left(+\frac{a}{b}, -\frac{a}{b}\right).$

CHAPITRE XXXI.

DES INTÉGRALES DÉFINIES.

§ 1. PROPRIÉTÉS DES INTÉGRALES DÉFINIES.

257. Nous avons montré au n° 217 que, si la fonction $f(x)$ est continue depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$, il existe une fonction $F(x)$, également continue, dont la dérivée est $f(x)$, et que l'on a dans ce cas la relation fondamentale

$$(1) \qquad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = F(X) - F(x_0).$$

Cette formule sert à calculer l'intégrale définie d'une fonction, quand son intégrale indéfinie est connue, mais elle exige une précaution, lorsque la fonction $F(x)$ est à détermination multiple : il est clair, en effet, que si la fonction admet plusieurs valeurs pour $x = x_0$ ou pour $x = X$, l'équation (1) fournira des résultats différents suivant celle de ces valeurs que l'on adoptera, tandis que le premier membre n'admet qu'une valeur. Mais les principes mêmes sur lesquels cette formule a été fondée décident la question, car ils impliquent la continuité de la fonction $F(x)$ de x_0 à X : il faudra donc, après avoir choisi la valeur $F(x_0)$, prendre pour $F(X)$ celle des valeurs de la fonction qui se relie à $F(x_0)$ par une série continue, lorsque l'on fait varier x de x_0 à X. C'est pour cette raison que nous avons (218) fixé la valeur de l'intégrale de $(1+x^2)^{-1}dx$, entre les limites 0 et 1, à $\frac{\pi}{4}$.

258. La formule (1) conduit à diverses propriétés des intégrales définies. On a d'abord, par cette équation,

$$\int_{X}^{x_0} f(x)\,dx = F(x_0) - F(X) = -[F(X) - F(x_0)] = -\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx;$$

donc, *si l'on renverse les limites d'une intégrale définie, on ne fait que changer son signe.* C'est ce qui résulte d'ailleurs immédiatement de la définition même de l'intégrale définie (215).

259. La méthode par substitution s'applique aux intégrales définies. En effet, posons $x = \varphi(z)$, et désignons par z_0, Z les valeurs de z qui correspondent respectivement à x_0, X, et qui sont déterminées par les équations

$$x_0 = \varphi(z_0), \qquad X = \varphi(Z).$$

D'après l'équation (1)

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = F(X) - F(x_0) = F[\varphi(Z)] - F[\varphi(z_0)];$$

or, la fonction $F[\varphi(z)]$ ayant pour différentielle $F'[\varphi(z)]\,\varphi'(z)\,dz = f[\varphi(z)]\,\varphi'(z)\,dz$, le dernier membre n'est autre chose que l'intégrale de cette expression entre les limites z_0 et Z; donc, on a

$$(2) \qquad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{z_0}^{Z} f[\varphi(z)]\,\varphi'(z)\,dz.$$

Ainsi, lorsque l'on substitue une variable à une autre dans une intégrale définie, on doit prendre pour limites les valeurs de la nouvelle variable qui correspondent respectivement aux limites primitives.

La transformation précédente exige absolument que la fonction φ soit continue de z_0 à Z, car si $\varphi(z)$ variait brusquement lorsque z passe de la valeur z_0 à la valeur Z, la fonction $F[\varphi(z)]$ éprouverait elle-même une variation brusque; elle ne serait plus fonction continue de z, et la différence $F[\varphi(Z)] - F[\varphi(z_0)]$ ne représenterait plus l'intégrale définie

$$\int_{z_0}^{Z} f[\varphi(z)]\,\varphi'(z)\,dz.$$

La formule (2) se déduit aussi de la notion de l'intégrale définie.

260. Il n'y a aucune difficulté à appliquer la méthode par décomposition aux intégrales définies. Ainsi l'on a, soit en partant de l'équation (1), soit en partant de la notion de l'intégrale définie,

$$(3) \quad \int_{x_0}^{X} [f(x)+\varphi(x)+\psi(x)+\cdots]\,dx = \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx + \int_{x_0}^{X} \varphi(x)\,dx + \int_{x_0}^{X} \psi(x)\,dx.$$

261. L'intégration par partie s'applique de même. Soient u et v deux fonctions de x: de l'égalité connue

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du,$$

on déduit immédiatement, par l'équation (1),

$$(4) \qquad \int_{x_0}^{X} udv = \Big[uv\Big]_{x_0}^{X} - \int_{x_0}^{X} vdu,$$

formule dans laquelle la notation

$$\Big[uv\Big]_{x_0}^{X}$$

représente l'accroissement de la fonction uv lorsque x passe de la valeur x_0 à la valeur X, la fonction uv étant d'ailleurs supposée continue.

262. Il est souvent utile de décomposer en plusieurs parties l'intervalle compris entre les limites de l'intégrale : c'est à quoi sert le théorème suivant.

Soient $x_1, x_2, .., x_n$ diverses valeurs de la variable comprises entre x_0 et X. L'équation (1) donne

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = F(x_1) - F(x_0), \qquad \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = F(x_2) - F(x_1),$$

$$\ldots\ldots, \qquad \int_{x_n}^{X} f(x)\,dx = F(X) - F(x_n),$$

et, en ajoutant ces équations membre à membre, la somme des seconds membres se réduit à $F(X) - F(x_0)$, ce qui donne l'égalité

$$(5) \quad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_n}^{X} f(x)\,dx.$$

Il faut remarquer que les quantités x_0, $x_1, \ldots, x_n$, X, ne sont pas nécessairement rangées par ordre de grandeur : la variable x pourrait être tantôt croissante, tantôt décroissante dans les intervalles, et quelques-unes des quantités $x_1, \ldots, x_n$ pourraient même n'être pas comprises entre les limites x_0 et X, sans que la démonstration cessât de subsister. La seule condition, toujours indispensable, est que la fonction $f(x)$ ne cesse pas d'être finie entre les limites des intégrations, et, si elle est à détermination multiple, que l'on ait soin de lui conserver la même valeur lorsque x revient aussi à une même valeur.

Le théorème précédent suffit quelquefois pour donner la valeur d'une

intégrale définie, sans que l'on connaisse l'intégrale indéfinie de la fonction $f(x)\,dx$. Par exemple, soit l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \sin x^3 dx = \int_{-1}^{0} \sin x^3 dx + \int_{0}^{1} \sin x^3 dx.$$

Changeant x en $-z$ dans la première de ces deux intégrales, et renversant les limites, on a

$$\int_{-1}^{+1} \sin x^3 dx = \int_{0}^{1} \sin(-z^3)\,dz + \int_{0}^{1} \sin x^3 dx$$

$$= -\int_{0}^{1} \sin z^3 dz + \int_{0}^{1} \sin x^3 dx = 0.$$

263. Les propriétés de l'intégrale définie

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

établies au chapitre XXV, et celles que nous venons d'exposer, supposent toujours (218) que les limites x_0 et X aient des valeurs finies, et que la fonction $f(x)$ conserve une valeur finie depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$. Il nous resterait à examiner ce que deviennent ces propriétés lorsque les conditions précédentes ne sont plus remplies; mais cette théorie délicate fera l'objet d'une étude spéciale. Nous nous bornerons ici à quelques principes très-simples.

1° Une intégrale prise entre les limites x_0 et ∞ n'est autre chose que la limite vers laquelle tend l'intégrale prise de x_0 à X, lorsque l'on fait croître indéfiniment X; on a donc, par définition,

$$\int_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx = lim \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx, \qquad lim\, X = \infty.$$

On interprètera de même les notations

$$\int_{-\infty}^{X} f(x)\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

2° Quand la fonction $f(x)$ devient infinie pour l'une des limites x_0, X, on ne prend d'abord l'intégrale que jusqu'à une valeur de x infiniment

voisine de cette limite ; on fait ensuite tendre vers zéro la différence entre cette valeur de x et la limite : la valeur vers laquelle converge l'intégrale, valeur qui peut être finie, ou infinie, ou indéterminée, est représentée par la notation $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$. Ainsi, supposons $f(X) = \infty$, et soit ε un infiniment petit de même signe que $X - x_0$; on aura, par définition,

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = lim \int_{x_0}^{X-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

De même, si $f(x)$ devenait infini pour une valeur x_1 de x comprise entre x_0 et X, on aurait

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = lim \left[\int_{x_0}^{x_1-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_1+\eta}^{X} f(x)\,dx\right],$$

ε et η ayant pour limite zéro : la valeur de l'intégrale, définie par cette équation, sera, suivant les cas, finie, infinie, ou indéterminée.

Ces remarques, jointes aux précautions que nous avons indiquées dans l'emploi des équations (1), (2), (3), (4) et (5), suffisent pour lever les difficultés qui peuvent se rencontrer dans la plupart des applications, et pour prévenir les erreurs que l'on serait exposé à commettre.

§ 2. APPLICATION DES PRINCIPES PRÉCÉDENTS AU CALCUL DES INTÉGRALES DÉFINIES.

264. L'intégrale indéfinie d'une différentielle étant connue, l'équation (1) fournit son intégrale définie entre les limites données. Voici quelques résultats obtenus par cette méthode.

De la formule

$$\int_{0}^{1} x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C,$$

on déduit, en supposant $a > -1$,

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1}\cdot$$

De la formule

$$\int \cos^2 mx dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2mx}{4m} + C,$$

on déduit

$$\int_0^\pi \cos^2 mx\,dx = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{d'où} \qquad \int_0^\pi \sin^2 mx\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

On a trouvé, $a-b$ étant positif (245),

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C.$$

Prenant l'intégrale entre les limites 0 et π, et observant que la fonction circulaire est assujettie à varier d'une manière continue, on aura

$$\int_0^\pi \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}[\operatorname{arc\,tg}\infty - \operatorname{arc\,tg} 0] = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

On tirera de même, de la relation

$$\int \frac{dx}{1+2x\cos\varphi+x^2} = \frac{1}{\sin\varphi}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+\cos\varphi}{\sin\varphi},$$

l'égalité

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+2x\cos\varphi+x^2} = \frac{1}{\sin\varphi}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi} - \operatorname{arc\,tg}\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right]$$

$$= \frac{1}{\sin\varphi}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} = \frac{1}{\sin\varphi}\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right),$$

d'où

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+2x\cos\varphi+x^2} = \frac{\varphi}{2\sin\varphi}.$$

Supposons m et n entiers, et différents l'un de l'autre : nous aurons

$$\int_0^\pi \cos mx\cos nx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]\,dx.$$

$$= \left[\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)}\right]_0^\pi = 0.$$

265. On trouve immédiatement, en ayant égard à ce qui a été dit plus haut (263),

$$\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2a}, \qquad \int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}, \qquad a > 0.$$

De même, si dans les formules du n° 248

$$\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2} + C,$$

$$\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + C,$$

on change a en $-a$, et si l'on regarde a comme positif, on aura facilement

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx dx = \frac{a}{a^2+b^2}, \qquad \int_0^\infty e^{-ax}\sin bx dx = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

266. L'intégration par partie, appliquée aux intégrales définies, conduit à des formules de réduction semblables à celles que nous avons souvent rencontrées, mais, lorsque les limites sont convenablement choisies, beaucoup plus simples. Par exemple, l'équation

$$\int e^{-ax}x^{n-1}dx = -\frac{e^{-ax}x^{n-1}}{a} + \frac{n-1}{a}\int e^{-ax}x^{n-2}dx$$

qui résulte immédiatement de l'intégration par partie, donne évidemment

$$\int_0^\infty e^{-ax}x^{n-1}dx = \frac{n-1}{a}\int_0^\infty e^{-ax}x^{n-2}dx,$$

si $n > 1$; et par suite

$$\int_0^\infty e^{-ax}x^{n-1}dx = 1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\,a^{-n}.$$

De même, la formule connue

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}{m} + \frac{m-1}{m}\int\frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

donne (261)

$$\int_0^1 \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{m-1}{m}\int_0^1\frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Si m est pair, on tirera immédiatement de là

$$\int_0^1 \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{m-1}{m}\cdot\frac{m-3}{m-2}\cdots\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1\cdot 3\cdots(m-1)}{2\cdot 4\cdots m}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Si m est impair, on aura de même

$$\int_0^1 \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{m-1}{m} \cdot \frac{m-3}{m-2} \cdots \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\cdot 4 \cdots (m-1)}{3\cdot 5 \cdots m},$$

en observant que

$$\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[-\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 = 1.$$

Considérons encore la formule du n° 233

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^m} = \frac{x}{(2m-2)(1+x^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2m-2} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{m-1}},$$

et prenons 0 et ∞ pour les limites de l'intégrale. Le terme hors du signe d'intégration étant nul pour $x = 0$, et tendant vers zéro lorsque x croît indéfiniment, nous avons

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^m} = \frac{2m-3}{2m-2} \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^{m-1}},$$

et cette formule de réduction nous ramène au cas où $m = 1$ (265), d'où

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^m} = \frac{1\cdot 3 \cdots (2m-3)}{2\cdot 4 \cdots (2m-2)} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

En posant $\sqrt{ax - x^2} = xz$, nous avons obtenu (239)

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{ax - x^2}} = -2a^m \int \frac{dz}{(1+z^2)^{m+1}}.$$

Si les limites sont $x = 0$, $x = a$, les valeurs correspondantes de z seront $z = \infty$ et $z = 0$; donc, renversant les limites et changeant le signe de l'intégrale, remplaçant m par $m+1$ dans la formule obtenue plus haut, on aura

$$\int_0^a \frac{x^m dx}{\sqrt{ax - x^2}} = \frac{1\cdot 3 \cdots (2m-1)}{2\cdot 4 \cdots 2m} \pi a^m.$$

Cette intégrale est souvent utile.

On trouvera, par la même méthode, suivant que m est pair ou impair,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\, dx = \frac{1\cdot 3 \cdots (m-1)}{2\cdot 4 \cdots m} \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{2\cdot 4 \cdots (m-1)}{3\cdot 5 \cdots m},$$

et

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x \, dx = \begin{cases} \dfrac{1\cdot 3\cdots(m-1)\ 1\cdot 3\cdots(n-1)}{2\cdot 4\cdots(m+n)}\ \dfrac{\pi}{2}, & (m,\ n,\ \text{pairs}); \\[2ex] \dfrac{2\cdot 4\cdots(n-1)}{(m+1)(m+3)\cdots(m+n)} & (n \text{ impair, } m \text{ quelconque}); \\[2ex] \dfrac{2\cdot 4\cdots(m-1)}{(n+1)(n+3)\cdots(m+n)} & (m \text{ impair, } n \text{ quelconque}). \end{cases}$$

267. Considérons maintenant l'intégrale remarquable

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{1+x^n},$$

m et n étant entiers, positifs, et $n > m$. Nous aurons besoin du lemme suivant : on déduit facilement des propriétés des exponentielles imaginaires (ch. IX, § 4) les formules

$$\cos\theta + \cos 3\theta + \cdots + \cos(2n-1)\theta = \frac{\sin 2n\theta}{2\sin\theta};$$

$$\sin\theta + \sin 3\theta + \cdots + \sin(2n-1)\theta = \frac{\sin^2 n\theta}{\sin\theta}.$$

La première, différentiée par rapport à θ, donne

$$\sin\theta + 3\sin 3\theta + \cdots + (2n-1)\sin(2n-1)\theta = -\frac{2n\cos 2n\theta\sin\theta - \sin 2n\theta\cos\theta}{2\sin^2\theta}.$$

Faisons dans ces formules $\theta = \dfrac{m\pi}{n}$, m et n satisfaisant aux conditions ci-dessus : $\sin 2n\theta = 0$, $\cos 2n\theta = 1$, et il vient, en désignant par i un nombre entier et impair,

$$(\alpha)\quad \sum_{i=1}^{i=2n-1} \cos\frac{im\pi}{n} = 0; \qquad (\beta)\quad \sum_{i=1}^{i=2n-1} \sin\frac{im\pi}{n} = 0;$$

$$(\gamma)\quad \sum_{i=1}^{i=2n-1} i\sin\frac{im\pi}{n} = -\frac{n}{\sin\dfrac{m\pi}{n}}.$$

Cela étant posé, décomposons en fractions simples la fraction rationnelle

$$\frac{x^{m-1}}{1+x^n},$$

en observant que les racines de l'équation $1+x^n=0$, d'après ce que nous avons établi (n° 9, p. 11), sont toutes comprises dans l'expression

$$\cos\frac{i\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{i\pi}{n}=e^{\frac{i\pi}{n}\sqrt{-1}}=e^{\theta_i\sqrt{-1}},$$

i désignant l'un des nombres *impairs* 1, 3,... $(2n-1)$, et θ_i le rapport $\frac{i\pi}{n}$. Or, d'après la méthode exposée pour la décomposition des fractions rationnelles, et la remarque du n° 229, les racines étant ici toutes inégales, le numérateur de la fraction correspondante à la racine ci-dessus s'obtiendra en faisant x égal à cette racine dans l'expression

$$\frac{f(x)}{F'(x)}=\frac{1}{n}x^{m-n};$$

sa valeur sera

$$\frac{1}{n}e^{(m-n)\theta_i\sqrt{-1}}=-\frac{1}{n}e^{m\theta_i\sqrt{-1}},$$

à cause de la relation

$$e^{-n\theta_i\sqrt{-1}}=e^{-i\pi\sqrt{-1}}=\cos i\pi=-1.$$

On aura donc

$$\frac{x^{m-1}}{1+x^n}=-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=2n-1}\frac{e^{m\theta_i\sqrt{-1}}}{x-e^{\theta_i\sqrt{-1}}},$$

ou, en multipliant haut et bas chaque terme par $x-e^{-\theta_i\sqrt{-1}}$ et appliquant la formule du cosinus en exponentielles imaginaires,

$$\frac{x^{m-1}}{1+x^n}=-\frac{1}{n}\Sigma\frac{xe^{m\theta_i\sqrt{-1}}-e^{(m-1)\theta_i\sqrt{-1}}}{x^2-2x\cos\theta_i+1}=-\frac{1}{n}\Sigma\frac{x\cos m\theta_i-\cos(m-1)\theta_i}{x^2-2x\cos\theta_i+1},$$

car, la fonction à décomposer étant réelle, il est évident *a priori* que le coefficient de $\sqrt{-1}$ est nul dans le second membre de cette égalité. Intégrons maintenant d'après la formule du n° 233 (3°), en observant encore que

$$\cos m\theta_i\cos\theta_i-\cos(m-1)\theta_i=-\sin m\theta_i\sin\theta_i,$$

et nous trouverons l'intégrale indéfinie

$$\int\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}=-\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{i=2n-1}\cos m\theta_i\,\mathrm{l.}\,(x^2-2x\cos\theta_i+1)$$
$$+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=2n-1}\sin m\theta_i\,\mathrm{arc\,tg}\frac{x-\cos\theta_i}{\sin\theta_i}+C.$$

Cherchons ce qu'elle devient aux deux limites $x=0$ et $x=\infty$. Le premier groupe s'annulle pour $x=0$, car l. 1 est zéro; il s'annulle aussi pour $x=\infty$, car on peut écrire

$$\Sigma\cos m\theta_i \text{l.}(x^2-2x\cos\theta_i+1)=\text{l.}x^2\Sigma\cos m\theta_i+\Sigma\cos m\theta_i\text{l.}\left(1-\frac{2}{x}\cos\theta_i+\frac{1}{x^2}\right);$$

le coefficient de l. x^2 est nul, à cause de la formule (α); les autres termes tendent vers zéro lorsque x croît indéfiniment. Ainsi la partie de l'intégrale qui s'exprime par logarithmes est nulle aux deux limites.

Quand au second groupe, observons que, pour $x=0$,

$$\text{arc tg}\,\frac{x-\cos\theta_i}{\sin\theta_i}=\text{arc tg}\,(-\cot\theta_i)=\text{arc tg}\left[-\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\theta_i\right)\right]=\theta_i-\frac{\pi}{2},$$

et que, si l'on tient compte de la condition de continuité imposée à l'intégrale indéfinie, on aura

$$\left[\text{arc tg}\left(\frac{x-\cos\theta_i}{\sin\theta_i}\right)\right]_0^\infty=\frac{\pi}{2}-\left(\theta_i-\frac{\pi}{2}\right)=\pi-\theta_i;$$

d'où

$$\int_0^\infty\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}=\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{i=2n-1}\sin m\theta_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=2n-1}\theta_i\sin m\theta_i.$$

En vertu des formules (β) et (γ), cette équation se réduit à

$$\int_0^\infty\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}=\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

Cette intégrale définie en donne une autre, aussi très-importante. Posons

$$x^n=z,\qquad \frac{m}{n}=a;$$

les limites d'intégration par rapport à z seront encore 0 et ∞, et la substitution nous donnera

$$\int_0^\infty\frac{z^{a-1}dz}{1+z}=\frac{\pi}{\sin a\pi},$$

a ayant une valeur fractionnaire comprise entre zéro et l'unité. On s'assure facilement que l'intégrale définie, dans ces conditions, est une fonction continue du paramètre a, et comme $\sin a\pi$ jouit de la même propriété,

on en conclut que l'équation subsiste pour toutes les valeurs de a plus grandes que zéro et plus petites que l'unité.

268. Le développement en série, conformément aux principes exposés dans le chapitre précédent, fournit des valeurs indéfiniment approchées des intégrales définies. Soit, comme exemple, à déterminer

$$\int_0^1 \frac{1.(1+x)}{x}\,dx.$$

Remplaçant $1.(1+x)$ par la série

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots,$$

convergente pour toute valeur de x depuis 0 jusqu'à 1, on aura

$$\int_0^1 \frac{1.(1+x)}{x}\,dx = \int_0^1 dx - \frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx + \frac{1}{3}\int_0^1 x^2dx - \frac{1}{4}\int_0^1 x^3dx + \cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots,$$

et cette série convergente donnera la valeur de l'intégrale définie avec l'approximation voulue.

Il arrive souvent que, dans la série obtenue pour représenter une intégrale définie, on reconnait le développement d'une certaine quantité : on trouve ainsi sous forme finie l'expression de l'intégrale définie, quoique l'intégrale indéfinie demeure inconnue. Ainsi, l'on peut démontrer que la série numérique ci-dessus a pour somme $\frac{\pi^2}{12}$; on a donc

$$\int_0^1 \frac{1.(1+x)}{x}\,dx = \frac{\pi^2}{12}.$$

269. Soit encore à chercher l'intégrale, entre 0 et π, de l'expression

$$\frac{x \sin x\,dx}{1+\cos^2 x}.$$

En vertu de l'équation

$$(1+\cos^2 x)^{-1} = 1 - \cos^2 x + \cos^4 x - \cos^6 x + \cdots,$$

et de la formule

$$\int_0^\pi x \sin x \cos^{2n} x\,dx = -\left[\frac{x \cos^{2n+1} x}{2n+1}\right]_0^\pi + \frac{1}{2n+1}\int_0^\pi \cos^{2n+1} x\,dx,$$

où l'intégrale indiquée au second membre est nulle comme ayant tous ses éléments deux à deux égaux et de signes contraires, on aura

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x\, dx}{1+\cos^2 x} = \pi\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right).$$

Mais la série entre parenthèses a pour somme, comme on l'a vu, le quart du nombre π. Il viendra donc

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x\, dx}{1+\cos^2 x} = \frac{\pi^2}{4}.$$

On aura de même, en développant $\sin bx$,

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} \sin bx\, dx}{x} = b\int_0^\infty e^{-ax} dx - \frac{b^3}{1\cdot 2\cdot 3}\int_0^\infty e^{-ax} x^2 dx + \frac{b^5}{1\cdot 2 \cdots 5}\int_0^\infty e^{-ax} x^4 dx - \cdots$$

et en remplaçant les intégrales du second membre par leurs valeurs, comprises dans la formule (n° 266)

$$\int_0^\infty e^{-ax} x^n dx = 1\cdot 2\cdot 3 \cdots n \cdot a^{-(n+1)},$$

on trouvera

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} \sin bx\, dx}{x} = \left(\frac{b}{a}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{b}{a}\right)^5 - \cdots = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{a}\right).$$

Comme la formule concernant le développement d'une intégrale en série n'a été démontrée que pour le cas des limites finies, et que, en outre, la série ci-dessus n'est convergente que si le rapport $b : a$ est moindre que l'unité, on voit bien que la formule obtenue n'a qu'une valeur d'induction. Cette remarque est applicable à beaucoup d'intégrales définies obtenues par le même procédé.

Exercices.

Trouver les valeurs des intégrales définies suivantes, 1° par l'intégration indéfinie :

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi}{2ab}.$

2. $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}, \qquad (a^2 > 1).$

3. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x\,dx}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}=\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{l.}\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right).$

4. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}=\frac{\pi}{1-\alpha^2}.$

5. $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \mathrm{l.}\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}+\mathrm{l.}\,2-2.$

6. $\displaystyle\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx=\frac{1\cdot2\cdots(n-1)}{m(m+1)\cdots(m+n-1)}.$

7. $\displaystyle\int_0^\pi \cos^m x\cos mx\,dx=\frac{\pi}{2^m}.$

8. $\displaystyle\int_0^\pi \cos^m x\cos nx\,dx,$ m et n étant entiers.

R. L'intégrale est nulle si $m<n$, et si m, étant $>n$, est de parité différente. Si $m>n$, m et n étant de même parité, la valeur de l'intégrale est

$$\frac{(n+1)(n+2)\cdots m}{2\cdot4\cdots(m-n)(2n+2)(2n+4)\cdots(m+n)}\,\frac{\pi}{2^n}.$$

9. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\sin^n x\,dx=\frac{1\cdot2\cdot3\cdots n}{(a^2+1)(a^2+3^2)\cdots(a^2+n^2)}$ si n est impair;

$$=\frac{1\cdot2\cdot3\cdots n}{a(a^2+2^2)(a^2+4^2)\cdots(a^2+n^2)}\quad\text{si } n \text{ est pair.}$$

2° Par les séries :

10. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{l.}\,x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4^2}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6^2}+\cdots\right)=-\frac{\pi}{2}\,\mathrm{l.}\,2.$

11. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-(1+\beta)x}-e^{-(1+\alpha)x}}{x}\,dx=\mathrm{l.}\left(\frac{1+\alpha}{1+\beta}\right).$

12. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-ax}dx}{1+\cos^2 x}=\frac{e^{\frac{a\pi}{2}}-e^{-\frac{a\pi}{2}}}{a}\left[1-\frac{1\cdot2}{a^2+2^2}+\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{(a^2+2^2)(a^2+4^2)}-\cdots\right].$

13. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{l.}\,\frac{a+b\sin x}{a-b\sin x}\,\frac{dx}{\sin x}=\pi\arcsin\frac{b}{a}\qquad\left(\frac{b}{a}\lesseqgtr 1\right).$

14. $\displaystyle\int_0^\pi e^{a\cos x}\cos(a\sin x)\,dx = \pi.$

15. $\displaystyle\int_0^\pi e^{a\cos x}\cos(a\sin x)\cos nx\,dx = \frac{\pi}{2}\,\frac{a^n}{1\cdot 2\cdots n}.$

16. $\displaystyle\int_0^\pi e^{a\cos x}\sin(a\sin x)\,dx = \int_0^a \frac{e^z - e^{-z}}{z}\,dz.$

17. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-a\cos x}\cos(a\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^a \frac{\sin z}{z}\,dz.$

Déduire de cette dernière formule celle-ci :

$$\int_0^\infty \frac{\sin z}{z}\,dz = \frac{\pi}{2}.$$

CHAPITRE XXXII.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DU CALCUL INTÉGRAL.

270. Le calcul intégral s'applique avec succès à un grand nombre de problèmes importants de la géométrie : la quadrature des aires planes, la rectification des courbes, l'évaluation des volumes et des surfaces courbes, etc. En effet, ces problèmes se ramènent facilement à la recherche de la limite d'une somme d'infiniment petits : or, en vertu d'un principe fondamental (29), on peut négliger dans chacun de ces éléments infiniment petits la partie, infiniment petite par rapport à lui-même, dont l'évaluation directe serait impossible, sans que pour cela la limite de la somme des éléments soit altérée. On obtient par là une expression très-simple de l'élément infinitésimal de la grandeur cherchée, en fonction de l'accroissement d'une variable convenablement choisie; la limite de la somme de ces éléments prendra donc la forme d'une intégrale définie. On cherchera d'abord l'intégrale indéfinie de la fonction sous le signe $\int$; puis, à l'aide du théorème général du n° 257, on en déduira immédiate-

ment l'intégrale définie, et l'on aura l'expression de la grandeur que l'on voulait calculer.

C'est sous ce point de vue uniforme et entièrement rigoureux que nous présenterons les diverses applications du calcul intégral à la géométrie.

§ 1. QUADRATURE DES AIRES PLANES.

271. *Coordonnées rectilignes.* — Soit

$$y = f(x)$$

l'équation d'une courbe plane BM, rapportée à des axes OX, OY se coupant sous l'angle γ. Nous voulons calculer l'aire S comprise entre la courbe, l'axe des x, et deux ordonnées AB, MP. Décomposons cette aire en segments infiniment petits par des parallèles à l'axe des y : chacun de ces segments, tels que $mpp'm'$, peut être remplacé par le parallélogramme $mpp'q$, qui n'en diffère que d'une quantité infiniment petite par rapport à ce segment (32), et qui a pour expression



$$mp \sin \gamma \cdot pp' = y \sin \gamma \cdot \Delta x.$$

La limite de la somme des aires de ces parallélogrammes sera donc rigoureusement égale à l'aire cherchée ABMP, donc

$$S = lim\, \Sigma\, y \sin \gamma \cdot \Delta x;$$

ou bien, si l'on se rappelle la définition de l'intégrale définie et si l'on désigne par x_0, x les abscisses OA, OP,

$$(1) \qquad S = \sin \gamma \int_{x_0}^{x} y dx.$$

Lorsque les axes sont rectangulaires, il vient simplement

$$(2) \qquad S = \int_{x_0}^{x} y dx.$$

On obtient aussi ces formules en partant de l'expression de la différentielle dS, donnée au nº 141. Nous allons les appliquer à divers exemples.

272. *Parabole.* — L'équation de la parabole rapportée à un diamètre OX

et à la tangente OY au point O où ce diamètre coupe la courbe, a la forme

$$y^2 = 2kx, \qquad \text{ou} \qquad y = \sqrt{2k}\, x^{\frac{1}{2}}.$$

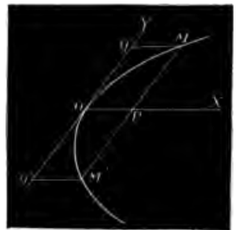
L'aire OMP, comprise entre la courbe, l'abscisse OP $= x$ et l'ordonnée MP $= y$, aura pour expression, d'après ce qui précède,

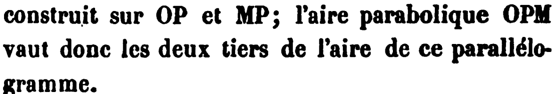
$$S = \sqrt{2k} \sin\gamma \int_0^x x^{\frac{1}{2}}\, dx = \sqrt{2k} \sin\gamma \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}},$$

ou encore, en vertu de l'équation de la courbe,

$$S = \frac{2}{3} xy \sin\gamma.$$

Mais le produit $xy \sin\gamma$ représente l'aire du parallélogramme OPQM





construit sur OP et MP; l'aire parabolique OPM vaut donc les deux tiers de l'aire de ce parallélogramme.

Prolongeons l'ordonnée MP jusqu'à sa rencontre en M′ avec la courbe : on voit sans peine que *surf.* OPM′ $=$ *surf.* OPM, et par suite, que *l'aire* MOM′ *comprise entre la parabole et une corde quelconque* MM′ *vaut les deux tiers du parallélogramme construit sur cette corde et sur sa flèche* OP.

273. *Segment circulaire.* — L'équation du cercle rapporté à deux diamètres rectangulaires étant

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

le segment compris entre deux ordonnées, qui répondent aux abscisses 0 et x, a pour valeur

$$S = \int_0^x dx \sqrt{a^2 - x^2}.$$

On trouve facilement, en posant $x = a \sin z$,

$$\int_0^x dx \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin\frac{x}{a}.$$

Il suffit, pour obtenir l'aire du quart de cercle, de faire dans cette formule $x = a$, et l'on trouve

$$S = \frac{\pi a^2}{4},$$

d'où résulte, pour l'aire totale du cercle, l'expression connue πa^2.

274. *Segment elliptique.* — L'équation de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donne, pour l'ordonnée positive, l'expression

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Le segment d'ellipse, terminé aux abscisses 0 et x, a donc pour valeur

$$S = \frac{b}{a}\int_0^x dx\sqrt{a^2 - x^2},$$

et est, au segment correspondant du cercle décrit sur le grand axe comme diamètre, dans le rapport de b à a. Il est donc connu par ce qui précède. On en déduit évidemment, pour l'aire totale de l'ellipse, l'expression πab.

275. *Hyperbole rapportée à ses asymptotes.* — L'équation de la courbe est, c désignant l'excentricité,

$$xy = \frac{c^2}{4}, \qquad \text{ou} \qquad y = \frac{c^2}{4x}.$$

On a donc, en appelant γ l'angle compris entre les asymptotes,

$$S = \frac{c^2}{4}\sin\gamma\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x} = \frac{c^2}{4}\sin\gamma\ \mathrm{l.}\left(\frac{x}{x_0}\right).$$

Cette expression deviendrait infinie si l'on supposait x_0 égal à zéro, c'est-à-dire si l'on comptait l'aire plane à partir de l'asymptote prise pour axe des y.

276. *Cycloïde.* — Les équations de cette courbe

$$x = a(\omega - \sin\omega), \qquad y = a(1 - \cos\omega),$$

donnent

$$y\,dx = a^2(1 - \cos\omega)^2 d\omega.$$

On trouve immédiatement

$$\int(1 - \cos\omega)^2 d\omega = \frac{3}{2}\omega - 2\sin\omega + \frac{1}{2}\sin\omega\cos\omega + C.$$

Si donc on compte l'aire S de la cycloïde depuis l'origine O où $\omega = 0$,

jusqu'à l'ordonnée MP qui correspond à l'angle ω, on aura

$$S = a^2\left(\frac{3}{2}\omega - 2\sin\omega + \frac{1}{2}\sin\omega\cos\omega\right).$$

Retranchons cette valeur de celle de l'aire du rectangle OPFG, qui est $2ax$ ou $2a^2(\omega - \sin\omega)$; le reste, qui exprime l'aire OMFG, sera



$$\frac{a^2}{2}(\omega - \sin\omega\cos\omega);$$

c'est précisément l'aire du segment AMQ formé, dans le cercle générateur, par la parallèle MQ à la base de la cycloïde. On a donc

$$surf.\ \mathrm{OMFG} = surf.\ \mathrm{AMQ}.$$

Pour $\omega = 2\pi$, on trouve $S = 3\pi a^2$: *l'aire totale comprise entre une arcade de cycloïde et sa base est donc équivalente à trois fois l'aire du cercle générateur.*

277. Cherchons l'aire comprise entre les axes coordonnés positifs, et la courbe qui a pour équation

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1,$$

m et n étant des constantes positives.

Tirant de l'équation la valeur de y, laquelle s'annule pour $x = a$, on obtient facilement

$$S = b\int_0^a \left(1 - \frac{x^m}{a^m}\right)^{\frac{1}{n}} dx,$$

ou, en posant $x = az^{\frac{1}{m}}$ et transformant,

$$S = \frac{ab}{m}\int_0^1 z^{\frac{1}{m}-1}(1-z)^{\frac{1}{n}}\,dz.$$

Faisons, pour plus de simplicité, $\frac{1}{m} = \mu$, $\frac{1}{n} = \nu$, et posons

$$z = \frac{u}{1+u};$$

il viendra enfin

$$S = ab\mu \int_0^\infty \frac{u^{\mu-1}du}{(1+u)^{\mu+\nu+1}}.$$

L'aire demandée est donc exprimée par cette intégrale définie, à laquelle on peut d'ailleurs appliquer les réductions que comportent les différentielles binômes. On a d'abord

$$\int \frac{u^{\mu-1}du}{(1+u)^{\mu+\nu+1}} = -\frac{u^{\mu-1}}{(\mu+\nu)(1+u)^{\mu+\nu}} + \frac{\mu-1}{\mu+\nu}\int \frac{u^{\mu-2}du}{(1+u)^{\mu+\nu}},$$

et

$$\int \frac{u^{\mu-2}du}{(1+u)^{\mu+\nu}} = \int \frac{u^{\mu-2}du}{(1+u)^{\mu+\nu+1}} + \int \frac{u^{\mu-1}du}{(1+u)^{\mu+\nu+1}}.$$

Observant d'ailleurs que le terme hors du signe $\int$ est nul pour $u = 0$ et $u = \infty$, si l'on a $\mu > 1$, il viendra facilement

$$(\alpha) \qquad \int_0^\infty \frac{u^{\mu-1}du}{(1+u)^{\mu+\nu+1}} = \frac{\mu-1}{\nu+1}\int_0^\infty \frac{u^{\mu-2}du}{(1+u)^{\mu+\nu+1}}.$$

Répétant plusieurs fois cette opération, et désignant par k le plus grand entier contenu dans μ, on aura évidemment

$$(\beta) \qquad S = ab\,\frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-k)}{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+k)}\int_0^\infty \frac{u^{\mu-k-1}du}{(1+u)^{\mu+\nu+1}}.$$

Si, par exemple, μ est un nombre entier $k+1$, la valeur de l'intégrale sera $(\mu+\nu)^{-1}$, et l'on aura

$$S = ab\,\frac{1\cdot 2\cdots \mu}{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+\mu)}.$$

Lorsque l'exposant μ est moindre que 1, on peut réduire l'intégrale comme il suit. On a

$$\int_0^\infty \frac{u^{\mu-1}du}{(1+u)^{\mu+\nu+1}} = \int_0^\infty \frac{u^{\mu-1}du}{(1+u)^{\mu+\nu}} - \int_0^\infty \frac{u^{\mu}du}{(1+\mu)^{\mu+\nu+1}},$$

et, d'après la formule (α),

$$\int_0^\infty \frac{u^{\mu}du}{(1+u)^{\mu+\nu+1}} = \frac{\mu}{\nu}\int_0^\infty \frac{u^{\mu-1}du}{(1+u)^{\mu+\nu+1}},$$

d'où

$$\int_0^\infty \frac{u^{\mu-1}du}{(1+u)^{\mu+\nu+1}} = \frac{\nu}{\mu+\nu}\int_0^\infty \frac{u^{\mu-1}du}{(1+u)^{\mu+\nu}}.$$

L'application répétée de cette formule conduira, *si* $\mu+\nu$ *est entier*, à la relation

$$\int_0^\infty \frac{u^{\mu-1}du}{(1+u)^{\mu+\nu+1}} = \frac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-\overline{\mu+\nu-1})}{(\mu+\nu)(\mu+\nu-1)\cdots 1}\int_0^\infty \frac{u^{\mu-1}du}{1+u}.$$

et, comme nous avons trouvé la valeur de cette intégrale définie égale à $\frac{\pi}{\sin\mu\pi}$, nous aurons définitivement

$$(\gamma)\qquad \int_0^\infty \frac{u^{\mu-1}du}{(1+u)^{\mu+\nu+1}} = \frac{\nu(\nu-1)\cdots(1-\mu)}{1\cdot 2\cdots(\mu+\nu)}\,\frac{\pi}{\sin\mu\pi}.$$

Enfin, si l'on avait à la fois $\mu+\nu$ entier, et μ compris entre deux nombres entiers consécutifs k et $k+1$, on combinerait les formules (β) et (γ), et l'on aurait pour l'expression de l'aire cherchée

$$S = ab\,\frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-k)}{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+k)}\,\frac{(\nu+k)(\nu+k-1)\cdots(k-\mu+1)}{1\cdot 2\cdots(\mu+\nu)}\,\frac{\pi}{\sin(\mu-k)\pi},$$

ou

$$S = ab\,\frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-k)\nu(\nu-1)\cdots(k-\mu+1)}{1\cdot 2\cdots(\mu+\nu)}\,\frac{\pi}{\sin(\mu-k)\pi}.$$

Dans le cas de l'ellipse, $\mu=\nu=\frac{1}{2}$, $\mu+\nu=1$, et

$$S = \frac{ab}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi ab}{4}.$$

Si l'on considère la courbe

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

on fera

$$m=n=\frac{2}{3},\qquad \mu=\nu=\frac{3}{2},\qquad \mu+\nu=3,\qquad k=1,$$

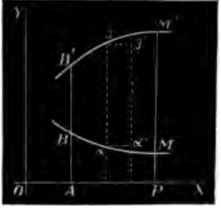
et l'on aura

$$S = \frac{3\pi ab}{32};$$

l'aire totale de la courbe serait égale à quatre fois ce résultat, ou à

$$\frac{3}{8}\pi ab.$$

278. ***Remarques.*** — 1° Il peut se faire que l'on ait à chercher l'aire comprise entre deux courbes BM, B'M', et deux parallèles à l'axe des y. Dans ce cas, si l'on désigne par y_0, y les ordonnées respectives des courbes BM, B'M', qui seront des fonctions données de x, on verra comme précédemment que l'élément infinitésimal de l'aire cherchée est un rectangle $\alpha\beta\beta'\alpha'$ (les axes étant supposés rectangulaires), dont l'expression est



$$(y - y_0)\,\Delta x\,;$$

en sorte que, x_0 et x étant toujours les abscisses extrêmes, l'aire cherchée sera

$$(3) \qquad S = \int_{x_0}^{x} (y - y_0)\,dx.$$

Si les axes étaient obliques, l'intégrale serait multipliée par $\sin\gamma$.

2° Dans les formules de quadrature, conformément à une remarque déjà faite au n° 141, y désigne la valeur absolue de l'ordonnée de la courbe, sans quoi l'on trouverait des valeurs négatives pour les aires situées au-dessous de l'axe des x, et lorsque la courbe traverse plusieurs fois cet axe, l'intégrale fournirait la somme *algébrique* des aires comprises entre l'axe des x et la courbe, au lieu de leur somme *arithmétique*, que l'on cherche d'ordinaire. Soit, par exemple, à trouver l'aire de la logarithmique

$$y = a\,\mathrm{l}.\,x,$$

entre $x = 0$ et $x > 1$. y est négatif depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, nul pour $x = 1$, positif pour $x > 1$. L'aire cherchée se composera donc d'une première partie OBA, savoir

$$\int_0^1 (-y)\,dx = -a\int_0^1 \mathrm{l}.\,x\,dx = -a\left(x\,\mathrm{l}.\,x - x\right)_0^1 = a,$$

et d'une seconde partie APM correspondante à y positif, savoir

$$\int_1^x y\,dx = a\left(x\,\mathrm{l}.\,x - x\right)_1^x = a\,(x\,\mathrm{l}.\,x - x + 1).$$

La première partie nous offre un exemple d'un espace non fermé OBA, qui possède pourtant une étendue finie a (car la courbe a pour asymptote l'axe des y négatifs).

5° Il y a un autre cas où l'on doit partager en plusieurs parties l'intervalle de l'intégration : c'est lorsque le contour qui limite l'aire est composé d'arcs de courbes différentes. On voit assez ce qu'il y aurait à faire.

Exercices.

1. Aire de l'hyperbole entre la courbe, l'axe réel et une ordonnée quelconque y :

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2};\qquad x_0=a;\qquad S=\frac{xy}{2}-\frac{ab}{2}\,\text{l.}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right).$$

2. Aire de la chaînette comptée de l'axe de la courbe :

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right);\qquad x_0=0;\qquad S=\frac{a^2}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

3. Aire comprise entre l'axe des x, la courbe

$$y=\frac{bx}{\sqrt{2ax-x^2}},$$

et son asymptote $x=2a$. R. $S=\pi ab$.

4. Démontrer que l'aire comprise dans l'intérieur d'une courbe fermée a pour expression

$$\int y\,ds\cos\varphi,$$

l'intégrale s'étendant à tout le contour de la courbe, et l'angle φ que fait la tangente avec l'axe des x se rapportant à la direction du mouvement. La courbe peut être coupée par les parallèles à l'axe des y en un nombre quelconque de points.

279. *Coordonnées polaires.* — Pour évaluer l'aire S du secteur compris entre une courbe qui a pour équation, en coordonnées polaires,

$$r=f(\theta),$$

et deux rayons vecteurs OA, OM de cette courbe, on partagera cette aire en secteurs infiniment petits par des rayons vecteurs. On remplacera chacun de ces éléments par un secteur circulaire (142) qui n'en diffère que d'une quantité infiniment petite du second ordre, et qui a pour expression $\frac{1}{2}r^2\Delta\theta$, et l'on aura

$$S=\frac{1}{2}\,lim\,\Sigma r^2\Delta\theta,$$

ou, en appelant θ_0 et θ les valeurs de l'angle polaire qui répondent aux rayons OA, OM,

$$(1)\qquad S=\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta} r^2 d\theta.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer r par sa valeur $f(\theta)$ et à effectuer l'intégration.

280. *Folium de Descartes.* — L'équation

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0,$$

transformée à l'aide des relations $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, donne pour l'équation polaire de la courbe et pour l'aire du secteur commençant à l'axe polaire

$$r = \frac{3a\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\theta + \cos^3\theta}, \qquad S = \frac{9a^2}{2}\int_0^\theta \frac{\sin^2\theta\cos^2\theta\, d\theta}{(\sin^3\theta + \cos^3\theta)^2}.$$

Pour intégrer, on divise haut et bas par $\cos^6\theta$, on pose $\operatorname{tg}^3\theta = z$, et l'on trouve

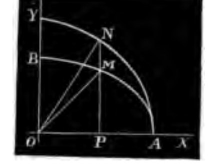
$$S = \frac{3a^2}{2}\int_0^z \frac{dz}{(1+z)^2} = -\frac{3a^2}{2}\left(\frac{1}{1+z}\right)_0^z = \frac{3a^2\operatorname{tg}^3\theta}{2(1+\operatorname{tg}^3\theta)}.$$

On peut écrire encore, x et y étant les coordonnées du point (r, θ) :

$$S = \frac{3a^2}{2}\,\frac{y^3}{x^3+y^3} = \frac{ay^2}{2x}.$$

En faisant θ égal à $90°$, on aura l'aire de la *feuille,* qui sera $\frac{3}{2}a^2$.

281. *Secteur elliptique.* — $OA = a$, $OB = b$ étant les demi-axes, décrivons un cercle sur le grand axe comme diamètre, et soit N le point de ce cercle qui se projette sur OA au même point P que le point M (r, θ) de l'ellipse; soit u l'angle BON. On a évidemment



$$x = r\cos\theta = a\sin u, \qquad y = r\sin\theta = \frac{b}{a}NP = b\cos u,$$

et, en différentiant,

$$dr\cos\theta - r\sin\theta d\theta = a\cos u\, du, \qquad dr\sin\theta + r\cos\theta d\theta = -b\sin u\, du.$$

Éliminant dr, on a

$$r\,d\theta = -(a\cos u\sin\theta + b\sin u\cos\theta)\,du = -ab\,\frac{\cos^2 u + \sin^2 u}{r}\,du,$$

d'où

$$r^2 d\theta = -ab\,du.$$

L'aire du secteur elliptique BOM a donc pour expression

$$S = \frac{1}{2}\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\theta = -\frac{ab}{2}\int_{u}^{0} du = \frac{abu}{2}.$$

282. Si l'on avait à déterminer l'aire comprise entre deux courbes données AM, A'M', et deux rayons vecteurs OAA', OMM' coupant ces deux courbes, on verrait facilement que cette aire a pour expression

$$S = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta} (r^2 - r_0^2)\, d\theta,$$

r, r_0 désignant respectivement les rayons vecteurs de ces courbes exprimés en fonction de l'angle polaire, et θ_0, θ les angles polaires correspondants aux rayons extrêmes.

Exercices.

1. *Lemniscate de Bernoulli :* secteur compté à partir de l'axe polaire.

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta; \qquad \theta_0 = 0; \qquad S = \frac{a^2}{4} \sin 2\theta.$$

Aire totale de la courbe : $\quad S = a^2$.

2. *Spirale logarithmique.*

$$r = ae^{m\theta}; \qquad S = \frac{a^2}{4m}(e^{2m\theta} - e^{2m\theta_0}).$$

3. *Développante de cercle* (Voir ch. XIII, § II, ex. 6); secteur compté de l'axe polaire.

$$r^2 = a^2(1 + \omega^2), \qquad \theta = \omega - \text{arc tg}\,\omega; \qquad \theta_0 = 0, \qquad \omega = 0.$$

$$surf.\ \text{AOM} = S = \frac{a^2\omega^3}{6}.$$

Cette aire est le tiers de celle du triangle compris entre le rayon vecteur OM, le rayon du cercle OR prolongé, et la perpendiculaire au rayon vecteur en M.

4. *Podaire de l'ellipse par rapport à son centre.*

$$r^2 = a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta; \qquad \theta_0 = 0;$$

$$S = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)\,\theta + \frac{1}{4}(a^2 - b^2)\sin\theta\cos\theta.$$

L'aire totale de cette courbe fermée est la moitié de celle du cercle qui a pour rayon la droite joignant les sommets du grand et du petit axe.

5. *Lieu des projections du centre de l'ellipse sur ses normales.*

$$r = \frac{(a^2 - b^2)\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{a^2\sin^2\theta^2 + b^2\cos^2\theta}}; \qquad \theta_0 = 0;$$

$$S = \frac{a^2 + b^2}{4}\theta + \frac{a^2 - b^2}{4}\sin\theta\cos\theta - \frac{ab}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg}\theta\right).$$

L'aire totale de la courbe, composée de quatre feuilles égales, vaut

$$\frac{\pi}{2}(a-b)^2.$$

6. Soit S l'aire d'une courbe fermée, S' celle de sa podaire par rapport à un point intérieur, r le rayon vecteur mené de ce point à la courbe donnée, $d\varphi$ l'angle de contingence de celle-ci; on a

$$2S' = S + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\varphi.$$

7. Une corde de longueur constante $c + c'$ se meut, en s'appuyant par ses extrémités sur une courbe fermée donnée. L'aire comprise entre la courbe et celle que décrit le point M qui partage la corde en deux segments c et c', a pour expression

$$\pi cc',$$

quelle que soit la courbe donnée.

§ II. RECTIFICATION DES COURBES.

A. *Courbes planes.*

282. L'équation d'une courbe plane étant donnée en coordonnées rectangulaires,

$$y = f(x),$$

pour calculer la longueur s d'un arc de cette courbe, compté d'une origine fixe A jusqu'à un point M, on partagera cet arc en éléments infiniment petits. Un de ces éléments, correspondant à un accroissement Δx de la variable x, aura pour expression

$$\Delta x \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}},$$

en négligeant une quantité d'ordre supérieur à Δx. La longueur s de l'arc sera donc égale à

$$lim\, \Sigma\, \Delta x \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}},$$

d'où, en désignant par x_0, x les abscisses des points A, M, on aura

$$(1) \qquad s = \int_{x_0}^{x} dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Si l'équation de la courbe est donnée en coordonnées polaires, l'élément de l'arc aura pour expression

$$\Delta\theta\sqrt{r^2+\frac{dr^2}{d\theta^2}},$$

d'où, θ_0 et θ désignant les valeurs de l'angle polaire qui répondent aux extrémités A et M de l'arc,

$$(2) \qquad s=\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta\sqrt{r^2+\frac{dr^2}{d\theta^2}}.$$

Appliquons ces formules à quelques exemples.

284. *Parabole.* — L'équation de la courbe étant mise sous la forme

$$x^2=2py \qquad \text{ou} \qquad y=\frac{x^2}{2p},$$

on aura

$$ds=\frac{dx}{p}\sqrt{p^2+x^2},$$

et comme

$$\int dx\sqrt{p^2+x^2}=p^2\int\frac{dx}{\sqrt{p^2+x^2}}+\int\frac{x^2dx}{\sqrt{p^2+x^2}}$$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{p^2+x^2}+\frac{p^2}{2}\,\text{l.}\,(x+\sqrt{p^2+x^2})+\text{C},$$

si l'on prend le sommet A de la courbe pour origine de l'arc, on devra faire $\text{C}=-\frac{p^2}{2}\,\text{l.}\,p$, pour que l'intégrale s'annule pour $x=0$; donc

$$s=\frac{x}{2}\sqrt{p^2+x^2}+\frac{p^2}{2}\,\text{l.}\left(\frac{x+\sqrt{p^2+x^2}}{p}\right).$$

285. *Ellipse.* — En exprimant les coordonnées (x, y) de la courbe au moyen de l'angle u, défini au n° 281, nous avons trouvé

$$x=a\sin u, \qquad y=b\cos u,$$

d'où

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=du\sqrt{a^2\cos^2 u+b^2\sin^2 u},$$

ou, en désignant par $a\varepsilon=\sqrt{a^2-b^2}$ l'excentricité de l'ellipse,

$$ds=a\,du\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 u}.$$

L'arc BM, compté du sommet B du petit axe jusqu'à un point M correspondant à l'angle u, aura donc pour expression

$$s = a \int_0^u du \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 u}.$$

Cette intégrale est une transcendante nouvelle, dite *fonction elliptique de seconde espèce*. Pour la développer en série, nous observerons que ε est < 1, d'où

$$(1 - \varepsilon^2 \sin^2 u)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \sin^2 u - \frac{1}{2\cdot 4}\varepsilon^4 \sin^4 u - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\varepsilon^6 \sin^6 u - \cdots,$$

d'où nous tirerons la série convergente

$$s = a\left(u - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \int_0^u \sin^2 u\, du - \frac{1}{2\cdot 4}\varepsilon^4 \int_0^u \sin^4 u\, du - \cdots\right).$$

Comme on sait obtenir sous forme finie les intégrales qui figurent dans ce développement, l'arc d'ellipse peut être considéré comme exprimé par une série connue. Pour avoir le quart du périmètre de l'ellipse, on devra poser $u = \frac{\pi}{2}$ dans cette égalité, et, d'après la formule connue (266)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} u\, du = \frac{1\cdot 3 \cdots (2m-1)}{2\cdot 4 \cdots 2m}\,\frac{\pi}{2},$$

il viendra

$$s = \frac{\pi a}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon^2 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{\varepsilon^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \frac{\varepsilon^6}{5} - \cdots\right].$$

Cette série sera d'autant plus convergente que l'excentricité ε sera plus petite. Pour $\varepsilon = 0$, elle se réduira à $\frac{\pi a}{2}$, longueur du quart de la circonférence de rayon a, comme cela devait être.

286. *Cycloïde.* — Les équations de la courbe donnent facilement

$$ds = a\,d\omega \sqrt{(1 - \cos\omega)^2 + \sin^2\omega} = a\,d\omega \sqrt{2(1 - \cos\omega)},$$

$$s = 2a \int_{\omega_0}^{\omega} \sin\frac{\omega}{2}\, d\omega = 4a\left(\cos\frac{\omega_0}{2} - \cos\frac{\omega}{2}\right).$$

On en déduit sans peine la propriété indiquée au ch. XVI (ex. 3). La

longueur totale d'une arcade de cycloïde s'obtient en faisant $\omega_0 = 0$, $\omega = 2\pi$, et a pour valeur $8a$, c'est-à-dire *quatre fois le diamètre du cercle générateur.*

287. *Cardioïde :* $r = 2a(1 + \cos\theta)$.

On a successivement

$$\frac{dr}{d\theta} = -2a\sin\theta, \qquad ds = 2ad\theta\sqrt{(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} = 4a\cos\frac{\theta}{2}d\theta,$$

et par suite, pour l'arc compté à partir du sommet $\theta = 0$,

$$s = 8a\sin\frac{\theta}{2}.$$

Le périmètre total de la courbe a pour mesure $16a$.

288. *Lemniscate.* — La courbe a pour équation

$$r^2 = a^2\cos 2\theta.$$

On a donc

$$r\,dr = -a^2\sin 2\theta\, d\theta, \qquad ds = d\theta\sqrt{a^2\cos 2\theta + \frac{a^4\sin^2 2\theta}{r^2}} = \frac{a\,d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}.$$

L'arc s, commençant au sommet A pour lequel on a $\theta = 0$, et se terminant au point $M(r, \theta)$, a donc pour expression

$$s = a\int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}.$$

Cette intégrale se ramène à une fonction elliptique de première espèce, en posant

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin u, \qquad \cos\theta\, d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos u\, du,$$

$$\sqrt{\cos 2\theta} = \sqrt{1 - 2\sin^2\theta} = \sqrt{1 - \sin^2 u} = \cos u,$$

d'où

$$s = \frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 u}}.$$

La lemniscate jouit d'une propriété remarquable : quoiqu'on ne puisse exprimer ses arcs sous forme finie, on peut assigner une relation simple

entre les extrémités d'arcs égaux. Etablissons, entre deux points M et M', la relation

$$\cos\theta\cos\theta' = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

nous aurons successivement

$$\cos\theta' = \frac{1}{\sqrt{2}\cos\theta}, \quad d\theta' = -\frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{2}\cos^2\theta\sqrt{1-\cos^2\theta'}} = -\frac{\sin\theta\, d\theta}{\cos\theta\sqrt{2\cos^2\theta - 1}},$$

$$\cos 2\theta' = 2\cos^2\theta' - 1 = \frac{1}{\cos^2\theta} - 1 = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta},$$

$$\frac{d\theta'}{\sqrt{\cos 2\theta'}} = -\frac{d\theta}{\sqrt{2\cos^2\theta - 1}} = -\frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}.$$

L'arc OM', compté du centre O jusqu'au point M' qui répond à l'angle θ', a pour expression, d'après ce qu'on a vu ci-dessus,

$$a\int_{\theta'}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta'}{\sqrt{\cos 2\theta'}} = -a\int_{\theta}^{0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} = a\int_{0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}},$$

d'où l'on voit que les arcs AM, OM' de la lemniscate, terminés à deux points M et M' entre lesquels existe la relation indiquée, sont égaux entr'eux.

Exercices.

1. *Chaînette.* — L'équation de la courbe est

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

L'arc s, commençant au point le plus bas, a pour expression

$$s = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) = a \operatorname{tg}\varphi = \sqrt{y^2 - a^2},$$

φ étant l'inclinaison de la tangente à l'extrémité de l'arc, sur l'axe des x (voir ch. XVI, ex. 2).

2. *Hyperbole:* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. En posant

$$\sqrt{a^2 + b^2} = a\varepsilon, \qquad x = \frac{a}{\cos u},$$

on trouvera pour l'expression de la longueur de l'arc, compté à partir du sommet réel,

$$s = a\varepsilon\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}\sqrt{1 - \frac{\cos^2\varphi}{\varepsilon^2}},$$

ou, par le développement en série ($\varepsilon > 1$),

$$s = a\varepsilon \operatorname{tg} \varphi - \frac{a}{\varepsilon}\left[\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2}\frac{1}{4\varepsilon^2}\int_0^{\varphi} \cos^2 \varphi d\varphi + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{6\varepsilon^4}\int_0^{\varphi} \cos^4 \varphi d\varphi + \cdots\right]$$

La différence entre l'arc d'hyperbole et la longueur de l'asymptote terminée à la même ordonnée, tend vers la limite finie

$$\frac{\pi a}{4\varepsilon}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{2\varepsilon^2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{1}{3\varepsilon^4} + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \frac{1}{4\varepsilon^6} + \cdots\right],$$

lorsque x croît indéfiniment.

3. *Spirale logarithmique :* $r = ae^{m\theta}$.

Arc compté du pôle ($\theta_0 = -\infty$) :

$$s = \frac{a\sqrt{1+m^2}}{m} e^{m\theta} = \frac{\sqrt{1+m^2}}{m} r.$$

4. *Développante du cercle* (ch. XIII, § 2, ex. 6) :

$$r^2 = a^2(1+\omega^2), \qquad d\theta = \frac{\omega^2 d\omega}{1+\omega^2}, \qquad s = \frac{a\omega^2}{2}.$$

L'arc AM égale la moitié de RQ, Q étant la rencontre de OR avec QM perpendiculaire à OM.

5. *Spirale d'Archimède :* $r = a\theta$; $\theta_0 = 0$,

$$s = \frac{a}{2}[\theta\sqrt{1+\theta^2} + \text{l.}(\theta + \sqrt{1+\theta^2})].$$

6. *Sinusoïde :* $y = \sin x$; $x_0 = 0$.

$$s = \sqrt{2}\int_0^x dx \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 x}.$$

La longueur d'un arc compris entre deux rencontres de la courbe avec l'axe des x est celle d'un quart d'ellipse dont le demi grand axe est $\sqrt{2}$, et l'excentricité 1.

7. $r = \frac{a}{2}(\theta^2 - 1)$; arc compté à partir de $\theta = 0$:

$$s = \frac{a\theta}{2}\left(\frac{\theta^2}{3} + 1\right).$$

8. Démontrer que dans la courbe

$$3y = x^3,$$

si l'on appelle s, s', s'', s''' les arcs comptés de l'origine aux points qui ont pour abscisses x, x', x'', x''', et t, t', t'', t''' les longueurs des tangentes correspondantes à ces points, et si l'on pose les relations

$$x x''' = 1, \qquad x' x'' = 1,$$

on aura

$$(s''' - s'') - (s' - s) = (t''' - t'') - (t' - t).$$

9. Démontrer que si l'on prend sur l'ellipse deux points M et M', tels que les angles u

correspondants (voir n° 281) satisfassent à la relation

$$\operatorname{tg} u \operatorname{tg} u' = \frac{a}{b},$$

1° la distance l du point de contact à la projection du centre sur la tangente, aura la même valeur pour ces deux points; 2° les arcs BM, AM' compris respectivement entre chacun de ces points et les sommets de l'ellipse satisfont à la relation

$$\mathrm{BM} - \mathrm{AM'} = l;$$

3° On a la relation

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2 u}} + \int_0^{u'} \frac{du'}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2 u'}} = const.$$

B. *Courbes à double courbure.*

289. La longueur s de l'arc d'une courbe gauche, compté d'un point fixe A à un point quelconque M, est la limite d'une somme d'éléments infiniment petits dont l'expression, en supposant les axes rectangulaires et raisonnant comme pour les courbes planes, est celle-ci :

$$\Delta x \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}}.$$

On aura donc, x_0 et x correspondant aux points A, M,

$$(3) \qquad s = \int_{x_0}^{x} dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}};$$

il est bien évident que la variable indépendante x pourra être remplacée par toute autre variable convenable.

290. *Application.* — La courbe représentée par les équations

$$x = a \sin \frac{y}{a}, \qquad z = \frac{a}{4}\,\mathrm{l.}\,\frac{a+x}{a-x}$$

est l'intersection de deux cylindres, dont l'un est parallèle à l'axe des z, l'autre à l'axe des y. On a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{a^2}{2}\,\frac{1}{a^2 - x^2};$$

Donc ici

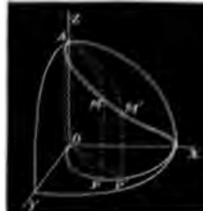
$$ds = dx \sqrt{1 + \frac{a^2}{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{4(a^2 - x^2)^2}} = \frac{dx}{2}\,\frac{a^2 + 2(a^2 - x^2)}{a^2 - x^2},$$

et, en faisant commencer l'arc à l'origine des axes,

$$s = x + \frac{a^2}{2}\int_0^x \frac{dx}{a^2 - x^2} = x + z.$$

Exercices.

1. Intersection d'une sphère et d'un cylindre droit, qui a pour base le cercle décrit sur un rayon de la sphère comme diamètre (chap. XXIII, ex. 2).



$$x = \sin^2 \omega, \qquad y = \sin\omega \cos\omega, \qquad z = \cos\omega.$$

R. $$s = \sqrt{2}\int_0^\omega d\omega \sqrt{1 - \frac{1}{2}\cos^2\omega}.$$

La longueur d'une branche fermée AMXA, égale à la moitié du périmètre total de la courbe, est égale à la longueur d'une arcade entière de la sinusoïde (*voir ci-dessus*).

2. Intersection des deux cylindres

$$y = \frac{x^2}{2a}, \qquad z = \frac{x^3}{6a^2}.$$

R. L'arc étant compté de l'origine, on a

$$s = x + \frac{x^3}{6a^2} = x + z.$$

3. Intersection des deux cylindres

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad x = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}}\right),$$

l'arc étant compté du sommet de l'hyperbole représentée par la première équation.

R. On trouve

$$s = \varepsilon\sqrt{x^2 - a^2}, \qquad a\varepsilon = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

4. L'équation d'une courbe sur la sphère étant donnée au moyen des coordonnées ρ et ω (ch. XX, ex. 4), chercher l'expression de l'arc compté à partir de l'angle $\omega = 0$, et appliquer la formule à la *loxodromie* qui a pour équation

$$\operatorname{tg}\frac{\rho}{2} = e^{k\omega}.$$

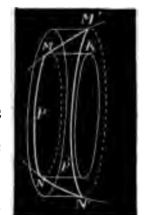
R. $$s = \int_0^\omega d\omega \sqrt{\sin^2\rho + \frac{d\rho^2}{d\omega^2}}; \qquad s = \frac{\sqrt{1 + k^2}}{k}(\rho - \rho_0).$$

CHAPITRE XXXIII.

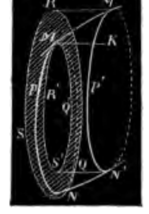
SUITE DES APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

§ 1. CUBATURE DES SOLIDES.

291. Proposons-nous d'évaluer le volume compris sous une surface donnée, dont les sections parallèles à un plan donné sont des courbes fermées, entre deux plans parallèles au plan donné. Pour cela, nous décomposerons d'abord ce volume en tranches infiniment minces par des plans parallèles aux plans extrêmes; soit MPNM'P'N' une de ces tranches. Considérons les deux cylindres qui ont respectivement pour bases les deux sections MPN, M'P'N' entre lesquelles la tranche est comprise, et pour hauteur commune la distance infiniment petite MK de ces sections. Le volume de la tranche sera compris entre les volumes des deux cylindres, et comme ceux-ci ont même hauteur, leurs volumes sont entr'eux comme les aires des sections MPN, M'P'N'; le rapport de ces volumes a donc pour limite l'unité, et par suite, il en est de même du rapport du volume de la tranche à celui de l'un des deux cylindres. D'où il suit que le volume du solide proposé est égal, rigoureusement, à la limite de la somme des volumes des cylindres, qui ont pour bases les sections MPN, et pour hauteurs les distances infiniment petites de ces sections.



Ce raisonnement suppose implicitement que tous les points de la surface proposée, compris entre les plans MPN, M'P'N', tombent dans l'un des cylindres, et hors de l'autre; mais si cette condition n'était pas remplie, le résultat ne serait pas changé. En effet, si l'on projette chacun des points de la surface latérale de la tranche, sur le plan de la section MPN, toutes ces projections tomberont dans un certain espace, qui sera limité extérieurement par un contour RSQ, et intérieurement par un contour R'S'Q'. Considérant les deux cylindres qui ont pour bases respectives les contours RSQ, R'S'Q', et pour hauteur commune l'épaisseur MK de la tranche, on verra immédiatement 1° que le volume de la tranche MPNM'P'N' est compris nécessairement entre ceux des cylindres; 2° que le rapport du volume de l'un quelconque de ces cylindres, au



volume du cylindre de même hauteur qui a pour base la section MPN, a pour limite l'unité. D'où il suit que les volumes de la tranche et de ce dernier cylindre ont encore pour limite de leur rapport l'unité, etc.

Cela posé, concevons que les plans sécants soient normaux à l'axe des x. L'aire de la section MPN qui répond à une valeur donnée de x, sera évidemment une fonction $\varphi(x)$ de cette variable, et la distance MK de cette section à la suivante étant désignée par Δx, on aura pour le volume du cylindre élémentaire $\varphi(x)\Delta x$, et pour le volume cherché

$$V = lim\, \Sigma\, \varphi(x)\Delta x;$$

ou bien, x_0 et x étant les valeurs de x qui correspondent aux deux sections extrêmes,

$$(1) \qquad V = \int_{x_0}^{x} \varphi(x)\, dx.$$

Si donc la fonction $\varphi(x)$ est immédiatement connue par la nature de la surface, la cubature du solide proposé dépendra d'une simple intégration.

292. *Exemples.* — L'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

est coupé, par un plan x quelconque (1), suivant une ellipse dont les demi-axes sont

$$b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \qquad c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}};$$

d'après l'expression connue de l'aire de l'ellipse, on aura donc

$$\varphi(x) = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right),$$

et si l'on prend $x_0 = 0$,

$$V = \pi bc \int_0^x \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi bc\left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right).$$

Tel est le volume de l'ellipsoïde, entre le plan principal $x = 0$ et un plan x quelconque. Faisant $x = a$ et doublant, on aura le volume total de l'ellipsoïde

$$2\pi bc\left(a - \frac{a}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi abc.$$

---

(1) C'est-à-dire par un plan parallèle à YZ, et correspondant à une valeur x de l'abscisse.

Le cylindre qui a pour base l'ellipse dont les axes sont $2a$ et $2b$, et pour hauteur le troisième axe $2c$, a pour volume $2\pi abc$: *le volume de l'ellipsoïde est donc les deux tiers du volume du cylindre circonscrit.*

293. *Paraboloïde elliptique.* — L'équation de la surface étant

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2x,$$

la section faite par un plan parallèle à YZ et mené à la distance x de ce plan, est une ellipse dont les demi-axes sont $b\sqrt{2x}$, $c\sqrt{2x}$, et l'aire

$$\varphi(x) = 2\pi bcx.$$

On trouve donc, pour le volume du solide compris entre cette surface et un plan x perpendiculaire à l'axe,

$$V = 2\pi bc \int_0^x x\,dx = \pi bcx^2.$$

C'est la moitié du volume du cylindre elliptique qui a pour base la section faite par le plan x, et pour hauteur la distance du sommet du paraboloïde à ce plan.

294. Volume compris entre le plan XY, le plan $z = \alpha$, et la surface qui a pour équation

$$(x^2 + y^2)^2 (a^2 + z^2) - (y^2 - x^2)(z^2 - a^2) z^2 - 4axyz^3 = 0.$$

La section faite par un plan quelconque z est projetée sur le plan XY, en vraie grandeur, suivant une courbe dont l'équation peut s'écrire

$$(x^2 + y^2)^2 \left(1 + \frac{a^2}{z^2}\right) - z^2 (y^2 - x^2) \left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) - 4xyz^2 \frac{a}{z} = 0.$$

Si l'on pose $\frac{a}{z} = \operatorname{tg} \zeta$, cette équation devient

$$(x^2 + y^2)^2 - z^2 (y^2 - x^2) \cos 2\zeta - 2xyz^2 \sin 2\zeta = 0,$$

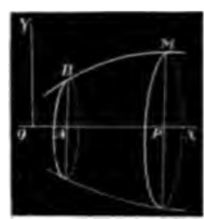
ou, en coordonnées polaires,

$$r^2 - z^2 \cos 2(\theta - \zeta) = 0.$$

C'est une lemniscate dont le demi axe est z et dont l'aire totale, d'après ce que nous avons vu, est égale à z^2. On a donc ici

$$\varphi(z) = z^2, \qquad V = \int_0^\alpha z^2\,dz = \frac{\alpha^3}{3}.$$

295. *Solides de révolution.* — Une courbe plane BM, donnée par son équation $y = f(x)$, tourne autour d'un axe OX situé dans son plan, et engendre une surface de révolution. On veut évaluer le volume compris sous cette surface, entre deux plans perpendiculaires à l'axe, et passant par les points A et P. La section correspondante au plan x est ici un cercle, qui a pour rayon l'ordonnée y de la courbe génératrice. On a donc



$$\varphi(x) = \pi y^2,$$

et, en désignant par x_0 et x les abscisses des points A et P,

$$V = \pi \int_{x_0}^{x} y^2 dx. \tag{2}$$

Telle est la formule de cubature des solides de révolution. Considérons, comme exemple, la surface engendrée par la cycloïde

$$x = a(\omega - \sin\omega), \qquad y = a(1 - \cos\omega).$$

Nous aurons

$$y^2 dx = a^3 (1 - \cos\omega)^3 d\omega = a^3 (1 - 3\cos\omega + 3\cos^2\omega - \cos^3\omega)\, d\omega.$$

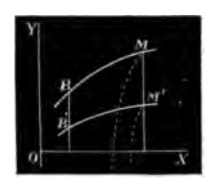
Supposons que l'une des limites du solide réponde à l'origine de la courbe : x_0 sera nul, ainsi que la valeur correspondante de ω, donc

$$V = \pi a^3 \int_0^{\omega} (1 - 3\cos\omega + 3\cos^2\omega - \cos^3\omega)\, d\omega$$

$$= \pi a^3 \left(\frac{5}{2}\omega - 4\sin\omega + \frac{3}{2}\sin\omega\cos\omega + \frac{1}{3}\sin^3\omega\right).$$

Le volume correspondant à une arcade entière de cycloïde s'obtiendra en posant $\omega = 2\pi$, et vaudra $5\pi^2 a^3$.

296. L'aire génératrice pourrait être comprise entre deux courbes BM, B'M', placées du même côté de l'axe des x; la section transversale du solide serait alors un *anneau circulaire*, ayant pour rayons intérieur et extérieur respectivement les ordonnées y_0 et y des courbes B'M', BM. Donc on aurait



$$\varphi(x) = \pi(y^2 - y_0^2), \qquad V = \pi \int_{x_0}^{x} (y^2 - y_0^2)\, dx.$$

On remplacera y_0 et y par leurs valeurs en fonction de x et l'on intègrera.

Supposons, par exemple, que le cercle

$$x^2 + (y - c)^2 = a^2, \qquad c > a,$$

soit la courbe génératrice. On tire de l'équation

$$y = c \pm \sqrt{a^2 - x^2},$$

et par suite, on a dans le cas actuel

$$y_0 = c - \sqrt{a^2 - x^2}, \qquad y = c + \sqrt{a^2 - x^2},$$

d'où

$$y^2 - y_0^2 = 2\sqrt{a^2 - x^2} \cdot 2c = 4c\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Donc, le volume du *tore* engendré par la révolution de ce cercle autour de l'axe des x, entre les plans $x = 0$ et x, a pour expression

$$V = 4\pi c \int_0^x dx \sqrt{a^2 - x^2} = 2\pi c\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}\right).$$

On déduit facilement de là que le volume total du tore est égal à $2\pi^2 ca^2$.

Il faut bien remarquer que si le cercle générateur était coupé par l'axe OX, ce qui aurait lieu si c était $< a$, le volume à évaluer se composerait de deux parties : l'une, dont la section est un cercle ayant son centre sur l'axe et son rayon égal à l'ordonnée $c + \sqrt{a^2 - x^2}$, se calculerait par la première formule; l'autre, dont la section est un anneau circulaire, se calculerait par la seconde formule.

297. *Remarque.* — Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que la fonction $\varphi(x)$, qui exprime l'aire de la section normale à l'axe des x dans le solide à évaluer, était donnée *a priori* par la nature de la surface. Quand cette condition n'est pas remplie, le problème des cubatures exige une double intégration, comme nous le verrons plus loin.

Exercices.

1. Volume compris entre l'hyperboloïde gauche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

et les plans $z = 0$, $z = c$.

R. $V = \frac{4}{3}\pi abc$; volume égal à celui d'un ellipsoïde dont a, b, c sont les demi-axes.

2. Volume compris entre le paraboloïde $xy = az$, le plan $x + y + z = a$, et le plan XY.

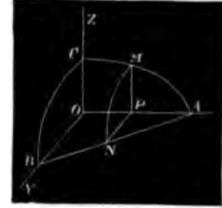
$$\text{R.}\quad \varphi(x) = \frac{1}{2}\,\frac{x(a-x)^2}{a+x},\qquad V = a^3\left(\frac{17}{12} - \text{l. } 4\right).$$

3. Volume compris entre le plan XY et le conoïde qui a pour base l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

pour directrice rectiligne la droite $y = 0$, $z = c$, et dont la génératrice est parallèle au plan YZ.

$$\text{R.}\quad \varphi(x) = \frac{bc}{a}\sqrt{a^2 - x^2},\qquad V = \frac{\pi}{2}\,abc.$$



4. Les directrices sont une ellipse construite sur les demi axes $AO = a$, $OC = c$, dans le plan XZ ; et une droite AB coupant les axes OX et OY aux distances $OA = a$ et $OB = b$. La génératrice est une ellipse MN dont le centre est sur OX et les axes parallèles à OY, OZ : trouver le volume compris entre la surface et les plans coordonnés.

$$\text{R.}\quad \varphi(x) = \frac{\pi bc}{4a^2}(a-x)\sqrt{a^2 - x^2},\qquad V = \frac{\pi abc}{4}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\right).$$

5. Démontrer que le volume engendré par un triangle dont le plan reste parallèle à lui-même, et dont les sommets glissent sur trois droites fixes, a pour expression

$$\frac{h}{6}(S_0 + 4S_1 + S_2),$$

S_0, S_1, S_2 désignant respectivement les sections extrêmes et la section moyenne, h la distance des sections extrêmes.

6. Volume compris sous la surface engendrée par la révolution de la chaînette (ch. XVI, ex. 2) autour de l'axe de x, entre le plan $x = 0$ et un plan x quelconque.

$$\text{R.}\quad V = \frac{\pi a^3}{4}\left(\frac{e^{\frac{2x}{a}} - e^{-\frac{2x}{a}}}{2} + \frac{2x}{a}\right).$$

7. Même problème, la courbe génératrice étant la logarithmique

$$y = a\,\text{l. } x.$$

$$\text{R.}\quad V = \pi a^2 x\,[(\text{l. } x)^2 - 2\,\text{l. } x + 2].$$

8. Volume engendré par la révolution de la développée de l'ellipse (159) autour de l'axe des x

$$\text{R.}\quad V = \frac{32}{105}\,\pi AB^2.$$

9. L'aire comprise entre la courbe qui a pour équation polaire $r = f(\theta)$, et deux rayons vecteurs correspondants aux angles θ_0 et θ, tourne autour de l'axe polaire. Démontrer que le volume engendré a pour expression

$$V = \frac{2}{3}\pi\int_{\theta_0}^{\theta} r^3 \sin\theta\, d\theta.$$

10. Volume total compris sous la surface engendrée par la révolution de la cardioïde

$$r = 2a\,(1 + \cos\theta)$$

autour de l'axe polaire.

$$\text{R.}\quad V = \frac{4^3}{3}\pi a^3.$$

11. Volume engendré par la révolution de l'aire de la spirale logarithmique

$$r = ae^{m\theta},$$

comprise entre les angles polaires $\theta_0 = 0$, $\theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3} m$.

$$\text{R.}\quad V = \frac{2}{3}\,\frac{\pi a^3}{9m^2 + 1}.$$

12. Volume du solide engendré par la révolution de la lemniscate $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ autour de l'axe polaire.

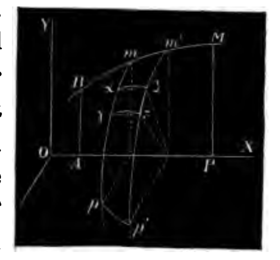
$$\text{R.}\quad V = \frac{2}{3}\pi a^3 \left[\frac{3}{4\sqrt{2}}\,\text{l.}\,(1 + \sqrt{2}) - 1\right].$$

§ 2. QUADRATURE DES SURFACES DE RÉVOLUTION.

298. Nous appelons *aire d'une portion de surface courbe, la limite vers laquelle tend l'aire d'une surface polyédrique, dont toutes les facettes sont infiniment petites en tous sens, et qui est inscrite dans la portion de surface dont il s'agit.*

Nous démontrerons plus loin que cette limite existe, et qu'elle est indépendante de la forme des facettes du polyèdre inscrit, et de la loi suivant laquelle elles tendent vers zéro.

Nous chercherons ici à évaluer l'aire S de la surface engendrée par une courbe plane BM tournant autour d'un axe OX, cette aire étant limitée par deux plans normaux à l'axe de révolution, en deux points donnés A et P. Décomposons d'abord cette surface en bandes infiniment étroites par des plans perpendiculaires à l'axe OX, et soit $mpp'm'$ une de ces bandes : décomposons-la à son tour en éléments du second ordre par une série de plans passant par l'axe OX, et soit $\alpha\beta\gamma\delta$ un de ces éléments. Considérons la facette plane qui a les mêmes sommets α, β, γ, δ que cet élément de surface : la somme de toutes ces facettes, prise à la limite, nous donnera l'aire de la surface proposée. Or, l'aire du petit trapèze $\alpha\beta\gamma\delta$ est égale, à un infiniment petit près par rapport à elle, au produit



$$\alpha\beta \cdot \alpha\gamma = \textit{corde}\ mm' \cdot \alpha\gamma,$$

et la somme des trapèzes compris dans la bande *mpp'm'* a pour expression $mm' \cdot \Sigma\alpha\gamma$. Mais la corde *mm'* ne diffère de l'arc $mm' = \Delta s$ que d'une quantité infiniment petite par rapport à elle-même ; la somme $\Sigma\alpha\gamma$ des côtés infiniment petits $\alpha\gamma$ a pour limite la circonférence du cercle *mp* décrit par le point *m*, ou $2\pi y$, *y* désignant l'ordonnée de la courbe génératrice. On peut donc prendre $2\pi y\Delta s$ pour l'aire de la surface polyédrique inscrite dans la bande, en négligeant une quantité infiniment petite par rapport à cette aire, ce qui n'altérera pas la limite de la somme des bandes. D'après cela, la surface cherchée sera donnée par l'expression

$$S = lim\, \Sigma 2\pi y \Delta s,$$

d'où, en désignant par x_0 et x les abscisses des points A et P, on aura

$$(1) \qquad S = 2\pi \int_{x_0}^{x} y\, ds.$$

Si l'on substitue à *ds* son expression connue, on trouvera

$$(2) \qquad S = 2\pi \int_{x_0}^{x} y\, dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Les formules (1) et (2) suffisent pour la quadrature des surfaces de révolution. L'équation de la courbe génératrice fait connaître y et $D_x y$ en fonction de x.

299. Appliquons ces formules à l'ellipsoïde de révolution autour de son grand axe. La courbe génératrice a pour équation

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

d'où l'on déduit, en posant $a^2 - b^2 = a^2\varepsilon^2$,

$$ds = dx \sqrt{1 + \frac{b^2x^2}{a^2(a^2 - x^2)}} = \frac{dx\sqrt{a^2 - \varepsilon^2x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

On aura donc, en faisant commencer la surface à évaluer au plan $x = 0$,

$$S = \frac{2\pi b}{a}\int_0^x dx\sqrt{a^2 - \varepsilon^2x^2} = \frac{2\pi b\varepsilon}{a}\int_0^x dx\sqrt{\frac{a^2}{\varepsilon^2} - x^2}$$
$$= \frac{\pi b}{a}\left(x\sqrt{a^2 - \varepsilon^2x^2} + \frac{a^2}{\varepsilon}\arcsin\frac{\varepsilon x}{a}\right).$$

On fera $x=a$ et l'on doublera, pour avoir la surface totale de l'ellipsoïde de révolution allongé, qui sera

$$2\pi ab\left(\sqrt{1-\varepsilon^2}+\frac{\text{arc}\sin\varepsilon}{\varepsilon}\right).$$

Si $a=b$, $\varepsilon=0$, et la surface de la sphère est $4\pi a^2$.

Si l'on avait à chercher la surface de l'ellipsoïde *aplati*, on désignerait encore par a le demi-grand axe de l'ellipse génératrice, et celle-ci aurait pour équation

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1, \qquad \text{ou} \qquad y=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-x^2}.$$

On trouverait alors, en posant $a^2-b^2=b^2\varepsilon^2$,

$$S=\frac{2\pi a}{b}\int_0^x dx\sqrt{b^2+\varepsilon^2x^2},$$

ou, en cherchant l'intégrale indéfinie, ce qui n'offre aucune difficulté,

$$S=\frac{\pi a}{b}\left[x\sqrt{b^2+\varepsilon^2x^2}+\frac{b^2}{\varepsilon}\,\text{l.}\,\frac{\varepsilon x+\sqrt{b^2+\varepsilon^2x^2}}{b}\right].$$

Faisant $x=b$ et doublant le résultat, on obtient

$$2S=2\pi ab\left[\sqrt{1+\varepsilon^2}+\frac{\text{l.}\,(\varepsilon+\sqrt{1+\varepsilon^2})}{\varepsilon}\right]$$

pour l'expression de la surface de l'ellipsoïde de révolution aplati.

300. Les équations ordinaires de la cycloïde donnent

$$ds=2a\sin\frac{\omega}{2}, \qquad y\,ds=2a^2(1-\cos\omega)\sin\frac{\omega}{2}\,d\omega,$$

et, par suite, l'aire S engendrée par la révolution d'un arc de cycloïde commençant à l'origine et tournant autour de la base, sera

$$S=8\pi a^2\int_0^\omega \sin^2\frac{\omega}{2}\sin\frac{\omega}{2}\,d\omega=8\pi a^2\int_0^\omega\left(1-\cos^2\frac{\omega}{2}\right)\sin\frac{\omega}{2}\,d\omega$$

$$=16\pi a^2\left(\frac{2}{3}-\cos\frac{\omega}{2}+\frac{1}{3}\cos^3\frac{\omega}{2}\right).$$

Faisant $\omega=2\pi$, on trouve pour la surface correspondante à une arcade entière de la courbe

$$S=\frac{64}{3}\pi a^2.$$

Exercices.

1. *Paraboloïde de révolution :*

$$y^2 = 2px, \qquad x_0 = 0; \qquad S = \frac{2\pi}{3p}\left[(p^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} - p^3\right].$$

2. Surface engendrée par la révolution autour de l'axe des x de la chaînette

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

$$\text{R.} \quad S = \frac{\pi a^2}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} - e^{-\frac{2x}{a}} + \frac{4x}{a}\right). \qquad (x_0 = 0).$$

Si V est le volume de révolution correspondant, on a $2V = aS$ (voir § 1, ex. 6).

3. La *cardioïde* $r = 2a(1 + \cos\theta)$ tournant autour de son axe, trouver l'aire totale de la surface engendrée.

$$\text{R.} \quad S = \frac{2^5}{5}\pi(2a)^2.$$

4. Même problème, la courbe génératrice étant la podaire de l'ellipse

$$r^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta.$$

$$\text{R.}\ S = 2\pi\int_0^{2\pi}\sin\theta\, d\theta\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} = 2\pi\left(a^2 + \frac{b^4}{\sqrt{a^4 - b^4}}\ \text{l.}\ \frac{a^2 + \sqrt{a^4 - b^4}}{b^2}\right).$$

5. Même problème, la courbe étant la lemniscate $r^2 = a^2\cos 2\theta$.

$$\text{R.} \quad S = 4\pi a^2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

6. Surface du tore engendré par le cercle $x^2 + (y - c)^2 = a^2$ tournant autour de l'axe des x.

R. Cette surface se compose de deux parties : l'une correspond à la courbe dont l'ordonnée est $y = c + \sqrt{a^2 - x^2}$; sa valeur est

$$2\pi a\int_0^a \frac{y\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 2\pi a\int_0^a\left(\frac{c}{\sqrt{a^2 - x^2}} + 1\right)dx = 2\pi a\left(a + \frac{\pi c}{2}\right);$$

l'autre, où l'ordonnée génératrice est $c - \sqrt{a^2 - x^2}$, est égale à

$$2\pi a\int_0^a\left(\frac{c}{\sqrt{a^2 - x^2}} - 1\right)dx = 2\pi a\left(\frac{\pi c}{2} - a\right).$$

Ajoutant, et doublant pour avoir l'aire totale, on trouve

$$S = 4\pi^2 ac = 2\pi a \cdot 2\pi c.$$

7. Démontrer que si une courbe tracée dans le plan XZ, $z = f(x)$, engendre une surface par sa révolution autour de l'axe des x, la portion de cette surface comprise entre le plan XZ, un cylindre vertical $y = \varphi(x)$, et deux plans x_0 et x, a pour expression

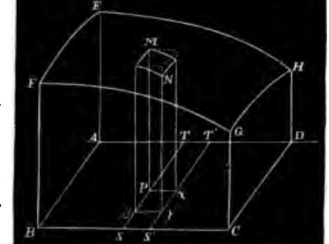
$$S = \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx \arcsin\frac{\varphi(x)}{f(x)} \times \sqrt{1 + f'(x)^2}.$$

CHAPITRE XXXIV.

SUITE DES APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

§ 1. CUBATURE DES SOLIDES EN GÉNÉRAL.

301. Reprenons le problème du calcul du volume compris sous une surface donnée, et d'abord, proposons-nous d'évaluer le volume V compris entre une surface EFGH donnée par son équation



$$z = \mathrm{f}(x, y),$$

le plan XY, deux plans AEHD, BFGC parallèles au plan XZ, et deux autres plans ABFE, DCGH parallèles au plan YZ. Pour cela, décomposons le volume à évaluer en tranches infiniment minces par un système de plans parallèles au plan YZ, et soit STT'S' la *base* d'une de ces tranches sur le plan XY. Décomposons ensuite cette tranche en éléments infiniment petits du second ordre par un système de plans parallèles au plan XZ, et soit MNP$\alpha\beta\gamma$ un de ces éléments. On peut lui substituer le prisme rectangle de même base P$\alpha\beta\gamma$, et de hauteur MP$=z$, car on ferait voir, par les considérations bien connues, que les volumes de ces deux solides ont pour limite de leur rapport l'unité. Le volume cherché V sera donc rigoureusement égal à la limite de la somme des volumes de tous ces prismes inscrits dans le solide, quand les plans sécants parallèles se rapprochent indéfiniment. Or, si l'on représente par Δx et Δy les distances infiniment petites Pα, Pβ comprises entre deux plans sécants consécutifs, le volume du prisme élémentaire est $z\Delta x\Delta y$. La somme des prismes compris dans une même tranche STT'S', pour lesquels x et Δx sont constants, est $\Delta x\Sigma(z\Delta y)$. Mais comme Δy est infiniment petit, $\Sigma z\Delta y$ diffère infiniment peu de l'intégrale

$$\int_{y_0}^{y_1} z\,dy = \int_{y_0}^{y_1} \mathrm{f}(x, y)\,dy,$$

y_0 et y_1 désignant les ordonnées des points T et S, et x *étant regardé comme invariable dans cette intégration par rapport à* y. On peut donc

remplacer la somme des prismes compris entre les plans x et $x+\Delta x$ par l'expression

$$\Delta x \int_{y_0}^{y_1} z\,dy,$$

en négligeant une quantité infiniment petite par rapport à cette somme. Réunissant les termes correspondants aux différentes tranches STT'S', passant à la limite, et désignant par x_0 et x_1 les abscisses qui répondent aux plans ABFE, DCGH, on aura enfin

$$V = \lim \Sigma \left(\Delta x \int_{y_0}^{y_1} z\,dy\right),$$

ou

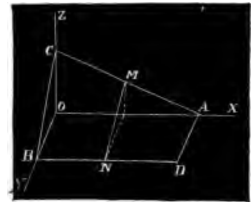
$$(1) \qquad V = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} z\,dy.$$

Ainsi le volume du solide s'exprime par une *intégrale double*. Il faut observer que la première intégrale à évaluer,

$$\int_{y_0}^{y_1} z\,dy,$$

représente précisément, comme on s'en assure sans peine, l'aire de la section faite dans le solide par un plan quelconque parallèle à YZ, aire que nous avions désignée antérieurement par $\varphi(x)$.

302. Comme application, cherchons le volume du solide compris entre les plans coordonnés et la surface engendrée par une droite MN, qui se meut en restant parallèle au plan YZ, et en s'appuyant sur deux droites fixes, AC dans le plan XZ, BD parallèle à OX dans le plan XY.



Faisant $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$, on trouve pour l'équation de la surface

$$z = \frac{c}{ab}(a-x)(b-y),$$

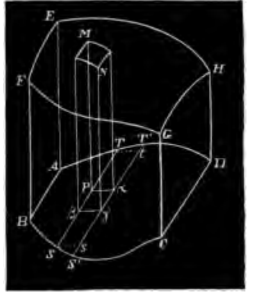
et les limites d'intégration seront, par rapport à y, $y_0=0$, $y_1=b$; par rapport à x, $x_0=0$, $x_1=a$. Donc

$$V = \frac{c}{ab}\int_0^a dx \int_0^b (a-x)(b-y)\,dy = \frac{c}{ab}\int_0^a (a-x)\,dx \int_0^b (b-y)\,dy$$

$$= \frac{c}{ab}\int_0^a (a-x)\,dx \left(by - \frac{y^2}{2}\right)_0^b = \frac{bc}{2a}\int_0^a (a-x)\,dx = \frac{abc}{4}.$$

C'est le quart du volume du parallélipipède rectangle construit sur OA, OB, OC.

303. Reprenons encore le même problème, mais en supposant que le solide à évaluer, au lieu d'être limité en avant et en arrière par deux plans parallèles au plan XZ, soit limité par deux cylindres, CBFG, ADHE, parallèles à l'axe des z, et dont les traces sur le plan XY sont deux courbes données BC, AD. Nous décomposerons encore ce solide en tranches infiniment minces par des plans parallèles au plan YZ, et chacune de ces tranches en filets élémentaires $MP\alpha\beta\gamma$ par des plans parallèles au plan XZ, et infiniment voisins. Nous négligerons, dans chacune des tranches telles que STT'S',



les filets extrêmes qui ont pour bases sur le plan XY les triangles curvilignes SS's, TT't, ces filets étant infiniment petits par rapport à la tranche, et cela n'altèrera pas la limite de la somme des tranches, ou le volume demandé. Nous remplacerons encore le filet élémentaire $MP\alpha\beta\gamma$ par le prisme rectangle de hauteur $MP=z$, et de base $P\alpha\beta\gamma=\Delta x\Delta y$, sans que cela altère la limite de la somme de ces filets, et nous aurons

$$V=lim\,\Sigma\, z\Delta x\Delta y,$$

le signe Σ s'étendant à tous les prismes élémentaires. Sommant d'abord les prismes compris dans une même tranche, nous trouverons, en raisonnant comme dans le premier cas, que cette somme ne diffère que d'une quantité négligeable de l'intégrale

$$\Delta x\int_{y_0}^{y_1} z\,dy,$$

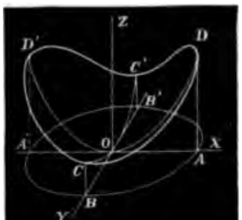
x étant constant dans l'intégration, et y_0, y_1, désignant les valeurs de y qui correspondent aux deux points T et S. Mais il faut observer qu'ici y_0, y_1 ne sont plus, comme dans le cas précédent, des constantes données : ce sont les ordonnées correspondantes à l'abscisse x dans les deux courbes AD, BC, traces des cylindres sur le plan XY, et ce sont *des fonctions de x données par les équations de ces traces*. Faisant ensuite la somme des différentes tranches comprises entre les plans $x=x_0$, $x=x_1$, et passant à la limite, nous aurons encore pour le volume cherché l'expression

$$V=\int_{x_0}^{x_1} dx\int_{y_0}^{y_1} z\,dy,$$

semblable à l'équation (1), mais en différant par la signification plus générale des lettres y_0, y_1.

Les deux cylindres verticaux peuvent être deux nappes d'une même surface cylindrique, dont la base est une courbe fermée : y_0 et y_1 sont alors les deux valeurs de y que fournit l'équation $\varphi(x, y) = 0$ de cette base.

304. Soit à calculer le volume compris entre la surface OCDC'D' du paraboloïde elliptique



$$z = \alpha x^2 + \beta y^2,$$

le cylindre vertical qui a pour base l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

deux plans $x = x_0$, $x = x_1$, et le plan XY.

L'équation de l'ellipse nous donne immédiatement

$$y_0 = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad y_1 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

pour les ordonnées limites. Nous avons

$$V = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} (\alpha x^2 + \beta y^2)\, dy,$$

et en effectuant la première intégration, puis substituant à y_0 et y_1 leurs valeurs ci-dessus,

$$\int_{y_0}^{y_1} (\alpha x^2 + \beta y^2)\, dy = \frac{2\alpha b}{a} x^2 \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{2\beta b^3}{3a^3} (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

On trouve d'ailleurs facilement

$$\int x^2 dx \sqrt{a^2 - x^2} = -\frac{x(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{1}{3}\int (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx,$$

$$\int (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = a^2 \int dx \sqrt{a^2 - x^2} - \int x^2 dx \sqrt{a^2 - x^2},$$

et, par suite,

$$\int x^2 dx \sqrt{a^2 - x^2} = -\frac{x}{4}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{a^2}{4}\int dx \sqrt{a^2 - x^2};$$

$$\int (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{x}{4}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{3a^2}{4}\int dx \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Les deux intégrales dont dépend le volume cherché sont donc ramenées à une intégrale bien connue. Substituant, et prenant l'intégrale relative à x entre les limites données, on aura

$$V=\frac{1}{2}\left(\frac{\beta b^3}{3a^3}-\frac{\alpha b}{a}\right)\left[x(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{x_0}^{x_1}+\left(\frac{\beta b^3}{a^3}+\frac{\alpha b}{a}\right)\frac{a^2}{2}\int_{x_0}^{x_1} dx\sqrt{a^2-x^2}.$$

En posant $x_0=-a$, $x_1=+a$, et se rappelant que l'intégrale prise entre ces limites vaut la demi-surface du cercle de rayon a, on trouvera, pour le volume total compris entre le paraboloïde, le cylindre et le plan XY,

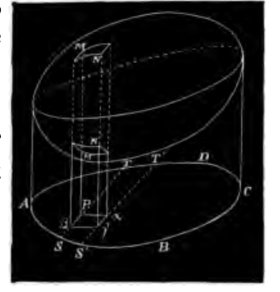
$$V=\frac{\pi ab}{4}(\alpha a^2+\beta b^2)=\frac{\pi abc}{4},$$

c désignant l'ordonnée verticale du paraboloïde qui correspond à $x=a$, $y=b$. C'est le quart du volume du cylindre de hauteur c, et de base ABA'B'.

305. Ce qui précède conduit facilement à l'évaluation du volume total V compris sous une surface fermée

$$F(x, y, z)=0.$$

On décomposera encore le solide en filets verticaux par deux séries de plans infiniment voisins, les uns parallèles à YZ, les autres parallèles à XZ, et l'un quelconque de ces filets, tels que MNM'N', pourra être remplacé par le prisme ayant pour base un rectangle égal à l'élément $P\alpha\beta\gamma$ du plan XY, et pour hauteur la différence MM' des ordonnées verticales z et z_0 de la surface donnée, qui répondent à un même point $P(x, y)$ du plan XY. Les volumes du filet et du prisme ont en effet pour limite de leur rapport l'unité, et le solide total sera la limite de la somme des prismes, qui ont pour expression générale $(z-z_0)\Delta x\Delta y$.



La somme des prismes compris entre les deux plans x, $x+\Delta x$, peut être exprimée par

$$\Delta x\int_{y_0}^{y_1}(z-z_0)\,dy,$$

y_0 et y_1 désignant toujours la plus petite et la plus grande valeur de y qui répondent à la section faite par le plan x dans le solide. Si l'on cherche, sur le plan XY, la courbe ABCD qui renferme les projections de tous les

points de la surface donnée sur ce plan, y_0 et y_1 seront évidemment les ordonnées des points T et S qui répondent à une même abscisse x dans l'équation de cette courbe : ce seront des fonctions de x fournies par cette équation. Il faut encore faire la somme des volumes correspondants aux diverses tranches parallèles au plan YZ, et passer à la limite, ce qui se fera en intégrant l'expression ci-dessus par rapport à x, entre les limites x_0 et x_1 qui répondent aux limites du solide dans le sens de l'axe des x; x_0 et x_1 sont la plus petite et la plus grande valeur de x donnant des points réels de la surface proposée. On aura donc

$$(2) \qquad V = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} (z - z_0)\, dy.$$

306. La détermination des quantités y_0, y_1, x_0, x_1, se fera comme il suit. *Généralement*, la courbe ABCD, qui forme le contour apparent de la surface sur le plan XY, est la trace d'un cylindre vertical circonscrit à la surface; la courbe de contact de ce cylindre est le lieu des points de la surface où le plan tangent à celle-ci est parallèle à l'axe des z, et où, conséquemment, le coefficient de ζ est nul dans l'équation de ce plan (178). La courbe de contact satisfait donc aux équations

$$F(x, y, z) = 0, \qquad \frac{dF}{dz} = 0;$$

éliminant z entre ces équations, on obtiendra entre x et y l'équation de la projection ABCD de cette courbe.

Les abscisses x_0 et x_1 répondent aux points A et C, limites de la courbe ABCD dans le sens de l'axe des x. En ces points, *généralement*, la tangente à la courbe est parallèle à l'axe des y, et le plan tangent à la surface est parallèle au plan YZ. On a donc

$$F(x, y, z) = 0, \qquad \frac{dF}{dy} = 0, \qquad \frac{dF}{dz} = 0,$$

équations qui fourniront les valeurs de x_0 et x_1.

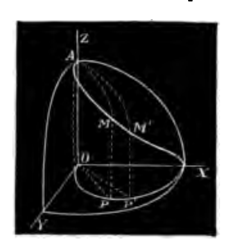
Il est à peine nécessaire d'observer que, dans cette théorie, nous admettons implicitement que la courbe ABCD ne soit coupée qu'en deux points par les parallèles à l'axe des y, et la surface $F=0$ qu'en deux points par des parallèles à l'axe des z. On voit assez comment il faudrait opérer dans des cas plus compliqués.

307. La décomposition du solide en prismes infiniment petits par des

plans parallèles aux plans coordonnés se présente naturellement ; mais il y a des cas où l'on est conduit à des intégrations plus simples en adoptant un autre mode de décomposition ; par exemple, par des plans passant par l'axe des z, et des cylindres de révolution autour de cet axe. Supposons que l'on veuille évaluer le volume compris entre la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

le plan XY, et le cylindre vertical OPXMA dont la base est un demi-cercle décrit sur le rayon a comme diamètre. Le prisme élémentaire compris entre deux plans ZOP′, ZOP passant par OZ et faisant avec le plan XZ les angles θ, $\theta + d\theta$; et les cylindres de rayons r, $r + dr$ autour de l'axe OZ, a pour volume $zrdrd\theta$, z étant l'ordonnée verticale de la surface sphérique qui vaut $\sqrt{a^2 - r^2}$, et $rdrd\theta$ exprimant, comme on le voit sans peine, l'élément plan qui sert de base à ce prisme. Pour trouver la limite de la somme de tous ces prismes, on intégrera donc l'expression $\sqrt{a^2 - r^2}\, rdrd\theta$, d'abord par rapport à r, entre les limites $r = 0$ et $r = a\cos\theta$ qui répondent aux deux extrémités O et P d'une même tranche ; puis on intégrera le résultat par rapport à θ entre les limites $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$ qui répondent au plan XZ et au plan YZ. Comme on a



$$\int rdr \sqrt{a^2 - r^2} = -\frac{(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + C,$$

la valeur de cette intégrale entre les limites $r = 0$ et $r = a\cos\theta$ sera

$$\frac{a^3}{3} - \frac{a^3(1 - \cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{a^3}{3}(1 - \sin^3\theta).$$

Le volume cherché V aura donc pour expression

$$V = \frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3\theta)\, d\theta = \frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin\theta + \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta)$$

$$= \frac{a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - 1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$

En doublant, on aura le volume total compris entre le plan XY, le cylindre complet et la sphère.

Exercices.

1. Calculer le volume V compris entre la surface

$$cz = y\sqrt{a^2 - x^2},$$

le plan XY, et les plans $x=0$, $x=a$; $y=0$, $y=b$.

R. $$V = \frac{\pi a^2 b^2}{8c}.$$

2. Volume compris entre la surface gauche qui a pour équation

$$z = c \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x},$$

le plan XY, et les plans $x=0$, $x=a$; $y=0$, $y=b$.

R. $$V = c\left[ab \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a} + \frac{b^2 - a^2}{4}\,\mathrm{l.}\,(a^2 + b^2) - \frac{b^2}{2}\,\mathrm{l.}\,b + \frac{a^2}{2}\,\mathrm{l.}\,a\right].$$

Dans le cas particulier où $a=b=c$, on a

$$V = \frac{\pi c^3}{4}.$$

3. Volume compris entre la surface

$$e^{-z} = \cos x \cos y,$$

le plan XY, et les plans $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$; $y=0$, $y=\frac{\pi}{2}$.

R. On est ramené à intégrer $\mathrm{l.}\cos x\,dx$ entre 0 et $\frac{\pi}{2}$; observant que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{l.}\cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{l.}\sin x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{l.}\,\frac{\sin 2x}{2}\,dx,$$

et que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{l.}\sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \mathrm{l.}\sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{l.}\sin x\,dx,$$

on trouve sans peine

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{l.}\cos x\,dx = -\frac{\pi}{2}\,\mathrm{l.}\,2, \qquad \text{et} \qquad V = \frac{\pi^2}{2}\,\mathrm{l.}\,2.$$

4. Volume compris entre la surface

$$z = e^{x-y}\cos(x+y),$$

le plan XY, et les quatre plans verticaux représentés par l'équation

$$y = \pm x \pm \frac{\pi}{2}.$$

R. $$V = e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

5. Volume compris entre le paraboloïde engendré par la révolution de la parabole $z^2 = 2px$ autour de l'axe des x, les plans XZ, XY, $x = a$, et le cylindre vertical $y^2 = 2p'x$ ($p' < p$).

$$\text{R.} \qquad V = \frac{a^2}{2}\left[\sqrt{p'(p-p')} + p \arcsin \sqrt{\frac{p'}{p}}\right].$$

6. Même problème, le cylindre vertical étant remplacé par le plan vertical $y = \sqrt{\frac{2p}{a}}\,x$.

$$\text{R.} \qquad V = \frac{7}{32}\pi a^2 c.$$

7. Calculer le volume OADBC compris, dans l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

entre la surface, les plans coordonnés, et le plan ABD mené par les sommets A, B des axes a, b, parallèlement à l'axe c.

R. On a ici

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = a; \qquad y_0 = 0, \qquad y_1 = \frac{b}{a}x - b;$$

$$V = \frac{\pi abc}{24}(5\sqrt{2} - 4).$$

C'est la huitième partie du volume qui reste lorsque l'on coupe un ellipsoïde par quatre plans parallèles à un même axe et passant chacun par deux sommets adjacents non situés sur cet axe. La somme des quatre solides retranchés vaut donc $\frac{\pi abc}{3}(8 - 5\sqrt{2})$.

8. Volume total V compris sous la surface qui a pour équation

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

R. La partie comprise dans le trièdre des coordonnées positives est le 8me du volume total. On a

$$x_0 = 0, \quad x_1 = a; \quad y_0 = 0, \quad y_1 = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Si l'on pose, pour faciliter la première intégration,

$$y = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \sin^3 \varphi,$$

on trouvera

$$V = \frac{4}{35}\pi a^3.$$

9. Calculer le volume compris entre la sphère qui a pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

le plan XY, et le cylindre vertical représenté par l'équation

$$x^2(x^2 + y^2) - a^2(x^2 - y^2) = 0.$$

R. En employant les coordonnées polaires r et θ, on trouve

$$V = \frac{a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - 1 + \mathrm{l.}\,2\right).$$

10. Démontrer que, si l'on rapporte les points de l'espace aux coordonnées polaires r, θ, ψ, le volume compris sous une surface fermée $r = f(\theta, \psi)$, le pôle étant dans l'intérieur de la surface, a pour expression

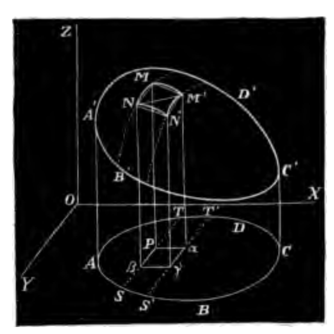
$$V = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} r^3 \sin\theta\, d\theta.$$

§ 2. QUADRATURE DES SURFACES COURBES.

308. Supposons qu'il s'agisse d'évaluer l'aire comprise, sur une surface donnée par son équation en coordonnées rectangulaires

$$z = f(x, y),$$

dans l'intérieur d'un contour fermé A'B'C'D', qui se projette, sur le plan XY, suivant un contour ABCD. Nous décomposerons cette aire en bandes infiniment étroites par un système de plans parallèles à YZ; soit STT'S' la projection d'une de ces bandes sur le plan XY. Puis, nous décomposerons chacune de ces bandes en éléments infiniment petits MNN'M' par des plans parallèles au plan XZ, en sorte que la projection $P\alpha\beta\gamma$ d'un de ces éléments aura pour aire le produit $\Delta x \Delta y$ des distances de deux plans consécutifs de chaque système. Imaginons un polyèdre inscrit, dont les facettes triangulaires aient pour sommets ceux de ces éléments : les facettes MNM', M'NN' de ce polyèdre font évidemment des angles infiniment petits avec le plan tangent à la surface en M, et par suite, elles font avec le plan XY des angles qui diffèrent infiniment peu de l'angle ν compris entre ce plan tangent et le plan XY. De là nous concluons



$$\Delta x \Delta y = (\overline{MNM'} + \overline{M'NN'}) \cos\nu, \qquad \overline{MNM'} + \overline{M'NN'} = \frac{\Delta x \Delta y}{\cos\nu},$$

en négligeant une quantité infiniment petite par rapport à l'élément de surface. La somme des aires des facettes comprises entre les deux plans x, $x + \Delta x$, en laissant de côté la première et la dernière que l'on peut négliger, aura pour expression, aux infiniment petits près d'ordre supérieur

$$\Delta x \int_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{\cos\nu},$$

y_0 et y_1 étant les ordonnées des points T et S qui répondent à l'abscisse x dans le contour ABCD, et x restant constant dans cette intégration. Soient x_0 et x_1 les valeurs de x qui répondent aux points A, C, limites du contour ABCD dans le sens de l'axe des x; l'intégrale

$$(1)\qquad S = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{\cos \nu}$$

représentera donc la limite de la somme des facettes du polyèdre inscrit dans la portion de surface limitée par le contour A'B'C'D', c'est-à-dire, d'après la définition donnée au n° 298, l'aire S de cette portion de surface.

L'angle ν n'est autre que l'angle aigu formé avec l'axe des z positifs par la normale à la surface au point M (x, y, z). Si donc on désigne par p et q les dérivées partielles de z par rapport à x et y, tirées de l'équation de la surface, on aura, d'après les formules du n° 180,

$$\cos \nu = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

et l'équation (1) pourra s'écrire

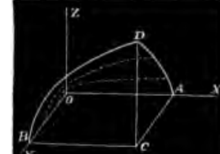
$$(2)\qquad S = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} dy \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

La forme du contour ABCD est arbitraire : s'il se réduit à un rectangle dont les côtés sont parallèles à OX, OY, y_0 et y_1 seront des constantes données, comme x_0 et x_1; s'il se compose de deux arcs de courbes différentes, terminés à deux droites parallèles à OY, y_0 et y_1 seront des fonctions de x tirées des équations de ces deux courbes. Si l'on a à évaluer l'aire totale d'une surface fermée, ABCD sera la base du cylindre vertical circonscrit à cette surface, et A'B'C'D' la courbe de contact de ce cylindre avec la surface; elle partagera celle-ci en deux parties que l'on évaluera séparément.

309. D'après ce que l'on a vu, pour légitimer notre définition de l'aire d'une portion de surface courbe, il faut que la surface du polyèdre inscrit tende vers une limite fixe lorsque ses facettes tendent vers zéro, et que cette limite soit indépendante de la forme et de la loi d'inscription des facettes. Or, c'est ce que la formule (2) établit, au moins pour le système de polyèdres à facettes triangulaires que nous avons choisi, car cette intégrale double représente une quantité déterminée, de quelque

manière que Δx et Δy tendent vers zéro. Supposons maintenant que l'on inscrive dans la portion de surface A'B'C'D' un polyèdre, à facettes infiniment petites dans tous les sens, mais de forme quelconque. Si par les arêtes de ce polyèdre et du polyèdre primitif, on mène des plans perpendiculaires au plan XY, ces plans partageront évidemment les surfaces des deux polyèdres en éléments plans, infiniment petits dans tous les sens, qui auront deux à deux les mêmes projections sur le plan XY. De plus, les plans de deux éléments de même projection ε font avec le plan XY des angles infiniment peu différents, puisque l'un et l'autre sont infiniment peu inclinés sur les plans tangents à la surface en des points infiniment voisins; les aires des éléments eux-mêmes sont donc égales deux-à-deux, en négligeant des quantités infiniment petites par rapport à ces aires, et, par suite, les limites de leurs sommes respectives sont rigoureusement égales, C. Q. F. D.

On pourra donc adopter, pour les facettes infiniment petites du polyèdre inscrit, telle loi que l'on voudra : on trouvera toujours la même valeur pour l'aire de la surface donnée.



310. Cherchons, comme application de l'équation (1), la portion de surface OADB limitée par les plans $x=0$, $x=a$; $y=0$, $y=b$, sur le paraboloïde

$$z^2 = 2xy.$$

Nous avons ici

$$zp = y, \qquad zq = x,$$

$$1 + p^2 + q^2 = \frac{x^2+y^2+z^2}{z^2} = \frac{x^2+y^2+2xy}{z^2} = \frac{(x+y)^2}{2xy};$$

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^a dx\int_0^b \frac{x+y}{\sqrt{xy}}\,dy = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^a \sqrt{x}\,dx\int_0^b \frac{dy}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}}\int_0^b \sqrt{y}\,dy,$$

ou, en effectuant les intégrations,

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{4}{3}a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{3}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{3}\sqrt{ab}\,(a+b).$$

Si l'on voulait calculer la portion de cette même surface limitée par les axes OX, OY, et le cylindre vertical

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{2}} = 1,$$

on ferait dans la formule générale (2),

$$x_0 = 0, \quad x_1 = a; \quad y_0 = 0, \quad y_1 = b\left(1 - \sqrt{\frac{x}{a}}\right);$$

on aurait donc

$$\int_0^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{y}} = 2\sqrt{b}\left(1 - \sqrt{\frac{x}{a}}\right), \quad \int_0^{y_1} \sqrt{y}\,dy = \frac{2}{3} b^{\frac{3}{2}}\left(1 - \sqrt{\frac{x}{a}}\right)^3,$$

$$S = \sqrt{2b}\int_0^a \left(1 - \sqrt{\frac{x}{a}}\right)\sqrt{x}\,dx + \frac{\sqrt{2}}{3} b^{\frac{3}{2}} \int_0^a \left(1 - \sqrt{\frac{x}{a}}\right)^3 \frac{dx}{\sqrt{x}},$$

ou, tout calcul fait,

$$S = \frac{\sqrt{ab}}{3\sqrt{2}}(a + b).$$

311. Il est souvent plus avantageux, comme nous l'avons vu à l'occasion des volumes, de décomposer la surface en éléments par des plans passant par l'axe des z, et par des cylindres de révolution autour de cet axe. L'élément infinitésimal de l'aire cherchée, compris entre les cylindres de rayons r et $r + dr$, et les plans d'azimuts θ et $\theta + d\theta$, sera évidemment exprimé par

$$\frac{r\,dr\,d\theta}{\cos\nu},$$

et l'aire elle-même par l'intégrale

$$(3) \qquad S = \int_{\theta_0}^{\theta_1} d\theta \int_{r_0}^{r_1} \frac{r\,dr}{\cos\nu},$$

θ étant constant dans l'intégration relative à r; r_0, r_1 étant les valeurs de r qui répondent à un même angle θ sur le contour ABCD; θ_0 et θ_1 les angles polaires correspondants aux rayons vecteurs extrêmes. On pourra remplacer $\cos\nu$ par sa valeur, après avoir exprimé les dérivées partielles p et q en fonction des variables r et θ (81).

Soit à évaluer l'aire de la surface sphérique

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

dans l'intérieur du cylindre vertical OPMA (v. la fig. du n° 307), qui a pour base, dans le plan XY, le demi-cercle décrit sur un rayon de la sphère comme diamètre. La normale se confondant ici avec le rayon de la sphère,

on a évidemment

$$\cos \nu = \frac{z}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{a}.$$

Exprimant en coordonnées r et θ l'équation du cercle de ba
aussi que

$$r_0 = 0, \qquad r_1 = a \cos \theta; \qquad \theta_0 = 0, \qquad \theta_1 = \frac{\pi}{2}$$

Donc

$$\int_0^{r_1} \frac{r\,dr}{\cos \nu} = a \int_0^{r_1} \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = a\left(-\sqrt{a^2 - r^2}\right)_0^{r_1} = a^2 (1 -$$

Ensuite

$$S = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \theta)\,d\theta = a^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

En quadruplant cette expression, on trouvera, pour l'aire to
chée de la sphère par le cylindre complet, $2a^2(\pi - 2)$.

312. D'autres modes de décomposition de la surface en élém
niment petits conduisent parfois, selon la nature du problème, à
tats plus simples. Considérons l'ellipsoïde à trois axes inégaux

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad (a > b > c)$$

dans lequel l'emploi des formules générales donnerait une intégral
assez compliquée. Traçons sur la surface le lieu des points $(x, y,$
lesquels $\cos \nu$ a une valeur constante u. D'après les formules du
ces points satisfont à l'équation

$$\frac{z^2}{c^4} = u^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right),$$

et, en éliminant z^2 entre cette équation et celle de l'ellipsoïde, o
pour la projection de ce lieu sur le plan XY, l'équation

$$\frac{x^2}{a^4}\,\frac{a^2 - (a^2 - c^2)u^2}{1 - u^2} + \frac{y^2}{b^4}\,\frac{b^2 - (b^2 - c^2)u^2}{1 - u^2} = 1.$$

C'est une ellipse dont les demi-axes, en posant

$$a^2 - c^2 = a^2 k^2, \qquad b^2 - c^2 = b^2 k'^2,$$

auront pour expressions

$$\frac{a\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{1-k^2u^2}}, \quad \frac{b\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{1-k'^2u^2}},$$

et dont l'aire E sera, en conséquence, donnée par l'équation

$$E = \pi ab \frac{1-u^2}{\sqrt{1-k^2u^2}\sqrt{1-k'^2u^2}}.$$

Si l'on décompose la surface de l'ellipsoïde en zones infiniment étroites par ces courbes le long desquelles u est constant, la zone comprise entre deux courbes correspondantes aux valeurs u, $u+du$ du paramètre aura pour projection, sur le plan XY, la couronne elliptique dE qui répond à un accroissement du du paramètre u. D'ailleurs, pour tous les éléments de cette zone, cos ν est constant et égal à u; l'aire de la zone elle-même est donc égale à $\frac{dE}{u}$, en négligeant des quantités d'ordre supérieur. Faisant la somme des zones qui répondent aux valeurs de u depuis 1 jusqu'à zéro, on aura évidemment la surface de l'ellipsoïde située au-dessus du plan XY, et, en doublant, la surface totale sera

$$S = -2\int_0^1 \frac{dE}{u}.$$

Or, nous avons

$$\int \frac{dE}{u} = \frac{E}{u} + \int \frac{E du}{u^2},$$

et, en posant $\Delta = \sqrt{1-k^2u^2}$, $\Delta' = \sqrt{1-k'^2u^2}$,

$$\frac{E\,du}{u^2} = \frac{\pi ab\,du}{u^2\Delta\Delta'} - \frac{\pi ab\,du}{\Delta\Delta'}.$$

D'un autre côté, on trouve facilement que

$$d.\frac{\Delta\Delta'}{u} = -\frac{k^2\Delta'}{\Delta}du - \frac{k'^2\Delta}{\Delta'}du - \frac{\Delta\Delta'}{u^2}du = -\frac{k^2\Delta'}{\Delta}du - \frac{\Delta}{u^2\Delta'}du$$

$$= -\frac{k^2\Delta'}{\Delta}du - \frac{du}{u^2\Delta\Delta'} + \frac{k^2du}{\Delta\Delta'},$$

d'où, substituant,

$$\frac{E\,du}{u^2} = \pi ab\left[-d.\frac{\Delta\Delta'}{u} - \frac{k^2\Delta'}{\Delta}du - (1-k^2)\frac{du}{\Delta\Delta'}\right],$$

et, par suite,

$$\int \frac{dE}{u} = \pi ab \left[\frac{1-u^2}{u\Delta\Delta'} - \frac{\Delta\Delta'}{u} - k^2\int\frac{\Delta'}{\Delta}\,du - (1-k^2)\int\frac{du}{\Delta\Delta'}\right].$$

D'après cela, l'expression de la surface totale de l'ellipsoïde devient

$$S = -2\pi ab\left[\frac{1-u^2-\Delta^2\Delta'^2}{u\Delta\Delta'}\right]_0^1 + 2\pi ab\left[k^2\int_0^1\frac{\Delta'}{\Delta}\,du - (1-k^2)\int_0^1\frac{du}{\Delta\Delta'}\right].$$

On voit sans peine, en remplaçant $\Delta^2\Delta'^2$ par sa valeur et faisant successivement $u=0$, $u=1$, que le premier terme est égal à $2\pi ab\sqrt{1-k^2}\sqrt{1-k'^2}$, ou, k et k' étant remplacés par leurs valeurs, à $2\pi c^2$. On a donc, enfin,

$$S = 2\pi c^2 + 2\pi ab\left[k^2\int_0^1\frac{\Delta'}{\Delta}\,du - (1-k^2)\int_0^1\frac{du}{\Delta\Delta'}\right].$$

Ces deux intégrales dépendent des fonctions elliptiques de première et de seconde espèce : on les y ramène immédiatement en posant $ku = \sin\varphi$.

Exercices.

1. Calculer l'aire de la surface qui a pour équation

$$z = c \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x},$$

comprise entre le plan XZ, le plan YZ, et le cylindre vertical $x^2+y^2=a^2$.

R. $$S = \frac{\pi}{4}\left[a\sqrt{a^2+c^2} + c^2\,\text{l.}\left(\frac{a+\sqrt{a^2+c^2}}{c}\right)\right].$$

2. Le paraboloïde à axe vertical

$$z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$$

est coupé par une surface sphérique de rayon c qui est, comme lui, tangente au plan XY à l'origine. Déterminer l'aire de la portion de surface sphérique comprise dans la courbe d'intersection.

R. L'application de la formule (3) conduit à l'équation

$$S = 4\pi c\sqrt{ab}.$$

3. Aire du paraboloïde elliptique (ex. 2) limitée par le cylindre vertical à base elliptique qui a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

R. $$S = \frac{2}{3}\pi ab\left(2^{\frac{3}{2}} - 1\right).$$

4. Les points d'une surface fermée étant rapportés aux coordonnées polaires ordinaires r, θ, ψ, le pôle O étant à l'intérieur de la surface, et P étant la distance de ce pôle au plan tangent à la surface au point (r, θ, ψ), la surface totale aura pour expression

$$S = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \frac{r^3 \sin\theta \, d\theta}{P}.$$

5. L'équation d'une surface étant donnée sous la forme

$$x = f(u, v), \qquad y = f_1(u, v), \qquad z = f_2(u, v),$$

en décomposant la surface en quadrilatères infiniment petits par les lignes $u = const.$, $v = const.$, on trouve pour l'aire S comprise dans un contour fermé

$$S = \int du \int dv \sqrt{\left(\frac{dy}{du}\frac{dz}{dv} - \frac{dz}{du}\frac{dy}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\frac{dx}{dv} - \frac{dx}{du}\frac{dz}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dy}{du}\frac{dx}{dv}\right)^2},$$

les limites des intégrales se rapportant aux limites du contour.

6. L'aire totale de la surface d'élasticité

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 - (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2) = 0$$

est égale à celle de l'ellipsoïde dont les demi-axes sont

$$\frac{bc}{a}, \quad \frac{ca}{b}, \quad \frac{ab}{c}.$$

R. Pour démontrer ce théorème, on calculera l'aire de la surface d'élasticité par la formule de l'ex. 4, et celle de l'ellipsoïde par la formule de l'ex. 5, en posant

$$x = \frac{bc}{a}\sin u \cos v, \qquad y = \frac{ca}{b}\sin u \sin v, \qquad z = \frac{ab}{c}\cos u.$$

7. Une courbe tracée sur la sphère de rayon 1, étant définie par une équation entre les coordonnées ρ et ω (ch. XX, ex. 4), l'aire sphérique comprise entre cette courbe et deux rayons ρ_0 et ρ, qui répondent à $\omega = 0$ et à ω, a pour expression

$$S = \omega - \int_0^{\omega} \cos\rho \, d\omega.$$

Si la courbe est fermée et le pôle A intérieur, $\omega = 2\pi$ donnera l'aire totale.

8. Appliquer cette formule à la *loxodromie sphérique*, qui coupe le rayon ρ sous un angle constant.

R. L'équation de la courbe est

$$\operatorname{tg}\frac{\rho}{2} = e^{k\omega}.$$

L'aire terminée aux angles $\omega = 0$ et ω a pour valeur

$$S = \omega + \frac{1}{k}\,\mathrm{l}.\,\frac{e^{k\omega} + e^{-k\omega}}{2}.$$

9. Appliquer la même formule à la quadrature de l'ellipse sphérique (ch. XX, ex. 2).

R. Prenant pour pôle le centre de l'ellipse, et comptant l'angle ω à partir du grand axe ; désignant par α, β les demi-axes de la courbe, on aura

$$a = 1, \quad \sigma = \alpha, \quad \cos\alpha = \cos\beta\cos\varepsilon, \quad x = \sin\rho\cos\omega, \quad y = \cos\rho,$$

et l'on transformera sans peine l'équation de l'ellipse sphérique en celles-ci :

$$\frac{\cos^2\omega}{\sin^2\alpha}+\frac{\sin^2\omega}{\sin^2\beta}=\frac{1}{\sin^2\rho},\qquad \frac{\cos^2\omega}{\operatorname{tg}^2\alpha}+\frac{\sin^2\omega}{\operatorname{tg}^2\beta}=\frac{1}{\operatorname{tg}^2\rho}.$$

D'où l'on tirera, en posant

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}\operatorname{tg}\omega,$$

$$S=2\pi-4\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}\cos\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{1-\frac{\sin^2\varepsilon}{\sin^2\alpha}\sin^2\varphi}\,\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\sin^2\varphi}},$$

pour l'expression de l'aire totale de l'ellipse sphérique.

CHAPITRE XXXV.

CALCUL APPROCHÉ DES INTÉGRALES DÉFINIES.

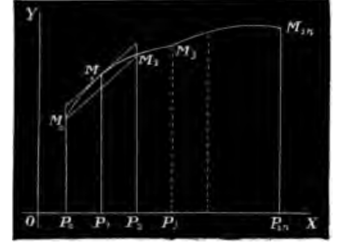
313. Beaucoup de problèmes de géométrie, de physique et de mécanique appliquée conduisent à chercher les valeurs d'intégrales définies, dont l'expression rigoureuse ne saurait être obtenue par les méthodes exposées précédemment. Il arrive même que la fonction sous le signe $\int$ n'est pas donnée par son expression analytique, et que l'on n'en possède qu'une suite de valeurs correspondantes à des valeurs assez rapprochées de la variable (comme lorsqu'il s'agit de calculer l'aire de la section d'un cours d'eau). On doit donc recourir à des méthodes permettant de calculer la valeur de l'intégrale définie avec une approximation suffisante, et l'on a établi dans ce but diverses formules, où l'on s'est proposé d'obtenir la plus grande approximation possible avec le moins de calculs possible. Nous donnerons ici seulement la *formule de Simpson*, comme réunissant ces deux conditions et étant d'un emploi très-commode.

314. Remarquons, d'abord, que l'intégrale définie

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

a et b étant des quantités données, représente l'aire de la courbe plane qui a pour équation, en coordonnées rectangulaires, $y=f(x)$, terminée aux ordonnées qui répondent aux abscisses a et b. Les considérations qui conduisent à une valeur approchée de cette aire plane fourniront donc aussi une valeur approchée de l'intégrale proposée. Cela posé, soit $P_0M_0M_{2n}P_{2n}$

l'aire dont il s'agit. Partageons la portion $P_0P_{2n}=b-a$ de l'axe des x en un nombre pair $2n$ de parties égales Δx, et par les points de division P_1, P_2, P_3... élevons les ordonnées correspondantes M_1P_1, M_2P_2, M_3P_3..., qui partageront cette aire en $2n$ segments, d'autant plus petits que n sera plus grand. Soient $y_0=M_0P_0$, $y_1=M_1P_1$,... $y_{2n}=M_{2n}P_{2n}$. Considérons deux segments consécutifs $P_0M_0M_1P_1$, $P_1M_1M_2P_2$: la méthode de Simpson consiste à remplacer, dans l'évaluation de la somme de ces segments, l'arc de courbe $M_0M_1M_2$ par un arc de parabole passant par les points M_0, M_1, M_2, et de plus, tangent en M_1 à une droite parallèle à la corde M_0M_2. Cela est toujours possible, car si l'on prend cette tangente et le diamètre correspondant M_1P_1 pour axes coordonnés, l'équation de la parabole devra être de la forme $y^2=2px$, et en déterminant p de manière à faire passer la courbe par le point M_2, elle passera aussi par le point M_0, et remplira toutes les conditions.



Or, si l'on admet que cette parabole se confonde sensiblement avec la courbe entre M_0 et M_2, ce qui aura lieu si Δx est assez petit, l'aire $P_0M_0M_1M_2P_2$ se composera de deux parties, l'aire du trapèze $P_0M_0M_2P_2$ qui est égale à

$$\Delta x(y_0+y_2),$$

et celle du segment parabolique $M_0M_1M_2$, égale, d'après le n° 272, aux deux tiers du parallélogramme construit sur la corde M_0M_2 et sur la flèche M_1N, c'est-à-dire à

$$\frac{2}{3}2\Delta x\left(y_1-\frac{y_0+y_2}{2}\right)=\frac{\Delta x}{3}(4y_1-2y_0-2y_2).$$

Donc

$$surf.\ P_0M_0M_1M_2P_2=\frac{\Delta x}{3}(y_0+4y_1+y_2).$$

En évaluant de même les couples de segments $P_2M_2M_4P_4$,... par la substitution d'arcs de paraboles aux arcs de courbe, et faisant la somme de tous les segments, on trouvera

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{\Delta x}{3}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+\cdots+\Delta y_{2n-1}+y_{2n}),$$

ou enfin, en observant que $b-a=2n\Delta x$,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{6n}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+\cdots+2y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n}).$$

Telle est la formule de Simpson. On pourrait, par l'emploi de la formule de Taylor, déterminer les limites de l'erreur commise lorsque l'on prend un nombre donné $2n$ de divisions, mais l'application de la formule de Simpson au calcul approché d'intégrales définies déjà connues suffira pour convaincre de son exactitude.

Exercices.

1. Calculer, avec dix divisions, l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} = 0,7853981....$$

R. On a ici

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $\Delta x = 0,1$; $y_0 = 1$; $y_1 = 0,99010$; $y_2 = 0,96154$; $y_3 = 0,91743$; $y_4 = 0,86207$; $y_5 = 0,80000$; $y_6 = 0,73529$; $y_7 = 0,67114$; $y_8 = 0,60976$; $y_9 = 0,55249$; $y_{10} = 0,50000$.

$$[y_0 + y_{10} = 1,5] + [4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) = 15,72464]$$
$$+ [2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) = 6,33732] = 23,56196.$$

$$\log \frac{\Delta x}{3} = -2,5228787; \qquad \log 23,56196 = 1,3722120.$$

$$\log \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = 0,8950907 - 1; \qquad \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = 0,78540.$$

Erreur commise 0,000002....

2. Calculer, avec 10 divisions, l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \text{l. } 2 = 0,693147.$$

R. 0,69315, erreur $<$ 0,00001.

3. Calculer, avec dix divisions, l'intégrale

$$\int_{10}^{20} \log x \, dx = 11,6776552.$$

R. La formule donne 11,67765, erreur $<$ 0,00001.

4. Calculer, avec 10 divisions, l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{\text{l. }(1+x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8} \text{ l. } 2 = 0,27219826.$$

R. 0,27220, erreur $<$ 0,00001.

LIVRE CINQUIÈME.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

CHAPITRE XXXVI.

DÉFINITION ET GÉNÉRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

315. L'objet du calcul intégral, ainsi qu'on l'a vu au n° 215, est de remonter, des relations données entre les variables et leurs différentielles, aux relations qui existent entre les variables elles-mêmes. On nomme *équations différentielles* ces équations qui renferment à la fois les variables et leurs différentielles : celles qu'on en déduit entre les seules variables, se nomment leurs *intégrales*. Le problème de l'intégration présente différents cas, que nous étudierons successivement : 1° Deux variables x et y peuvent être liées entr'elles par une équation renfermant la dérivée de y par rapport à x : c'est ce que l'on nomme une *équation différentielle du premier ordre*. Elle est de la forme

$$\mathrm{f}\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0.$$

Si la dérivée de y n'y entre qu'à la première puissance, auquel cas l'équation se ramène à la forme

$$\frac{dy}{dx}=\mathrm{f}(x, y),$$

l'équation est du premier ordre et *du premier degré*. La fonction f peut ne pas renfermer y; la dérivée de y est alors donnée en fonction de x seul : on retombe sur le problème que nous avons traité au livre précédent.

2° Si l'équation différentielle entre x et y renferme des dérivées d'un

ordre supérieur au premier, soit *n* l'ordre de la plus haute dérivée qui y entre : l'équation différentielle est dite *de l'ordre n*. Elle est de la forme

$$f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\dots,\ \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0.$$

3° Enfin, plusieurs fonctions d'une même variable indépendante peuvent être définies par un nombre égal d'équations renfermant, avec les variables, les dérivées de ces fonctions jusqu'à un ordre quelconque. On a alors un *système d'équations différentielles simultanées*.

Outre ces équations dans lesquelles les variables dépendent d'une seule, et que l'on nomme équations différentielles *ordinaires*, il en existe d'autres, déterminant une fonction de plusieurs variables indépendantes par une relation entre ses différentielles *totales* ou *partielles* et les différentielles des variables. Nous ne nous en occuperons pas ici.

316 On peut concevoir la formation des équations différentielles d'une manière qui jette certaine lumière sur la nature de leurs intégrales. Soit

$$(1)\qquad F(x, y, C)=0$$

une équation entre deux variables x, y, renfermant en outre une constante C. L'équation que l'on obtient en différentiant la précédente,

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx}=0,$$

renfermera encore, en général, la constante C; mais si l'on élimine C entre les deux équations, il en résultera une troisième équation

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0,$$

qui renfermera la dérivée de y, mais sera indépendante de C. Cette équation aura donc lieu entre x, y, et $\frac{dy}{dx}$, indépendamment de toute valeur particulière attribuée à la constante C dans l'équation (1); en d'autres termes, elle exprimera une propriété commune à toutes les courbes que l'on déduit de l'équation (1), par la variation du paramètre C. Par exemple, l'équation

$$y^2-2Cx-C^2=0$$

donne par différentiation

$$y\frac{dy}{dx}-C=0,$$

et l'élimination de C conduit à l'équation différentielle

$$y^2 - 2xy\frac{dy}{dx} - y^2\frac{dy^2}{dx^2} = 0,$$

à laquelle satisfont toutes les paraboles comprises dans l'équation primitive, et correspondant aux diverses valeurs de la constante arbitraire C.

317. De la même manière, si l'on a une équation renfermant deux constantes arbitraires

$$F(x, y, C, C') = 0,$$

en la différentiant deux fois de suite, on pourra éliminer C et C′ entre les deux nouvelles équations et l'équation primitive. On formera ainsi une équation

$$f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0,$$

qui sera du second ordre par rapport à y, mais qui ne dépendra plus des constantes C et C′.

Et en général, soit $F(x, y, C, C', C'',\ldots) = 0$ une équation entre x et y renfermant n constantes arbitraires. Joignant à cette relation les n équations qu'on en déduit par n différentiations successives, on aura $n+1$ équations entre lesquelles il sera possible d'éliminer les n constantes C, C′, C″,... On formera donc une équation différentielle de l'ordre n,

$$f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ldots,\ \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

ne renfermant plus ces constantes, et à laquelle satisfera toute fonction y de x déterminée par l'équation primitive, quelques valeurs qu'on attribue à C, C′, C″,...

On arrive donc à cette conclusion importante : une équation entre deux variables x, y, renfermant n constantes arbitraires, peut être remplacée par une équation différentielle de l'ordre n, qui a *au moins* la même généralité, et ne renferme plus aucune de ces constantes.

Nous devons donc nous attendre à voir reparaître, dans les intégrales des équations différentielles, ces constantes arbitraires qui ont disparu par élimination.

318. L'élimination de n constantes entre une équation et ses n premières dérivées peut évidemment se faire de bien des manières différentes; mais, quelle que soit la voie suivie pour opérer ce calcul, l'équation diffé-

rentielle finale sera toujours la même. En effet, considérons par exemple une équation $F(x, y, C, C') = 0$ qui renferme deux constantes arbitraires C et C′, et d'où l'on déduit l'équation du second ordre

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0.$$

Si l'on prend pour x une valeur déterminée, on peut encore choisir arbitrairement les valeurs correspondantes de y et de $\frac{dy}{dx}$ tirées de l'équation $F = 0$, puisqu'il suffit de satisfaire à deux équations au moyen des indéterminées C et C′. Mais, une fois C et C′ déterminés, l'équation $F = 0$ détermine complètement la fonction y de la variable x, ainsi que ses dérivées du premier et du second ordre. Ainsi, la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ se trouve complètement déterminée lorsque l'on se donne les quantités x, y, $\frac{dy}{dx}$, qui peuvent d'ailleurs être choisies arbitrairement : elle est donc une fonction déterminée de ces quantités, et l'équation

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0,$$

qui exprime la relation entre ces quatre quantités, ne peut, quelque forme qu'elle affecte, conduire qu'à une même expression de $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Ce raisonnement s'étend sans difficulté à une équation renfermant n constantes arbitraires.

Exercices.

1. Éliminer C de l'équation

$$y = Cx + \sqrt{1 + C^2}. \qquad \text{R.} \quad y = x\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

2. Éliminer C et C′ de l'équation

$$y - Cx^2 - C'x = 0. \qquad \text{R.} \quad x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0.$$

3. Eliminer les constantes C et C′ de l'équation

$$xy = Ce^x + C'e^{-x}. \qquad \text{R.} \quad x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - xy = 0.$$

4. Former l'équation différentielle du troisième ordre entre les coordonnées rectangulaires d'un cercle de centre et de rayon quelconques.

R. L'équation du cercle étant mise sous la forme

$$(x - C)^2 + (y - C')^2 = C''^2,$$

l'élimination des arbitraires C, C', C'' conduit à l'équation du troisième ordre

$$\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0.$$

5. Eliminer les constantes arbitraires C, C', α, α', de l'équation

$$y = Ce^{\alpha x} + C'e^{\alpha' x}.$$

R. On obtient l'équation différentielle du quatrième ordre

$$y\left[\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^4y}{dx^4} - \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2\right] + \frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{dy}{dx}\frac{d^4y}{dx^4}\right) + \frac{d^2y}{dx^2}\left[\frac{dy}{dx}\frac{d^3y}{dx^3} - \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\right] = 0.$$

6. Former l'équation différentielle du 5me ordre à laquelle satisfont toutes les lignes du second ordre

$$Cy^2 + C'xy + C''x^2 + C'''y + C^{\text{IV}}x + 1 = 0.$$

R. $$9\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\frac{d^5y}{dx^5} - 45\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^3y}{dx^3}\frac{d^4y}{dx^4} + 40\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^3 = 0.$$

CHAPITRE XXXVII.

EXISTENCE ET PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE D'UNE ÉQUATION DU PREMIER ORDRE ET DU PREMIER DEGRÉ.

319. Considérons en premier lieu une équation différentielle de la forme

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

et avant de nous occuper des procédés d'intégration, cherchons si elle admet une intégrale. Au point de vue analytique, l'équation (1) fournit l'expression de la dérivée d'une fonction inconnue, au moyen de la variable et de la fonction elle-même, et il s'agit de remonter de cette relation à l'expression même de la fonction. Au point de vue géométrique, où l'on considère x et y comme les coordonnées rectangulaires d'une courbe, l'équation (1) donne la direction de la tangente à la courbe en fonction des coordonnées du point de contact, et l'on doit tirer de là le tracé de la courbe. Or, cette construction peut se concevoir comme il suit :

Pour une valeur x_0 de la variable, assignons à y une valeur *arbitraire* y_0,

et admettons que, pour toutes les valeurs de x depuis x_0 jusqu'à une valeur donnée x, et pour toutes les valeurs possibles de y, les fonctions

$$\mathrm{f}(x, y), \qquad \frac{df}{dx} = \varphi(x, y), \qquad \frac{df}{dy} = \psi(x, y)$$

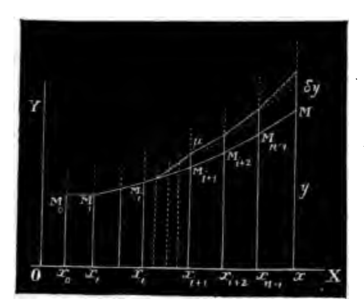
restent continues, à détermination simple, et numériquement inférieures à des quantités données A, B, C. Concevons que l'on passe de x_0 à x par une suite d'accroissements infiniment petits $h_0, h_1, \ldots, h_{n-1}$, et que l'on calcule successivement les accroissements correspondants de y, à partir de y_0, par la formule

$$(2) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \mathrm{f}(x, y).$$

On obtiendra ainsi une suite de points $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2), \ldots$, $M_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})$, $M(x, y)$, bien déterminés, puisque l'on a

$$(3)\begin{cases} x_1 = x_0 + h_0, \quad x_2 = x_1 + h_1, \ldots, \quad x = x_{n-1} + h_{n-1}; \\ y_1 = y_0 + \mathrm{f}(x_0, y_0)\,h_0,\ y_2 = y_1 + \mathrm{f}(x_1, y_1)\,h_1, \ldots, y = y_{n-1} + \mathrm{f}(x_{n-1}, y_{n-1})\,h_{n-1}. \end{cases}$$

Étant joints deux-à-deux, ces points formeront un polygone infinitésimal $M_0M_1M_2\ldots M_{n-1}M$ dans lequel le coefficient angulaire d'un côté quelconque sera donné par l'équation (2), et, lorsque les divisions $h_0, h_1\ldots$ de l'axe des x tendront vers zéro, n croissant indéfiniment, ce polygone tendra à se confondre avec une courbe déterminée, satisfaisant à l'équation différentielle (1).



320. Pour le démontrer, admettons d'abord que l'on partage un élément quelconque h_i en un nombre quelconque de parties plus petites, désignées en général par ε, et calculons la variation $\delta y_{i+1} = M_{i+1}\mu$ qu'éprouvera, par suite de cette opération, l'ordonnée y_{i+1} qui répond à l'abscisse x_{i+1}. Comme on passe du point M_i au point μ par une suite d'opérations semblables aux opérations (3) qui nous ont conduit du point M_0 au point M, on aura évidemment,

$$(4) \qquad y_{i+1} + \delta y_{i+1} = y_i + \Sigma\, \mathrm{f}(x_i + \alpha, y_i + \beta)\cdot\varepsilon,$$

$x_i+\alpha$, $y_i+\beta$ étant les coordonnées d'un sommet quelconque du nouveau polygone construit entre x_i et x_{i+1}. Il suit de là que l'on a

$$(y_{i+1} + \delta y_{i+1}) - y_i < \Sigma A\varepsilon = A\Sigma\varepsilon = Ah_i,$$

le *signe d'inégalité se rapportant, comme dans tout ce qui suit, aux valeurs absolues des quantités.* Et comme le même raisonnement s'applique *a fortiori* aux diverses ordonnées comprises entre y_i et y_{i+1}, on a nécessairement

$$\alpha < h_i, \qquad \beta < Ah_i,$$

d'où il suit que α et β seront infiniment petits en même temps que h_i. D'après cela, on aura par la formule de Taylor

$$f(x_i + \alpha, y_i + \beta) = f_i + \varphi_i \alpha + \psi_i \beta \text{ (1)},$$

et l'équation (4) donnera

$$y_{i+1} + \delta y_{i+1} = y_i + f_i h_i + \Sigma(\varphi_i \alpha + \psi_i \beta)\varepsilon,$$

d'où, comme on a, par les équations (3), $y_{i+1} = y_i + f_i h_i$,

$$\delta y_{i+1} = \Sigma\varepsilon(\varphi_i \alpha + \psi_i \beta) = h_i M(\varphi_i \alpha + \psi_i \beta) < h_i(Bh_i + CAh_i),$$

d'où, enfin,

$$(5) \qquad \delta y_{i+1} < h_i^2(B + CA).$$

321. Après avoir ainsi déterminé une limite supérieure de δy_{i+1}, calculons les variations qu'éprouvent, par suite de la variation de y_{i+1}, les ordonnées suivantes $y_{i+2}, \ldots, y$, et les directions des côtés du polygone à partir du point M_{i+1}. La variation δf_{i+1} du coefficient angulaire du côté $M_{i+1} M_{i+2}$, produite par la variation δy_{i+1} de l'ordonnée du point M_{i+1}, a évidemment pour expression

$$\delta f_{i+1} = \psi(x_{i+1}, y_{i+1})\,\delta y_{i+1},$$

et d'autre part, un coup d'œil jeté sur la figure montre que l'on a

$$\delta y_{i+2} = \delta y_{i+1} + h_{i+1} \cdot \delta f_{i+1} = \delta y_{i+1}(1 + h_{i+1}\psi_{i+1}).$$

On aura de même

$$\delta y_{i+3} = \delta y_{i+2}(1 + h_{i+2}\psi_{i+2}), \ldots, \quad \delta y = \delta y_{n-1}(1 + h_{n-1}\psi_{n-1}),$$

d'où

$$\delta y = \delta y_{i+1}(1 + h_{i+1}\psi_{i+1})(1 + h_{i+2}\psi_{i+2}) \ldots (1 + h_{n-1}\psi_{n-1}).$$

Les facteurs qui multiplient δy_{i+1} peuvent être supposés positifs, les h_i étant très-petits; d'autre part, on a, quel que soit z,

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{1 \cdot 2} e^{\theta z} > 1 + z,$$

(1) Nous posons, pour simplifier, $f(x_i, y_i) = f_i$, $\varphi(x_i, y_i) = \varphi_i$, etc.

d'où

$$(1+h_{i+1}\psi_{i+1})\cdots(1+h_{n-1}\psi_{n-1}) < e^{h_{i+1}\psi_{i+1}+\cdots+h_{n-1}\psi_{n-1}}.$$

Mais nous avons

$$h_{i+1}\psi_{i+1}+\cdots+h_{n-1}\psi_{n-1}=(x-x_{i+1})\,\mathrm{M}(\psi_{i+1},\ldots,\ \psi_{n-1}) < \mathrm{C}(x-x_0),$$

d'où

$$(1+h_{i+1}\psi_{i+1})\ldots(1+h_{n-1}\psi_{n-1}) < e^{\mathrm{C}(x-x_0)},$$

d'où enfin, en ayant égard à la relation (5),

$$\delta y < h_i^2(\mathrm{B}+\mathrm{CA})\,e^{\mathrm{C}(x-x_0)},$$

ou, en désignant par P la quantité finie et déterminée $(\mathrm{B}+\mathrm{CA})\,e^{\mathrm{C}(x-x_0)}$,

$$\delta y < h_i^2\,\mathrm{P}.$$

On a donc une limite supérieure de la variation qu'éprouve l'ordonnée y lorsque l'on subdivise l'un des éléments $h_0, h_1, \ldots, h_{n-1}$ en autant de parties qu'on le veut. Nous avons dans ce calcul, considérant h_i comme infiniment petit, négligé les quantités d'ordre supérieur à celles que nous voulions calculer, mais le calcul exact ne changerait les valeurs de f_i, φ_i, ψ_i, $\psi_{i+1}, \ldots$ que de quantités tendant vers zéro avec h_i, et il est facile de s'assurer que cela ne modificrait en rien la conclusion.

Supposons maintenant que l'on répète la même subdivision sur chacun des éléments $h_0, h_1, \ldots, h_{n-1}$; comme P est indépendant du nombre des éléments existants, y éprouvera successivement une suite de variations respectivement inférieures à $\mathrm{P}h_0^2, \mathrm{P}h_1^2, \ldots, \mathrm{P}h_{n-1}^2$, et dont la somme sera

$$\delta y < \mathrm{P}(h_0^2+h_1^2+\cdots+h_{n-1}^2)=\mathrm{P}(x-x_0)\,\mathrm{M}(h_0, h_1, \ldots, h_{n-1}).$$

Ainsi, les éléments $h_0, h_1, \ldots, h_{n-1}$ étant considérés comme infiniment petits, la variation totale qu'éprouvera l'ordonnée y, correspondante à l'abscisse x, lorsque l'on subdivisera chacun de ces éléments en autant de parties que l'on voudra, sera elle-même infiniment petite : ce qui indique évidemment que l'ordonnée y tend vers une limite fixe quand les éléments h_i décroissent indéfiniment. La même chose a lieu, évidemment, pour l'ordonnée correspondante à une abscisse quelconque entre x_0 et x, et pour les valeurs correspondantes de $\mathrm{f}(x, y)$, en sorte que les côtés du polygone tendent aussi vers des directions fixes.

322. *Remarques.* 1° Le lieu des points limites des sommets du polygone est indépendant de la loi suivant laquelle on partage l'intervalle $x-x_0$ en éléments infiniment petits $h_0, h_1, \ldots, h_{n-1}$. Car deux modes de division qui

se rapportent à des lois différentes peuvent toujours être renfermés dans un même troisième qui sera comme une subdivision des deux premiers. L'ordonnée y calculée par le troisième mode différera de chacune des ordonnées y calculées par les deux premiers modes, de quantités qui seront, d'après ce que nous venons de voir, de l'ordre des divisions; elle tendra donc vers la même limite que chacune d'elles : celles-ci ont donc même limite.

2° Les conditions relatives aux fonctions $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ ont été, pour plus de facilité, supposées satisfaites entre les valeurs x_0 et x de la variable x, *quel que soit* y ; mais tout ce qui précède subsistera si les fonctions vérifient ces conditions entre certaines valeurs $x_0 \pm a$ de x, $y_0 \pm b$ de y, pourvu qu'on ait en outre $Aa < b$, condition qui sera toujours satisfaite en réduisant convenablement la valeur de a, et $x - x_0 < a$. En effet, les équations (3) nous donnant toujours

$$y_i - y_0 = (x_i - x_0)\,M\,[f(x_0, y_0), f(x_1, y_1), \dots, f(x_{i-1}, y_{i-1})],$$

on verra sans peine que si $y_0, y_1, \dots, y_{i-1}$ sont compris entre $y_0 \pm b$, f_0, $f_1, \dots, f_{i-1}$ étant inférieurs à A, $y_i - y_0$ sera moindre que Aa ou b, y_i sera donc encore compris entre $y_0 \pm b$, et ainsi de suite. Donc $y_0, y_1, \dots, y$ restant toujours compris entre ces limites, les conditions exigées pour les fonctions f, φ, ψ dans notre démonstration seront toujours satisfaites.

3° Le lieu des points-limites des sommets du polygone $M_0M_1 \dots M_{n-1}M$ est une courbe continue dont les coordonnées satisfont à l'équation différentielle proposée. Car, désignons par x, $x + \Delta x$ deux valeurs quelconques de la variable; par y, $y + \Delta y$ les ordonnées de la courbe limite qui leur correspondent, et concevons que l'on passe de la première valeur y, à la seconde, en faisant passer la variable de x à $x + \Delta x$ par un nombre indéfiniment croissant de valeurs intermédiaires. L'ordonnée $y + \Delta y$ sera déterminée d'après la même loi que l'ordonnée $y_{i+1} + \delta y_{i+1}$ au n° 320, et, en appliquant les formules (4) et (5) de ce numéro, on voit sans peine que

$$y + \Delta y = y + f(x, y)\,\Delta x + \omega,$$

ω étant une quantité moindre que $\Delta x^2\,(B + CA)$; d'où

$$\Delta y = f(x, y)\,\Delta x + \omega.$$

Si l'on regarde maintenant Δx comme infiniment petit, Δy sera infiniment petit : la courbe, limite du polygone, est donc *une courbe continue*.

Ensuite, divisan par Δx et passant à la limite, on trouve

$$lim.\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x, y),$$

ce qui fait voir que le coefficient angulaire de la tangente à la courbe est déterminé, en fonction des coordonnées x, y, par l'équation (1).

323. Il résulte évidemment de tout cela que, l'équation différentielle (1) étant donnée, il existe toujours une fonction y de x propre à satisfaire à cette équation, et de plus, à prendre pour une valeur donnée x_0 de la variable, une valeur choisie arbitrairement y_0, pourvu que les fonctions f, φ, ψ, soient continues par rapport à x et à y dans le voisinage du point (x_0, y_0). D'ailleurs, dès que y_0 est fixé, la courbe ou l'intégrale se trouve bien déterminée, comme nous l'avons fait voir : elle est donc une fonction déterminée de y_0, qui entrera conséquemment dans l'expression de l'intégrale comme une *constante arbitraire*. En d'autres termes, l'intégrale d'une équation différentielle donnée ne peut avoir toute la généralité qu'elle comporte, si elle ne renferme, avec la variable x, une constante arbitraire C non comprise dans l'équation différentielle, et à l'aide de laquelle on peut faire prendre à y une valeur arbitraire y_0, pour une valeur donnée de x : ce qui revient à faire passer la courbe par un point donné. Cette intégrale $y = F(x, C)$ se nomme l'*intégrale générale* de l'équation (1) : toutes celles qu'on en tire par des valeurs particulières attribuées à la constante C sont des *intégrales particulières*. L'élimination de C entre l'intégrale générale et sa dérivée ramènerait identiquement l'équation différentielle (1), comme on l'a établi (318).

324. Réciproquement, *toute courbe qui vérifie l'équation différentielle proposée doit dériver de l'intégrale générale par une valeur déterminée attribuée à la constante arbitraire* C : car, si l'on dispose de celle-ci de manière à ce que, pour une valeur x_0 de la variable, l'ordonnée de l'intégrale générale coïncide avec l'ordonnée y_0 de la courbe proposée, comme la courbe qni part d'un point donné (x_0, y_0) et qui satisfait à l'équation (1) est parfaitement déterminée (322), ces deux courbes coïncideront nécessairement dans toute leur étendue.

Il y a toutefois une exception remarquable à cette loi : il peut se faire que, par le point (x_0, y_0) passent deux courbes tangentes l'une à l'autre en ce point, et satisfaisant toutes deux à l'équation différentielle. Et comme

la construction exposée plus haut n'en donne qu'une seule, il semble que la théorie générale se trouve ici en défaut. Mais, dans ce cas, il est facile de voir que, dans le voisinage du point (x_0, y_0), les conditions de continuité relatives à $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$, ne seront plus remplies; puisque, pour une abscisse $x_0 + \Delta x_0$ infiniment voisine de x_0, la différence des ordonnées des deux courbes, sera, en général, du second ordre par rapport à Δx_0, à moins que $\mathrm{f}(x_0, y_0)$ ne soit infini, tandis que les tangentes aux deux courbes feront entr'elles un angle infiniment petit de même ordre que Δx_0 (1). Un accroissement δy de la variable y détermine donc un accroissement $\delta \mathrm{f}$ de la fonction f qui est infiniment grand par rapport à lui, dans le voisinage du point (x_0, y_0), et par suite, la fonction $\frac{d\mathrm{f}}{dy} = \psi(x, y)$ est infinie en ce point. Elle n'est donc pas continue.

Si cette exception ne se présente qu'en certains points particuliers du plan, elle n'influera pas sur l'exactitude du théorème énoncé plus haut, puisqu'il suffira de choisir le point (x_0, y_0) sur la courbe donnée, de manière à ce qu'il ne coïncide pas avec un de ces points particuliers, pour démontrer l'identité de la courbe avec une des intégrales particulières de l'équation. Mais s'il arrive, comme on peut très bien le concevoir, qu'une courbe soit tangente, en chacun de ses points, à celle des intégrales particulières comprises dans l'équation $y = \mathrm{F}(x, \mathrm{C})$ qui passe par ce point, cette courbe vérifiera l'équation différentielle, puisqu'elle aura, en chacun de ses points, mêmes valeurs de x, y, $\frac{dy}{dx}$ qu'une courbe qui y satisfait. Et cependant, généralement, elle ne sera pas comprise dans l'intégrale générale, celle-ci ne déterminant pour chaque point donné du plan qu'une courbe, qui est une intégrale particulière. Une telle intégrale, qui vérifie l'équation différentielle sans être comprise dans l'intégrale générale, se nomme une *solution singulière*.

On voit par là qu'une solution singulière satisfait aux conditions suivantes, qui serviront à la déterminer : 1° elle représente une courbe qui est tangente à toutes les intégrales particulières, et qui en est conséquemment le lieu des points d'arrêt, de rebroussement ou d'inflexion [elle ne saurait en être l'enveloppe proprement dite, car pour cela les intégrales

(1) Plus généralement, la différence des ordonnées sera infiniment petite par rapport à l'angle des tangentes correspondantes (163).

particulières devraient se couper généralement deux à deux; $f(x, y)$ admettrait donc au moins deux valeurs en un même point (x, y) du plan]; 2° la solution singulière satisfait, en chacun de ses points, à l'équation $f(x, y) = \infty$, ce qui ne peut convenir qu'à une droite parallèle à l'axe des y; ou à l'équation $\psi(x, y) = \infty$.

Soit, comme exemple, l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = 1 - (y - x)^{\frac{1}{3}}.$$

Elle a pour intégrale générale, comme on le vérifie aisément,

$$y = x + \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} (C - x)^{\frac{3}{2}},$$

et en outre, elle admet la solution singulière $y = x$, qui satisfait à l'équation différentielle et ne peut coïncider avec l'intégrale générale pour aucune valeur constante de C. Or, on a ici

$$\psi(x, y) = -\frac{1}{3}(x - y)^{-\frac{2}{3}},$$

et cette fonction devient infinie par l'hypothèse $y = x$. On voit facilement que la droite $y = x$ est le lieu des points de rebroussement des courbes que l'on tire de l'intégrale générale par la variation du paramètre C (1).

CHAPITRE XXXVIII.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE ET DU PREMIER DEGRÉ PAR DIVERS PROCÉDÉS.

325. L'équation du premier ordre et du premier degré

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

est toujours réductible à la forme suivante :

$$(1) \qquad P\,dx + Q\,dy = 0,$$

(1) La théorie complète des solutions singulières trouvera place dans la seconde partie de ce cours.

P et Q désignant, en général, des fonctions données de x et de y. Il y a un cas où l'équation (1) s'intègre immédiatement : c'est celui où l'on reconnaît dans son premier membre la *différentielle totale exacte* d'une fonction $F(x, y)$ des variables x, y, en sorte que l'on a identiquement

$$P\,dx + Q\,dy = d.F(x, y).$$

En effet, l'équation (1) peut alors s'écrire sous la forme $d.F(x,y)=0$, et pour y satisfaire, il est nécessaire et suffisant que l'on pose

$$F(x, y) = C,$$

C étant une constante arbitraire. Cette équation renferme donc toutes les solutions possibles de l'équation (1), et en est l'intégrale générale.

Par exemple, l'équation

$$\left(x - \frac{y}{x^2+y^2}\right)dx + \left(y + \frac{x}{x^2+y^2}\right)dy = 0$$

mise sous la forme

$$x\,dx + y\,dy + \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = 0,$$

devient évidemment

$$\frac{1}{2}\,d\,(x^2+y^2) + \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\,d\left(\frac{y}{x}\right) = 0,$$

et son intégrale générale est

$$\frac{1}{2}(x^2+y^2) + \text{arc tg}\,\frac{y}{x} = C.$$

326. Il est rare que l'on aperçoive ainsi de prime abord une fonction $F(x, y)$ dont $P\,dx + Q\,dy$ est la différentielle exacte, mais il suffit qu'elle existe pour que l'intégration de l'équation (1) soit ramenée aux quadratures. En effet, si $P\,dx + Q\,dy$ est la différentielle totale d'une fonction $F(x, y)$ des variables, on a

$$P = \frac{dF}{dx}, \quad Q = \frac{dF}{dy}, \quad \frac{d^2F}{dydx} = \frac{d^2F}{dxdy},$$

et par suite

$$(2) \qquad \frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx},$$

abstraction faite de toute relation entre x et y.

Réciproquement, si P et Q vérifient la condition (2), la fonction F existe

et nous allons la déterminer. Sa dérivée *partielle* par rapport à x étant P, la fonction F est nécessairement comprise dans l'intégrale de $P\,dx$ par rapport à x, y étant considéré comme constant, et la constante arbitraire de l'intégration devant être remplacée, par conséquent, par une fonction arbitraire $\varphi(y)$ de y seul. On aura donc

$$F = \int P\,dx + \varphi(y) = P_1 + \varphi(y),$$

et il ne reste plus qu'à déterminer $\varphi(y)$, si cela est possible, de manière à satisfaire à la seconde condition

$$Q = \frac{dF}{dy}.$$

On déduit de cette équation, évidemment,

$$\varphi'(y) = Q - \frac{dP_1}{dy},$$

et pour que cette équation soit possible, $\varphi(y)$ ne renfermant pas x, il faut et il suffit évidemment que le second membre soit aussi indépendant de x, ou que sa dérivée partielle par rapport à x soit nulle identiquement. Or, on a

$$\frac{d}{dx}\left(Q - \frac{dP_1}{dy}\right) = \frac{dQ}{dx} - \frac{d}{dx}\left(\frac{dP_1}{dy}\right) = \frac{dQ}{dx} - \frac{d}{dy}\left(\frac{dP_1}{dx}\right) = \frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy},$$

puisque $P_1 = \int P dx$. Le dernier membre de l'équation se réduit à zéro, P et Q satisfaisant à l'équation (2); donc la condition est satisfaite, la variable x n'entre pas dans l'expression de $\varphi'(y)$, et la fonction φ sera donnée par l'équation

$$\varphi(y) = \int \left(Q - \frac{dP_1}{dy}\right) dy.$$

Substituant sa valeur dans l'expression de la fonction F, et égalant celle-ci à une constante arbitraire, on obtient l'intégrale générale de l'équation proposée :

$$(3) \qquad \int P\,dx + \int \left(Q - \frac{dP_1}{dy}\right) dy = C,$$

la première intégration étant relative à x seul, la seconde à y seul.

Ainsi, la *condition nécessaire et suffisante pour que* $P\,dx + Q\,dy$ *soit une différentielle exacte en* x *et* y *est exprimée par l'équation* (2), *et quand cette condition est satisfaite, l'équation* (3) *fournit l'intégrale de l'équation différentielle proposée.*

Soit, comme exemple, l'équation

$$(x^2 - 4xy - 2y^2)\,dx + (y^2 - 4xy - 2x^2)\,dy = 0.$$

On a ici

$$\frac{dP}{dy} = -4x - 4y = \frac{dQ}{dx};$$

$$\int P\,dx = P_1 = \frac{x^3}{3} - 2x^2y - 2y^2x, \qquad Q - \frac{dP_1}{dy} = y^2;$$

l'intégrale de l'équation est

$$\frac{x^3}{3} - 2x^2y - 2xy^2 + \frac{y^3}{3} = C.$$

327. Il y a un cas remarquable où l'on reconnait immédiatement que le premier membre de l'équation (1) est une différentielle exacte : c'est celui où le coefficient de dx ne renferme que x, et celui de dy que y; l'équation est donc de la forme

$$(4) \qquad X\,dx + Y\,dy = 0,$$

X, Y désignant respectivement des fonctions de x seul et de y seul. On dit alors que *les variables sont séparées*. La condition (2) est évidemment satisfaite, car $D_yX = D_xY = 0$, et d'ailleurs il suffit de poser

$$\int X\,dx + \int Y\,dy = C$$

pour obtenir l'intégrale générale de l'équation (4), d'après ce qu'on a vu au n° 325. Ainsi le problème se ramène immédiatement aux quadratures. Il est inutile d'ajouter des constantes arbitraires aux intégrales indéfinies qui figurent dans cette équation; elles se trouvent implicitement comprises dans la constante C du second membre.

Le plus souvent, les variables ne sont pas séparées dans l'équation différentielle, mais la multiplication par un facteur convenable conduit à ce résultat. Ainsi, toute équation de la forme

$$X_1Y_1\,dx + X_2Y_2\,dy = 0,$$

X_1, X_2 étant fonctions de x et Y_1, Y_2 de y, divisée par le facteur Y_1X_2, *supposé différent de zéro*, deviendra

$$\frac{X_1}{X_2}\,dx + \frac{Y_1}{Y_2}\,dy = 0,$$

et, les variables étant séparées, l'intégration se fera comme ci-dessus.

Par exemple, l'équation

$$(1 + y^2)(1 + x)\,dx + (1 + x^2)(1 - y)\,dy = 0$$

prendra, par cette transformation, la forme

$$\frac{1+x}{1+x^2}\,dx + \frac{1-y}{1+y^2}\,dy = 0,$$

équation dans laquelle les variables sont séparées. Les termes de cette équation s'intègrent sans difficulté, et l'on a l'intégrale générale

$$\text{arc tg}\, x + \frac{1}{2}\,\text{l.}(1+x^2) + \text{arc tg}\, y - \frac{1}{2}\,\text{l.}(1+y^2) = \text{C},$$

à laquelle on donne facilement la forme suivante :

$$\text{arc tg}\,\frac{x+y}{1-xy} = \text{l.}\,\text{C}_1\sqrt{\frac{1+y^2}{1+x^2}},$$

C_1 désignant une nouvelle constante arbitraire.

328. *Intégration des équations homogènes.* — Lorsque la séparation des variables ne s'effectue pas par le procédé simple qui vient d'être indiqué, on cherche à la réaliser en introduisant au lieu de x et de y, dans l'équation différentielle, deux nouvelles variables ayant avec x et y des relations convenablement choisies. C'est une nouvelle application de la *méthode de substitution*. Quelquefois la substitution ne porte que sur une seule des variables x, y.

Appliquons cette méthode au cas où l'équation du premier ordre

$$(1) \qquad \text{P}\,dx + \text{Q}\,dy = 0$$

est *homogène*, c'est-à-dire où P et Q sont des fonctions homogènes, de même degré m, par rapport à x et à y. On sait qu'une telle fonction jouit de la propriété, étant divisée par x^m, de ne plus dépendre que du rapport de y à x (1). Il suffira donc de diviser toute l'équation (1) par x^m pour lui donner la forme

$$\text{f}\left(\frac{y}{x}\right)dx + \text{f}_1\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0.$$

---

(1) Cette propriété suit immédiatement de la définition des fonctions homogènes (ch. III, ex. 19) ; car, si dans l'équation

$$\text{F}(tx, ty) = t^m\,\text{F}(x, y)$$

on prend l'indéterminée t égale à x^{-1}, on a

$$\text{F}\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^m}\,\text{F}(x, y).$$

Posons, u étant une nouvelle variable,

$$y = ux, \qquad \text{d'où} \qquad dy = u\,dx + x\,du,$$

et éliminons y et dy. Il vient

$$\mathrm{f}(u)\,dx + \mathrm{f}_1(u)(u\,dx + x\,du) = 0,$$

ou

$$[\mathrm{f}(u) + u\,\mathrm{f}_1(u)]\,dx + x\,\mathrm{f}_1(u)\,du = 0,$$

équation où il est facile de séparer les variables. Supposant d'abord $\mathrm{f}(u) + u\mathrm{f}_1(u)$ différent de zéro, et divisant par ce facteur et par x toute l'équation, on a

$$\frac{dx}{x} + \frac{\mathrm{f}_1(u)\,du}{\mathrm{f}(u) + u\,\mathrm{f}_1(u)} = 0,$$

ou, en intégrant,

$$\mathrm{l}.x + \int \frac{\mathrm{f}_1(u)\,du}{\mathrm{f}(u) + u\,\mathrm{f}_1(u)} = \mathrm{C}.$$

On aura donc l'intégrale générale de l'équation proposée en effectuant l'intégration indiquée et remplaçant u par sa valeur $y : x$.

L'hypothèse

$$\mathrm{f}(u) + u\,\mathrm{f}_1(u) = 0$$

que nous avons laissée de côté, fournit pour u un certain nombre de valeurs constantes u_0, u_1,..., qui satisfont à l'équation différentielle entre u et x, puisque u constant donne $du = 0$. On aura donc encore des solutions de l'équation proposée en faisant

$$y = u_0 x, \qquad y = u_1 x, \ldots,$$

et ces intégrales pourront être, soit des intégrales particulières, soit des solutions singulières, ce dont on s'assurera en les comparant à l'intégrale générale.

329. Prenons comme exemple l'équation homogène

$$(\mathrm{A}x + \mathrm{B}y)\,dx + (\mathrm{A}'x + \mathrm{B}'y)\,dy = 0.$$

P et Q sont ici du premier degré, et la transformation indiquée conduit à l'équation

$$[\mathrm{A} + (\mathrm{B} + \mathrm{A}')\,u + \mathrm{B}'u^2]\,dx + x\,(\mathrm{A}' + \mathrm{B}'u)\,du = 0.$$

L'intégrale générale est donc

$$\mathrm{l}.\,x + \int \frac{(\mathrm{A}' + \mathrm{B}'u)\,du}{\mathrm{A} + (\mathrm{B} + \mathrm{A}')\,u + \mathrm{B}'u^2} = \mathrm{C},$$

et la quadrature à effectuer porte sur une différentielle rationnelle; elle n'offrira donc aucune difficulté. Suivant que les racines de l'équation

$$A + (B + A')u + B'u^2 = 0$$

seront réelles et inégales, réelles et égales, ou imaginaires, la forme de l'intégrale sera différente. Bornons-nous au premier cas, et soient a, b les racines réelles de cette équation, en sorte que l'on aura

$$A + (B + A')u + B'u^2 = B'(u - a)(u - b),$$

et, par la décomposition en fractions simples,

$$\frac{A' + B'u}{A + (B + A')u + B'u^2} = \frac{m}{u - a} + \frac{n}{u - b},$$

les constantes m et n étant déterminées par la méthode connue, ou par les équations

$$A' = -B'(mb + na), \qquad 1 = m + n.$$

L'intégrale générale deviendra

$$\text{l}.\,x + m\,\text{l}.\,(u - a) + n\,\text{l}.\,(u - b) = C,$$

ou

$$\text{l}.\,x\,(u - a)^m (u - b)^n = C,$$

ou encore, en remplaçant u par sa valeur et passant des logarithmes aux nombres

$$(y - ax)^m (y - bx)^n x^{1-m-n} = e^C = C',$$

ou enfin, en vertu de l'équation $m + n = 1$,

$$(y - ax)^m (y - bx)^n = C'.$$

Telle est, sous la forme la plus simple, l'intégrale générale de l'équation proposée. Quant aux intégrales

$$y = ax, \qquad y = bx,$$

que l'on obtient en prenant pour u les valeurs a et b qui annulent le trinôme par lequel on a divisé l'équation différentielle, ce sont évidemment des intégrales particulières qui correspondent à $C' = 0$ ou à $C' = \infty$, suivant les signes des exposants m, n. Mais si m ou n était nul, l'une de ces intégrales pourrait être une solution singulière.

330. Si l'équation proposée était

$$(Ax + By + D)\,dx + (A'x + B'y + D')\,dy = 0,$$

on la ramènerait à la forme précédente en posant

$$x = \xi + \alpha, \qquad y = \eta + \beta,$$

ξ, η étant de nouvelles variables, et α, β des constantes. Déterminant α et β par les équations

$$A\alpha + B\beta + D = 0,$$
$$A'\alpha + B'\beta + D' = 0,$$

on trouverait entre ξ et η l'équation différentielle

$$(A\xi + B\eta)\,d\xi + (A'\xi + B'\eta)\,d\eta = 0,$$

qui s'intégrerait par la méthode ci-dessus. Cette transformation serait en défaut si $AB' - BA'$ était nul, mais alors $A'x + B'y$ serait le produit de $Ax + By$ par un facteur constant, et l'on séparerait les variables en posant $Ax + By = z$.

221. *Équation linéaire du premier ordre.* — On appelle ainsi l'équation

$$(5) \qquad \frac{dy}{dx} + Xy = X_1,$$

X et X_1 étant des fonctions explicites de x seul. La séparation des variables s'obtient encore par une substitution. Posons, u et z désignant de nouvelles variables dont une peut être choisie arbitrairement,

$$y = uz, \qquad \text{d'où} \qquad dy = zdu + udz,$$

et par suite

$$(6) \qquad z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx} + Xuz = X_1.$$

La variable z étant quelconque, assujettissons-la à vérifier l'équation

$$\frac{dz}{dx} + Xz = 0,$$

ce qui réduira à zéro le coefficient de u dans l'équation (6), et ramènera celle-ci à la forme

$$z\frac{du}{dx} = X_1.$$

On tire immédiatement de ces deux équations

$$\frac{dz}{z} + X\,dx = 0, \qquad \mathrm{l}.\,z = -\int X\,dx, \qquad z = e^{-\int X dx},$$

et par suite

$$\frac{du}{dx} = X_1 e^{\int X dx}, \qquad u = C + \int X_1 e^{\int X dx} dx.$$

Il faut observer qu'il est inutile de compléter par une constante l'inté-

grale $\int X dx$ qui figure dans l'expression de z, parce qu'il suffit évidemment, pour le but que l'on se propose, de trouver pour z une fonction particulière vérifiant la condition $dz + Xz\,dx = 0$. Remplaçant maintenant u et z par leurs valeurs dans l'expression de y, on trouve, pour l'intégrale générale de l'équation linéaire

$$(7) \qquad y = e^{-\int X dx}\left(C + \int X_1 e^{\int X dx} dx\right).$$

Soit, comme exemple, l'équation

$$\frac{dy}{dx} + y\cos x = \sin x \cos x.$$

On a ici

$$X = \cos x, \qquad X_1 = \sin x \cos x, \qquad \int X\,dx = \sin x,$$

$$\int X_1 e^{\int X dx} dx = \int e^{\sin x} \sin x \cos x\,dx = e^{\sin x}(\sin x - 1),$$

et l'équation (7) nous donne pour l'intégrale générale

$$y = Ce^{-\sin x} + \sin x - 1.$$

332. L'équation

$$\frac{dy}{dx} + Xy = X_1 y^{n+1},$$

dite *de Bernoulli*, se ramène facilement à l'équation linéaire. Il suffit de la diviser par y^{n+1} et de poser $z = y^{-n}$; on a successivement

$$y^{-(n+1)}\frac{dy}{dx} + Xy^{-n} = X_1, \qquad -\frac{1}{n}\frac{d.y^{-n}}{dx} + Xy^{-n} = X_1,$$

$$\frac{dz}{dx} - nXz = -nX_1.$$

Cette équation, linéaire en z, s'intègre par la formule (7), et l'on obtient

$$y^{-n} = e^{n\int X dx}\left(C - n\int X_1 e^{-n\int X dx} dx\right).$$

L'hypothèse $n = -1$ nous ramène à l'équation (6); $n = 0$ rend l'intégrale illusoire, mais l'équation de Bernoulli devient alors

$$\frac{dy}{dx} + (X - X_1)y = 0,$$

et s'intègre sans difficulté par la séparation des variables.

333. *Remarques.* — 1° Parmi les valeurs que l'on peut attribuer à la constante arbitraire pour faire rentrer une intégrale donnée dans l'intégrale générale, on doit comprendre les valeurs $C = +\infty$ et $C = -\infty$, si l'on ne veut laisser échapper aucune intégrale particulière. Il suffit, pour justifier cette observation, de remarquer que si l'on remplace C

par $\frac{1}{C'}$ dans l'intégrale générale, ce qui est évidemment permis, on devra admettre la valeur $C'=0$.

2° L'intégrale générale d'une équation différentielle est susceptible de formes très-variées à cause de la possibilité de remplacer une fonction de la constante C par une nouvelle constante C'. Elle peut même ainsi passer de la forme transcendante à la forme algébrique. Exemple : l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=0$$

a pour intégrale générale

$$\text{arc sin } x + \text{arc sin } y = C.$$

Mais, si l'on transforme le premier membre de celle-ci par la formule qui exprime le sinus de la somme de deux arcs, on a

$$\text{arc sin}\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right)=C,$$

ou

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=\sin C=C',$$

et cette intégrale est algébrique par rapport aux variables x et y. Nous avons vu un autre exemple de cette simplification de l'intégrale générale au n° 329.

3° Le changement de forme de l'intégrale générale ne dépend pas toujours d'une transformation de la constante arbitraire : il arrive que la fonction qui satisfait à l'équation différentielle soit représentée par une expression différente, suivant que les valeurs de la variable sont comprises entre telles ou telles limites. Considérons l'équation linéaire

$$\frac{dy}{dx}+\frac{xy}{1-x^2}=a.$$

On a ici

$$\int X\,dx=\int\frac{x\,dx}{1-x^2}=-\frac{1}{2}\,\text{l}.(1-x^2)=-\text{l}.\sqrt{1-x^2},$$

$$\int X_1 e^{\int X dx}dx=a\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=a\text{ arc sin } x+C,$$

et l'intégrale générale de l'équation est

$$y=\sqrt{1-x^2}\,(C+a\text{ arc sin } x).$$

Mais cette intégrale devient imaginaire si x^2 est >1, quoique l'équation

différentielle reste réelle. En effet, on a alors (224)

$$\int \mathrm{X}\,dx = -\frac{1}{2}\,\mathrm{l.}\,(x^2-1) = -\,\mathrm{l.}\sqrt{x^2-1},$$

$$\int \mathrm{X}_1 e^{\int \mathrm{X}dx} = a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = a\,\mathrm{l.}\,(x+\sqrt{x^2-1}) + \mathrm{C},$$

et l'intégrale générale, pour les valeurs de x non comprises entre -1 et $+1$, prend la forme

$$y = \sqrt{x^2-1}\,[\mathrm{C} + a\,\mathrm{l.}(x+\sqrt{x^2-1})].$$

4° Lorsque, pour intégrer plus facilement une équation différentielle, on la multiplie ou divise par une fonction des variables, il faut prendre garde que l'on peut de cette manière introduire ou supprimer des solutions dans l'équation, comme nous l'avons observé à propos de l'équation homogène. Ainsi l'équation du n° 227

$$\mathrm{X}_1\mathrm{Y}_1\,dx + \mathrm{X}_2\mathrm{Y}_2\,dy = 0$$

est satisfaite par l'hypothèse $\mathrm{Y}_1 = 0$, car les valeurs constantes de y que fournit cette équation donnent $dy = 0$. En divisant l'équation proposée par $\mathrm{X}_2\mathrm{Y}_1$ pour séparer les variables, on fait abstraction de cette hypothèse : on néglige donc des intégrales qui peuvent être, ou particulières, ou singulières. Il y a même des cas où l'hypothèse $\mathrm{X}_2 = 0$, qui donne x constant et $dx = 0$ et vérifie conséquemment l'équation donnée, ne doit pas être négligée : elle correspond géométriquement à des droites parallèles à l'axe des y, et ces droites peuvent répondre à la question géométrique qui a donné lieu à l'équation différentielle.

Exercices.

Vérifier si les équations suivantes satisfont à la condition $\mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy = d\mathrm{F}\,(x,y)$, et les intégrer :

1. $\dfrac{xdx+ydy}{\sqrt{1+x^2+y^2}} + \dfrac{ydx-xdy}{x^2+y^2} = 0.$ R. $y = x\cot(\mathrm{C}-\sqrt{1+x^2+y^2}).$

2. $\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} + \left(1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\dfrac{dy}{y} = 0.$

   R. $x+\sqrt{x^2+y^2} = \mathrm{C},$ ou $y^2 = \mathrm{C}^2 - 2\mathrm{C}x.$

3. $(x^3+3xy^2)\,dx + (y^3+3x^2y)\,dy = 0.$ R. $x^4+6x^2y^2+y^4 = \mathrm{C}.$

4. $\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0.$ R. $x+ye^{\frac{x}{y}}=C.$

Intégrer, par la séparation des variables, les équations

5. $(a^2+y^2)dx-2x\sqrt{ax-a^2}\,dy=0.$ R. $y-\sqrt{ax-a^2}=C(a^2+y\sqrt{ax-a^2}).$

6. $(1+x^2)y^3dx+(1-y^2)x^3dy=0.$ R. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=2\mathrm{l}.\frac{Cx}{y}\cdot$

7. $(1+y^2)\,dx-(y+\sqrt{1+y^2})(1+x^2)^{\frac{3}{2}}dy=0.$

$$\text{R.}\quad \sqrt{1+y^2}\,(y+\sqrt{1+y^2})=Ce^{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}.$$

8. $\sec^2 x\,\mathrm{tg}\,y\,dx+\sec^2 y\,\mathrm{tg}\,x\,dy=0.$ R. $\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y=C.$

9. $y\,\mathrm{l}.y\,dx-dy=0.$ R. $\mathrm{l}.y=Ce^x.$

Intégrer les équations homogènes

10. $x\,dy-y\,dx-dx\sqrt{x^2+y^2}=0.$ R. $x^2=C^2+2Cy.$

11. $(x+y)\,dx+(y-x)\,dy=0.$ R. $\mathrm{arc\,tg}\frac{y}{x}=\mathrm{l}.C\sqrt{x^2+y^2}.$

12. $(8y+10x)\,dx+(5y+7x)\,dy=0.$ R. $(x+y)^2(y+2x)^3=C.$

13. $\left(x-y\cos\frac{y}{x}\right)dx+x\cos\frac{y}{x}\,dy=0.$ R. $xe^{\sin\frac{y}{x}}=C.$

14. $x\,dx+y\,dy=my\,dx;$ trois cas à distinguer :

$$m^2>4,\qquad \text{R.}\quad \frac{y-ax}{y-bx}=\frac{C}{x^{\sqrt{m^2-4}}}\cdot\qquad \begin{cases} a=\dfrac{m+\sqrt{m^2-4}}{2}; \\ b=\dfrac{m-\sqrt{m^2-4}}{2}. \end{cases}$$

$$m^2=4,\qquad \text{R.}\quad Cx=e^{\frac{x}{y\mp x}}.$$

$$m^2<4,\qquad \text{R.}\quad \frac{2}{\sqrt{4-m^2}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2y-mx}{\sqrt{4-m^2}}=\mathrm{l}.\frac{C}{x}\cdot$$

Intégrer les équations linéaires suivantes :

15. $\frac{dy}{dx}+ay=e^{mx}.$ R. $y=Ce^{-ax}+\frac{e^{mx}}{m+a}\cdot$

16. $\frac{dy}{dx}+y=x^n.$ R. $y=Ce^{-x}+x^n-nx^{n-1}+n(n-1)x^{n-2}-\dots$

17. $(1+x^2)\frac{dy}{dx}+y=\text{arc tg}\,x.$ R. $y=Ce^{-\text{arc tg}\,x}+\text{arc tg}\,x-1.$

18. $\frac{dy}{dx}-\frac{ny}{x+1}=e^x(x+1)^n.$ R. $y=(x+1)^n(e^x+C).$

Intégrer les équations

19. $(1-x^2)\frac{dy}{dx}-xy=axy^2.$ R. $y(a+C\sqrt{1-x^2})+1=0.$

20. $\frac{dy}{dx}+2xy=2ax^3y^3.$ R. $y^2[Ce^{2x^2}-a(1+2x^2)]+2=0.$

CHAPITRE XXXIX.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE QUI NE SONT PAS DU PREMIER DEGRÉ.

334. Considérons maintenant les équations du premier ordre non résolues par rapport à la dérivée qu'elles renferment. Si la dérivée n'y entre qu'à des puissances entières et positives, l'équation sera de la forme

$$(1)\qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^n+\varphi_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1}+\cdots+\varphi_{n-1}\frac{dy}{dx}+\varphi_n=0,$$

$\varphi_1, \varphi_2,\ldots, \varphi_n$ étant, en général, des fonctions des variables x et y. Résolvant cette équation par rapport à la dérivée, on en tirera n valeurs de $\frac{dy}{dx}$, savoir

$$(2)\qquad \frac{dy}{dx}=f_1(x,y),\qquad \frac{dy}{dx}=f_2(x,y),\ldots,\qquad \frac{dy}{dx}=f_n(x,y),$$

et l'équation (1), mise sous la forme

$$\left[\frac{dy}{dx}-f_1(x,y)\right]\left[\frac{dy}{dx}-f_2(x,y)\right]\cdots\left[\frac{dy}{dx}-f_n(x,y)\right]=0,$$

admettra évidemment comme solutions toutes celles des équations (2), et n'en admettra aucune autre. Les équations (2), appartenant au type étudié précédemment, s'intégreront comme il a été dit, et auront respectivement pour intégrales générales

$$F_1(x,y,C_1)=0,\qquad F_2(x,y,C_2)=0,\ldots,\qquad F_n(x,y,C_n)=0,$$

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ étant des constantes arbitraires. L'équation

$$(3) \qquad F_1(x, y, C_1) \cdot F_2(x, y, C_2) \cdots F_n(x, y, C_n) = 0,$$

qui renferme toutes les précédentes, renfermera donc toutes les intégrales particulières de l'équation (1), et sera l'intégrale générale de celle-ci. On peut remplacer par une même constante C les n constantes arbitraires C_1, $C_2, \ldots$ qui y entrent, sans diminuer la généralité de l'intégrale, car on ne peut satisfaire à cette équation qu'en égalant à zéro les divers facteurs F_1, $F_2, \ldots$ du premier membre, et il est clair que les équations

$$F_1(x, y, C_1) = 0, \qquad F_2(x, y, C_2) = 0, \ldots$$

donneront exactement les mêmes solutions, soit que l'on représente par une même lettre les constantes qui y figurent, soit qu'on les représente par des lettres différentes. L'intégrale générale de l'équation (1) sera donc

$$F_1(x, y, C) \cdot F_2(x, y, C) \cdots F_n(x, y, C) = 0.$$

Ainsi l'équation différentielle

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - ax = 0$$

donne les deux suivantes :

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{ax}, \qquad \frac{dy}{dx} = -\sqrt{ax},$$

dont l'intégration se fait immédiatement. On a respectivement

$$y = \frac{2}{3}\sqrt{a}\,x^{\frac{3}{2}} + C, \qquad y = -\frac{2}{3}\sqrt{a}\,x^{\frac{3}{2}} + C,$$

et l'intégrale générale de l'équation proposée est

$$(3y - 2x\sqrt{ax} - C)(3y + 2x\sqrt{ax} - C) = 0,$$

ou, plus simplement,

$$(3y - C)^2 - 4ax^3 = 0.$$

325. Lorsque l'équation différentielle ne renferme qu'une des variables, et est plus facile à résoudre par rapport à cette variable que par rapport à la dérivée, on opère comme il suit. Posons

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

et supposons l'équation donnée mise sous la forme

$$x = f(p).$$

Nous aurons

$$dx = f'(p)\,dp,\qquad dy = p\,dx = p\,f'(p)\,dp,\qquad y = \int p\,f'(p)\,dp + C,$$

et la valeur de y en fonction de p sera connue par cette quadrature. Eliminant p entre cette équation et l'équation $x = f(p)$, on aura l'intégrale générale avec une constante arbitraire. Ainsi, l'équation

$$x\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} - a\frac{dy}{dx} = 0,\qquad \text{ou}\qquad x = \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}},$$

donnera

$$dx = \frac{a\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},\qquad dy = \frac{ap\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

d'où

$$y = -\frac{a}{\sqrt{1+p^2}} + C,\qquad y - C = -\frac{a}{\sqrt{1+p^2}},$$

et par suite, p étant éliminé, l'intégrale générale sera

$$x^2 + (y - C)^2 = a^2.$$

Si l'on avait, au contraire,

$$y = f(p),$$

on en tirerait

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{f'(p)\,dp}{p},$$

et l'on opérerait comme ci-dessus.

336. Si l'équation différentielle est homogène par rapport à x et à y, on en déduit, en la divisant par une puissance convenable de x, une équation entre le rapport u de y à x, et la dérivée p de y par rapport à x. Soit

$$p = f(u)$$

cette équation. On a d'autre part, à cause de $y = ux$,

$$dy = p\,dx = x\,du + u\,dx,$$

d'où l'on tire

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u} = \frac{du}{f(u)-u}.$$

Cette équation, dans laquelle les variables sont séparées, donnera

$$\mathrm{l}.\,x + C = \int \frac{du}{f(u)-u},$$

et, en remplaçant u par sa valeur $y : x$ après l'intégration, on obtiendra l'intégrale générale de l'équation proposée. Par exemple, de l'équation

$$x \frac{dy^2}{dx^2} - 2y \frac{dy}{dx} - x = 0, \quad \text{ou} \quad p^2 - 2pu - 1 = 0,$$

on tirera

$$p = u \pm \sqrt{1 + u^2}, \qquad p - u = \pm \sqrt{1 + u^2},$$

et l'équation différentielle entre x et u sera

$$\frac{dx}{x} = \pm \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}}.$$

Intégrant, on trouvera

$$\text{l.}\, x \mp \text{l.}\, (u + \sqrt{1 + u^2}) = \text{l.}\, \text{C},$$

équation qui se décompose en deux autres :

$$\text{l.}\, x\, (u + \sqrt{1 + u^2}) = \text{l.}\, \text{C}, \quad \text{ou} \quad y + \sqrt{x^2 + y^2} = \text{C},$$

et

$$\text{l.}\, \frac{x}{u + \sqrt{1 + u^2}} = \text{l.}\, \frac{x^2}{y + \sqrt{x^2 + y^2}} = \text{l.}\, (\sqrt{x^2 + y^2} - y) = \text{l.}\, \text{C},$$

ou

$$\sqrt{x^2 + y^2} - y = \text{C} = -\text{C}_1.$$

L'intégrale générale sera donc

$$(\sqrt{x^2 + y^2} + y - \text{C})\, (\sqrt{x^2 + y^2} - y + \text{C}_1) = 0,$$

ou enfin

$$x^2 + 2\text{C}y - \text{C}^2 = 0.$$

337. Un procédé qui réussit dans l'intégration des équations d'une forme particulière, consiste à différentier l'équation proposée, de manière à en éliminer l'une des variables x, y, et à former entre p et l'autre variable une équation du premier ordre que l'on sache intégrer. Considérons l'équation

$$y = x\, \text{f}\,(p) + \varphi\,(p),$$

f et φ désignant des fonctions données de la dérivée p. Différentiant l'équation et remplaçant dy par $p\,dx$, on a

$$p = \text{f}\,(p) + [x\, \text{f}'\,(p) + \varphi'\,(p)]\, \frac{dp}{dx},$$

ou bien

$$\frac{dx}{dp} - \frac{\mathrm{f}'(p)}{p - \mathrm{f}(p)}x - \frac{\varphi'(p)}{p - \mathrm{f}(p)} = 0.$$

Cette équation linéaire du premier ordre entre x et p s'intégrera par la méthode connue, et l'élimination de p entre son intégrale et l'équation proposée donnera l'intégrale générale entre x, y, C.

338. L'équation *de Clairaut* est un cas particulier de la précédente :

$$y = xp + \varphi(p).$$

Elle donne, par différentiation, celle-ci

$$[x + \varphi'(p)]\frac{dp}{dx} = 0,$$

qui se décompose en deux autres. La première

$$\frac{dp}{dx} = 0 \qquad \text{donne} \qquad p = \mathrm{C},$$

et en substituant cette valeur de p dans l'équation différentielle, on a l'intégrale générale

$$y = \mathrm{C}x + \varphi(\mathrm{C}),$$

qui représente un système de lignes droites.

La seconde

$$x + \varphi'(p) = 0$$

fournira au contraire une valeur de p dépendante de x, sans constante arbitraire, que l'on devra reporter dans l'équation différentielle. Cette nouvelle intégrale ne peut d'ailleurs être qu'une solution singulière, puisque l'intégrale générale, donnant pour p une valeur constante, ne saurait s'accorder avec celle-ci dans laquelle p est une fonction de x. On remarquera que cette conclusion s'accorde avec la théorie exposée au n° 324, car, pour former la fonction $\psi(x, y)$ qui exprime la dérivée partielle en y de p, il faut différentier partiellement par rapport à y l'équation proposée, ce qui donne

$$1 = [x + \varphi'(p)]\frac{dp}{dy},$$

d'où

$$\frac{dp}{dy} = \psi(x, y) = \frac{1}{x + \varphi'(p)},$$

et l'on voit que l'équation $x + \varphi'(p) = 0$ rend infinie la fonction ψ.

On observera aussi que l'élimination de p entre l'équation de Clairaut

et l'équation $x + \varphi'(p) = 0$ conduit au même résultat que l'élimination de C entre les équations

$$y = Cx + \varphi(C), \qquad 0 = x + \varphi'(C),$$

qui fournit l'équation de l'enveloppe des droites représentées par l'intégrale générale. Cela s'accorde encore avec les principes établis relativement aux solutions singulières.

Exercices.

Intégrer les équations suivantes :

1. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4\frac{dy}{dx} + 3 = 0.$ R. $(y - C)^2 - 3x(y - C) + 2x^2 = 0.$

2. $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{1}{x} - 1.$ R. $(y - C)^2 - (\text{arc sin}\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2})^2 = 0.$

3. $\frac{dy^3}{dx^3} - x + 1 = 0.$ R. $(4y - C)^3 = 27(x - 1)^4.$

4. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - (x^2 + xy + y^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x^3y + x^2y^2 + xy^3)\frac{dy}{dx} - x^3y^3 = 0.$

   R. $(3y - x^3 - C)(y^2 - Ce^{x^2})(xy - Cy + 1) = 0.$

5. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 - \left(9x^4 + \frac{y^2}{x^2}\right)\frac{dy^2}{dx^2} + 9x^2y^2 = 0.$

   R. $[(y - C)^2 - x^6](y - Cx)(xy - C) = 0.$

6. $\frac{dy^3}{dx^3} + \frac{dy}{dx} + 1 = x,$ ou $x = 1 + p + p^3.$

On trouve

$$2(y - C) = p^2\left(1 + \frac{3}{2}p^2\right).$$

7. $\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = e^x.$ R. $2(y - C) = e^x + e^{-x}.$

8. $x = e^{\frac{dy}{dx}} + e^{-\frac{dy}{dx}}.$ R. $x = e^{\frac{y - C \pm \sqrt{4 - x^2}}{x}} + e^{-\frac{y - C \pm \sqrt{4 - x^2}}{x}}.$

9. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = y.$ R. $x = 2p + 3p^2 + C.$

10. $x + a\frac{dy}{dx} = b\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$

R. $2y = pb\sqrt{1+p^2} - ap^2 - b\,\mathrm{l}.(p + \sqrt{1+p^2}) + C.$

11. $x + y\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}.$ R. $y = Cx.$

12. $(y^2 + nx^2)\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) - \left(y\frac{dy}{dx} + nx\right)^2 = 0.$

R. $y + \sqrt{y^2 + nx^2} = Cx^{1 \pm \sqrt{\frac{n-1}{n}}}.$

13. $y = x\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} - \frac{dy^2}{dx^2}.$ R. $y = C(x + 1 - C).$

Solution singulière : $4y = (x + 1)^2.$

14. $y = x\frac{dy}{dx} + \sqrt{a^2 - b^2\frac{dy^2}{dx^2}}.$ R. $y = Cx + \sqrt{a^2 - b^2C^2}.$

Sol. sing. : $y = \frac{a(x^2 - b^2)}{b\sqrt{x^2 + b^2}}.$

15. $Axy\frac{dy^2}{dx^2} + (x^2 - Ay^2 - B)\frac{dy}{dx} - xy = 0.$

R. Posant $x^2 = u$, $y^2 = v$, $dv = pdu$, on aura

$$v = up - \frac{Bp}{1 + Ap}.$$

L'intégrale générale de l'équation proposée sera

$$y^2 - Cx^2 = -\frac{BC}{1 + AC}.$$

16. $y = \frac{1}{4}\left(x^2 + \frac{dy^2}{dx^2}\right).$ R. $(x \mp \sqrt{4y - y^2})\, e^{\frac{x}{x \pm \sqrt{4y - x^2}}} = C.$

CHAPITRE XL.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DES ORDRES SUPÉRIEURS.

§ 1. CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES.

339. L'intégration des équations différentielles d'un ordre supérieur au premier s'appuie sur quelques principes généraux, analogues à ceux qui régissent les équations du premier ordre. Soit d'abord une équation du second ordre entre x et y, résolue par rapport à la dérivée seconde,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{f}\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right). \tag{1}$$

On peut lui substituer un système de deux équations du premier ordre, en représentant par z la dérivée première de y, car il est clair que l'équation (1) sera remplacée par les deux suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= z, \\ \frac{dz}{dx} &= \mathrm{f}(x, y, z), \end{aligned}\right. \tag{2}$$

et son intégration sera ramenée à l'intégration du système (2).

Considérons, au lieu du système (2), le système plus général

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \varphi(x, y, z), \\ \frac{dz}{dx} &= \mathrm{f}(x, y, z), \end{aligned}\right. \tag{3}$$

par lequel deux fonctions y et z de x se trouveraient définies, et procédons comme au chapitre XXXVII. Considérons x comme l'abscisse, y et z comme les ordonnées correspondantes de deux courbes, qui doivent vérifier les équations (3). Pour une valeur x_0 de x, donnons à y et z des valeurs *arbitraires* y_0 et z_0; concevons que x passe de la valeur x_0 à une valeur quelconque x par une suite d'accroissements infiniment petits $h_0, h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$, et calculons simultanément les accroissements correspondants de y et de z, à partir des valeurs y_0 et z_0, au moyen des équations

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \varphi(x, y, z), \qquad \frac{\Delta z}{\Delta x} = \mathrm{f}(x, y, z). \tag{4}$$

Nous déterminerons ainsi successivement toutes les valeurs de y et de z qui répondent aux valeurs successives de x, et nous obtiendrons deux séries de points bien déterminés

$$M_0(x_0, y_0),\quad M_1(x_1, y_1),\ldots,\quad M_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1}),\quad M(x, y);$$
$$N_0(x_0, z_0),\quad N_1(x_1, z_1),\ldots,\quad N_{n-1}(x_{n-1}, z_{n-1}),\quad N(x, z).$$

Joignant deux à deux les points d'une même série, nous formerons deux polygones $M_0M_1\ldots M_{n-1}M$, $N_0N_1\ldots N_{n-1}N$, qui auront leurs côtés infiniment petits, et dans lesquels le coefficient angulaire d'un côté quelconque sera déterminé par les équations (4). Lorsqu'ensuite les éléments $h_1, h_2,\ldots, h_{n-1}$ de l'axe des x tendront vers zéro, leur nombre n croissant indéfiniment, ces deux polygones tendront respectivement à se confondre avec deux courbes déterminées, et comme les directions des côtés de ces polygones ont pour limites celles des tangentes aux deux courbes limites, il s'en suit que les coefficients angulaires de celles-ci vérifieront les équations (3) : en d'autres termes, les ordonnées y et z des courbes, limites des polygones, satisferont au système d'équations différentielles (3). La démonstration complète de cette proposition, semblable à celle que nous avons donnée dans le cas d'une équation du premier ordre entre x et y, est seulement un peu plus compliquée : nous ne la développerons pas ici. Elle suppose d'ailleurs, comme la première, que les fonctions φ, f, ainsi que leurs dérivées partielles en x, y, z, soient continues et à détermination simple dans le voisinage du système de valeurs x_0, y_0, z_0.

340. Appliquons ce qui précède au système d'équations (2), cas particulier du système (3). Puisque l'élimination de z entre ces deux équations nous ramène à l'équation proposée

$$(1)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{f}\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right),$$

nous en concluons que l'une des deux courbes-limites qui vérifient les équations (2), savoir, celle dont y représente l'ordonnée, satisfait à la condition exprimée par l'équation (1). Celle-ci admet donc une intégrale. De plus, pour une valeur donnée x_0 de x, nous avons choisi arbitrairement les valeurs correspondantes de y et de z, savoir, y_0 et z_0 : l'intégrale n'est donc déterminée que lorsqu'on fixe les valeurs de ces quantités, et *elle doit renfermer conséquemment, pour avoir la généralité convenable, deux constantes arbitraires* C *et* C', *à l'aide desquelles on puisse, x étant donné,*

faire prendre à y et à sa dérivée $\frac{dy}{dx}$ des valeurs choisies à volonté. Géométriquement, on peut faire passer la courbe par un point donné et lui faire toucher en ce point une droite donnée. C'est là ce qu'on nomme l'*intégrale générale* de l'équation (1). Réciproquement, si l'on trouve une intégrale de l'équation (1), renfermant deux constantes C et C′ qui remplissent la condition ci-dessus, on fera voir comme au n° 324 que cette intégrale peut coïncider successivement avec toutes les intégrales particulières de l'équation, et qu'elle en est l'intégrale générale.

341. Ces raisonnements s'étendent à des équations différentielles d'ordre quelconque. Une équation du troisième ordre, mise sous la forme

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \mathrm{f}\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right),$$

équivaut à trois équations du premier ordre

$$\frac{dy}{dx} = z, \qquad \frac{dz}{dx} = u, \qquad \frac{du}{dx} = \mathrm{f}(x, y, z, u),$$

dont les intégrales se détermineraient par une construction semblable à celle que nous avons donnée plus haut. On en conclut qu'il existe une fonction y de x, satisfaisant à l'équation du troisième ordre, renfermant trois constantes arbitraires C, C′, C″ qui permettent de se donner à volonté les valeurs de y, $D_x y$, $D^2_x y$ correspondant à une valeur donnée de x, et cette fonction de x, C, C′, C″ est l'intégrale générale ou complète.

En général, une équation de l'ordre n,

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \mathrm{f}\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right),$$

admettra une intégrale générale avec n constantes arbitraires, irréductibles à un nombre moindre, et permettant de se donner à volonté, pour une valeur donnée de x, les valeurs de y et de ses $n-1$ premières dérivées. Si une intégrale, quelle que soit la méthode qui l'a fournie, satisfait à cette dernière condition, elle sera l'intégrale générale.

Cela n'exclut pas d'ailleurs l'existence de certaines intégrales, non comprises dans l'intégrale générale, et que l'on nomme des *solutions singulières* de l'équation différentielle. La théorie de ces solutions singulières repose sur des principes analogues à ceux que nous avons exposés au n° 324 : nous ne nous y arrêterons pas.

§ 2. ÉQUATIONS LINÉAIRES.

342. On dit qu'une équation différentielle de l'ordre n est *linéaire*, lorsque la fonction et ses n premières dérivées n'y entrent qu'au premier degré et ne se multiplient pas entr'elles. La forme d'une telle équation est celle-ci :

$$(1) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + X_{n-1} \frac{dy}{dx} + X_n y = X,$$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$, X étant des fonctions explicites de x. Si X se réduit à zéro, l'équation devient

$$(2) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + X_{n-1} \frac{dy}{dx} + X_n y = 0;$$

c'est ce que l'on nomme une équation *sans second membre* : l'équation (1) est une équation linéaire *avec second membre*. Nous nous occuperons d'abord de l'équation (2).

343. *Propriétés de l'équation sans second membre.* I. Une intégrale quelconque y_1 de l'équation (2), étant multipliée par une constante arbitraire C_1, donne une nouvelle intégrale $C_1 y_1$ de cette équation.

Car si l'on fait $y = C_1 y_1$ dans le premier membre de l'équation (2), on obtient le même résultat que si l'on faisait $y = y_1$, et que l'on multipliât tous les termes par C_1 : y_1 étant une intégrale, ce résultat est nul.

II. La somme $y_1 + y_2$ de deux intégrales de l'équation (2), est une nouvelle intégrale de cette équation.

En effet, on a en général

$$\frac{d^i(y_1 + y_2)}{dx^i} = \frac{d^i y_1}{dx^i} + \frac{d^i y_2}{dx^i},$$

de sorte que si l'on fait $y = y_1 + y_2$ dans le premier membre de l'équation (2), on aura la somme des résultats obtenus en y remplaçant successivement y par y_1 et par y_2, résultats nuls puisque y_1 et y_2 sont des intégrales de l'équation (2).

On conclut immédiatement de là que si y_1, y_2, y_3 sont des intégrales de l'équation (2), leur somme $y_1 + y_2 + y_3$ sera encore une intégrale; et, en général, que la somme d'un nombre quelconque d'intégrales de l'équation sans second membre constitue une intégrale nouvelle.

III. De là résulte une propriété très-remarquable de l'équation (2). Supposons que l'on sache trouver n intégrales particulières distinctes, $y_1, y_2, \ldots, y_n$, de cette équation : en les multipliant respectivement par des constantes arbitraires $C_1, C_2, \ldots, C_n$, on aura encore des solutions de l'équation différentielle, d'après ce qui précède (I), et la somme de ces n intégrales, satisfaisant encore à l'équation différentielle et renfermant n constantes arbitraires, en sera l'intégrale générale. *On aura donc, pour l'intégrale générale de l'équation sans second membre,*

$$(3) \qquad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n,$$

$y_1, y_2, \ldots y_n$ *étant des solutions de cette équation,* de sorte que la recherche de l'intégrale générale est ramenée à celle de n intégrales particulières.

Ces n intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_n$ doivent toutefois satisfaire à une condition, pour que la formule (3) donne l'intégrale générale : c'est que l'on puisse déterminer les n constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ de manière à ce que y et ses $n-1$ premières dérivées reçoivent les valeurs arbitraires, pour une valeur donnée de x (341). Pour cela, il faut et il suffit que ces n intégrales ne soient liées entr'elles par aucune relation de la forme

$$(4) \qquad \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_n y_n = 0,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ étant des constantes déterminées. En effet, si l'on différentie $n-1$ fois l'équation (3) pour former $D_x y, D^2_x y, \ldots, D^{n-1}_x y$, et si l'on exprime la condition pour que les n équations ainsi obtenues fournissent des valeurs finies et déterminées de $C_1, C_2, \ldots, C_n$, quelques valeurs qu'on attribue à $x, y, D_x y, \ldots, D^{n-1}_x y$, on verra aussitôt que c'est là la condition nécessaire et suffisante pour que l'on ne puisse satisfaire à l'équation (4) et à ses $n-1$ premières dérivées par rapport à x, pour une valeur quelconque de x, que par le système de valeurs des coefficients

$$\alpha_1 = 0, \qquad \alpha_2 = 0, \ldots, \qquad \alpha_n = 0 \text{ (1)}.$$

344. — IV. On peut d'ailleurs s'assurer que l'équation (2) admet toujours n intégrales particulières remplissant la condition qui vient d'être énoncée, et propres, par conséquent, à former l'intégrale générale au moyen de la formule (3). En effet, supposons que l'équation (2) n'admette que k intégrales particulières ne vérifiant aucune équation de la forme (4), k étant $< n$. Soient $y_1, y_2, \ldots, y_k$ ces intégrales : toute autre intégrale

(1) Voir, pour plus de développements, les *Bulletins de l'Académie de Belgique*, 2me série, T. XI.

particulière y sera donc liée aux précédentes par une équation de la forme

$$y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_k y_k,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ étant des coefficients convenablement choisis ; ce qui revient à dire que le second membre de cette équation est l'intégrale générale de l'équation (2), si l'on y considère $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ comme des constantes arbitraires. Cette intégrale générale ne renfermerait donc que k constantes arbitraires, ce qui est impossible.

Il suit évidemment de là que l'intégrale générale de l'équation (2) est toujours de la forme

$$(3) \qquad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n,$$

et en outre, que l'équation (2) n'admet aucune solution singulière, puisque s'il en existait une, rien ne s'opposerait à ce que l'on choisît cette solution pour la fonction y_1, dans la formule (3), en complétant l'intégrale générale par $n-1$ intégrales particulières $y_2, \ldots, y_n$. L'hypothèse $C_1 = 1$, $C_2 = 0, \ldots,$ $C_n = 0$ ferait rentrer la solution singulière dans l'intégrale générale.

Propriétés de l'équation linéaire avec second membre.

345. — I. *Si l'on connaît l'intégrale générale* (3) *de l'équation sans second membre, on en déduira l'intégrale générale de l'équation avec second membre par n quadratures.*

Soit

$$(3) \qquad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$$

l'intégrale de l'équation (2). On peut évidemment admettre que cette expression représente également l'intégrale générale de l'équation (1), pourvu que l'on remplace les n constantes $C_1, \ldots, C_n$ par des fonctions de x convenablement choisies. Et comme nous avons ainsi n fonctions indéterminées $C_1, C_2, \ldots, C_n$ à notre disposition, nous pourrons même les assujettir à satisfaire à $n-1$ conditions données arbitrairement, la n^{me} étant la condition que y soit l'intégrale de l'équation (1). Nous pouvons, par exemple, exiger que les $n-1$ premières dérivées de y conservent la même forme, dans l'hypothèse où $C_1, \ldots, C_n$ sont variables, que si ces quantités restaient constantes. Nous aurons ainsi $n-1$ équations ; la dérivée n^{me} de y devra vérifier l'équation (1), ce qui donnera la n^{me} équation achevant de déterminer les fonctions $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Différentions n fois, dans ces conditions, la valeur de y donnée par

l'équation (3) ; nous aurons

$$\frac{dy}{dx} = C_1 \frac{dy_1}{dx} + C_2 \frac{dy_2}{dx} + \cdots + C_n \frac{dy_n}{dx},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = C_1 \frac{d^2y_1}{dx^2} + C_2 \frac{d^2y_2}{dx^2} + \cdots + C_n \frac{d^2y_n}{dx^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = C_1 \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} + C_2 \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} + \ldots + C_n \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}},$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = C_1 \frac{d^ny_1}{dx^n} + C_2 \frac{d^ny_2}{dx^n} + \cdots + C_n \frac{d^ny_n}{dx^n}$$
$$+ \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} \frac{dC_1}{dx} + \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} \frac{dC_2}{dx} + \cdots + \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} \frac{dC_n}{dx}.$$

Substituons ces valeurs de y et de ses dérivées dans l'équation avec second membre : le coefficient de C_1, après cette substitution, sera

$$\frac{d^ny_1}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} + \cdots + X_{n-1} \frac{dy_1}{dx} + X_n y_1,$$

et se réduira identiquement à zéro, puisque y_1 est une intégrale de l'équation (2). Il en sera de même des coefficients de $C_2, \ldots, C_n$, et, par suite, l'équation se réduira à

$$\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} \frac{dC_1}{dx} + \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} \frac{dC_2}{dx} + \cdots + \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} \frac{dC_n}{dx} = X.$$

Joignons à cette équation, qui exprime que l'équation (3) est l'intégrale de l'équation (1), les $n - 1$ équations résultant de la conservation des formes des $n - 1$ premières dérivées. Nous aurons le système

$$(5)\quad \left\{ \begin{array}{l} y_1 \dfrac{dC_1}{dx} + y_2 \dfrac{dC_2}{dx} + \cdots + y_n \dfrac{dC_n}{dx} = 0, \\[2mm] \dfrac{dy_1}{dx} \dfrac{dC_1}{dx} + \dfrac{dy_2}{dx} \dfrac{dC_2}{dx} + \cdots + \dfrac{dy_n}{dx} \dfrac{dC_n}{dx} = 0, \\[2mm] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\[2mm] \dfrac{d^{n-2}y_1}{dx^{n-1}} \dfrac{dC_1}{dx} + \dfrac{d^{n-2}y_1}{dx^{n-2}} \dfrac{dC_2}{dx} + \cdots + \dfrac{d^{n-2}y_n}{dx^{n-2}} \dfrac{dC_n}{dx} = 0, \\[2mm] \dfrac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} \dfrac{dC_1}{dx} + \dfrac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} \dfrac{dC_2}{dx} + \cdots + \dfrac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} \dfrac{dC_n}{dx} = X. \end{array} \right.$$

Ces n équations étant du premier degré par rapport aux dérivées de C_1, C_2,... C_n, on en tirera sans difficulté les valeurs de ces dérivées, en fonction explicite de la variable x, et l'on aura

$$\frac{dC_1}{dx} = \varphi_1(x), \qquad \frac{dC_2}{dx} = \varphi_2(x),\ldots, \qquad \frac{dC_n}{dx} = \varphi_n(x);$$

d'où, par de simples quadratures,

$$C_1 = H_1 + \int \varphi_1(x)\,dx, \quad C_2 = H_2 + \int \varphi_2(x)\,dx,\ldots, \quad C_n = H_n + \int \varphi_n(x)\,dx,$$

H_1, H_2,..., H_n étant des constantes arbitraires. Les fonctions C_1, C_2,..., C_n étant déterminées, on les reportera dans la formule (3), et l'on aura l'intégrale générale de l'équation (4), avec n constantes arbitraires :

$$y = y_1\left[H_1 + \int \varphi_1(x)\,dx\right] + y_2\left[H_2 + \int \varphi_2(x)\,dx\right] + \cdots + y_n\left[H_n + \int \varphi_n(x)\,dx\right].$$

Remarque. — La résolution des équations (5) donnera toujours pour dC_1, dC_2,..., dC_n des valeurs finies et déterminées, car la condition pour qu'il en soit ainsi est précisément la même qui exprime que l'on peut disposer des constantes C_1, C_2,..., C_n, dans l'équation (3), de manière à attribuer à y, $D_x y$,..., $D^{n-1}{}_x y$, des valeurs arbitrairement choisies, c'est-à-dire que $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$ est vraiment l'intégrale générale de l'équation sans second membre : ce que nous avons effectivement admis.

La méthode que nous avons suivie pour tirer, de l'intégrale générale de l'équation (2), celle de l'équation (1), s'appelle la *méthode de la variation des constantes arbitraires.*

346. — II. Si l'on connaît une intégrale particulière Y de l'équation avec second membre, on formera son intégrale générale en ajoutant à cette fonction Y, l'intégrale générale de l'équation sans second membre.

En effet, on peut toujours désigner par $Y + z$ l'intégrale générale de l'équation (1), sauf à déterminer convenablement z. Or, si l'on remplace y par $Y + z$ dans l'équation (1), on aura

$$\left(\frac{d^nY}{dx^n} + X_1\frac{d^{n-1}Y}{dx^{n-1}} + \cdots + X_nY\right) + \left(\frac{d^nz}{dx^n} + X_1\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \cdots + X_nz\right) = X,$$

et cette équation se réduit évidemment, Y étant supposé satisfaire à l'équation (1), à celle-ci :

$$\frac{d^nz}{dx^n} + X_1\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \cdots + X_nz = 0,$$

qui doit déterminer z. Or, celle-ci n'est autre que l'équation (2), où l'on remplacerait y par z : la fonction cherchée z, qui, ajoutée à Y, donnerait l'intégrale de l'équation (1), est donc précisément l'intégrale générale de l'équation (2).

La connaissance d'une intégrale particulière de l'équation avec second membre ramène donc la recherche de son intégrale générale à celle de l'intégrale de l'équation sans second membre.

347. — III. Si l'on connaît une intégrale particulière y_1 de l'équation sans second membre, on peut abaisser d'une unité l'ordre de l'équation avec ou sans second membre, sans qu'elle cesse d'être linéaire.

Soit $y = y_1 z$ l'intégrale générale de l'équation (1). Nous aurons par différentiation

$$\frac{dy}{dx} = z\frac{dy_1}{dx} + y_1\frac{dz}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = z\frac{d^2y_1}{dx^2} + 2\frac{dz}{dx}\frac{dy_1}{dx} + y_1\frac{d^2z}{dx^2}, \ldots$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = z\frac{d^ny_1}{dx^n} + n\frac{dz}{dx}\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} + \cdots + y_1\frac{d^nz}{dx^n}.$$

Substituant ces valeurs de y et de ses dérivées dans le premier membre de l'équation (1), on verra immédiatement que la somme des termes affectés du facteur z se réduit à zéro, parce que y_1 est, par hypothèse, une fonction qui satisfait à l'équation sans second membre. L'équation (1) se réduira donc à la forme

$$y_1\frac{d^nz}{dx^n} + P\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \cdots + S\frac{dz}{dx} = X,$$

P,..., S étant des fonctions connues de x. Posant

$$\frac{dz}{dx} = u, \quad \text{ou} \quad z = C + \int u\,dx,$$

et divisant toute l'équation par y_1, on aura en u une équation linéaire de l'ordre $n-1$. La valeur de z se déduirait ensuite de celle de u par une simple quadrature, et l'on aurait enfin

$$y = Cy_1 + y_1\int u\,dx.$$

§ 3. ÉQUATIONS LINÉAIRES A COEFFICIENTS CONSTANTS.

348. Lorsque les coefficients $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de l'équation linéaire se réduisent à des constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$, on forme facilement l'intégrale

générale de cette équation. Considérons d'abord l'équation sans second membre

$$(1) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0,$$

et cherchons à y satisfaire par une expression de la forme $y = e^{rx}$, r étant une constante. Substituant cette valeur de y dans le premier membre de l'équation (1), et observant que

$$\frac{d^n e^{rx}}{dx^n} = r^n e^{rx},$$

nous trouverons

$$(2) \qquad \frac{d^n . e^{rx}}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} . e^{rx}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{d . e^{rx}}{dx} + a_n e^{rx} = e^{rx}\, \mathrm{f}(r),$$

en posant, pour abréger,

$$(3) \qquad \mathrm{f}(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n.$$

Donc, pour que l'équation (1) soit satisfaite, il faut et il suffit que $\mathrm{f}(r)$ soit nul, c'est-à-dire que r soit une des racines de l'équation

$$\mathrm{f}(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0.$$

Cette équation de degré n, qu'on appelle l'*équation auxiliaire,* admet n racines que nous désignerons par $r_0, r_1, r_2, \ldots, r_n$, et que nous supposerons d'abord *réelles et inégales*. Nous aurons donc n intégrales particulières de l'équation (1), savoir

$$y_1 = e^{r_1 x}, \qquad y_2 = e^{r_2 x}, \ldots, \qquad y_n = e^{r_n x},$$

et ces intégrales satisferont à la condition exposée plus haut (343), c'est-à-dire qu'elles ne seront liées entr'elles par aucune relation de la forme

$$\alpha_1 e^{r_1 x} + \alpha_2 e^{r_2 x} + \cdots + \alpha_n e^{r_n x} = 0,$$

x étant quelconque. En effet, si l'on différentie $n-1$ fois cette équation et si l'on pose $\alpha_i e^{r_i x} = u_i$, on trouve le système

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 0, \\ r_1 u_1 + r_2 u_2 + \cdots + r_n u_n = 0, \\ r_1^2 u_1 + r_2^2 u_2 + \cdots + r_n^2 u_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_1^{n-1} u_1 + r_2^{n-1} u_2 + \cdots + r_n^{n-1} u_n = 0, \end{array} \right.$$

qui devrait être vérifié quel que soit x si l'équation supposée avait lieu.

Or, on sait (1) qu'un tel système d'équations ne peut être satisfait, les quantités $r_1, r_2, \ldots, r_n$ étant inégales, que par les valeurs $u_1 = 0$, $u_2 = 0, \ldots$, $u_n = 0$, et par suite, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$.

D'après cela, l'intégrale générale de l'équation (1) sera donnée par la la formule

$$(4) \qquad y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \cdots + C_n e^{r_n x},$$

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ étant les constantes arbitraires.

349. Si l'équation auxiliaire admettait des racines imaginaires, ce qui précède subsisterait; car, soit r_1 une telle racine, l'expression $e^{r_1 x}$ continuera de satisfaire à l'équation différentielle. Il suffit, pour s'en assurer, d'observer que la seule propriété de cette fonction sur laquelle nous nous sommes appuyés, savoir

$$D_x e^{r_1 x} = r_1 e^{r_1 x},$$

subsiste lorsque r_1 est imaginaire (2). Mais, pour obtenir l'intégrale générale sous forme réelle, on remarquera que les racines imaginaires de l'équation auxiliaire sont conjuguées deux à deux, en sorte que si l'on a

$$r_1 = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \qquad \text{on aura} \qquad r_2 = \alpha - \beta\sqrt{-1},$$

et par suite

$$C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = C_1 e^{(\alpha+\beta\sqrt{-1})x} + C_2 e^{(\alpha-\beta\sqrt{-1})x}$$
$$= e^{\alpha x}\left[C_1 (\cos\beta x + \sqrt{-1}\sin\beta x) + C_2 (\cos\beta x - \sqrt{-1}\sin\beta x)\right]$$
$$= e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x),$$

en posant $C_1 + C_2 = A$, $(C_1 - C_2)\sqrt{-1} = B$, et regardant A et B comme des constantes arbitraires réelles. Ainsi, chaque couple de racines imaginaires $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ de l'équation $f(r) = 0$, donnera l'intégrale particulière réelle

$$e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x),$$

renfermant deux constantes arbitraires, et remplaçant conséquemment dans l'équation (4) deux intégrales particulières déduites de racines réelles.

---

(1) Voir l'*Algèbre* de M. Bertrand, T. II, p. 358.

(2) On a, en effet, d'après la définition de la fonction e^z quand z est imaginaire (97),

$$\frac{d\cdot e^{rx}}{dx} = \lim \frac{e^{r(x+\Delta x)} - e^{rx}}{\Delta x} = \lim e^{rx}\frac{e^{r\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim e^{rx}\left(r + \frac{r^2\Delta x}{1\cdot 2} + \cdots\right).$$

350. Supposons que l'équation auxiliaire ait des racines égales, et soit, par exemple, $r_1 = r_2$. Le raisonnement par lequel nous avons prouvé que la formule (4) donne l'intégrale générale ne subsiste plus; du reste, cette formule devient

$$y = (C_1 + C_2)\, e^{r_1 x} + C^{r_3 x} + \cdots + C_n e^{r_n x},$$

et y, ne renfermant plus que $n-1$ constantes arbitraires, ne peut être l'intégrale générale. Mais nous trouverons une nouvelle intégrale particulière, propre à remplacer celle qui a disparu, en observant que l'équation (2) a lieu quelle que soit la valeur de r, et que, si l'on dérive ses deux membres par rapport à r, on aura une nouvelle identité. Intervertissant l'ordre des différentiations dans le premier membre, et remarquant que $D_r e^{rx} = xe^{rx}$, on aura

$$\frac{d^n . xe^{rx}}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} . xe^{rx}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{d . xe^{rx}}{dx} + a_n\, xe^{rx} = xe^{rx} f(r) + e^{rx} f'(r).$$

Mais puisque, par hypothèse, r_1 est une racine double de l'équation $f(r) = 0$, on a

$$f(r_1) = 0, \qquad f'(r_1) = 0;$$

donc, le premier membre s'annule pour $r = r_1$, donc $y = xe^{r_1 x}$ est une intégrale de l'équation proposée. La racine double r_1 correspond donc à une intégrale

$$C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x} = (C_1 + C_2 x)\, e^{r_1 x}$$

de l'équation (1), et l'intégrale générale sera, avec n constantes arbitraires,

$$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{r_1 x} + C_3 e^{r_3 x} + \cdots + C_n e^{r_n x}.$$

On verrait, de même, que si r_1 est une racine triple de l'équation $f(r) = 0$, ou si $r_3 = r_2 = r_1$, $y = x^2 e^{r_1 x}$ sera une intégrale de l'équation (1), à cause des équations

$$f(r_1) = 0, \qquad f'(r_1) = 0, \qquad f''(r_1) = 0,$$

et l'intégrale particulière

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)\, e^{r_1 x}$$

remplacera les intégrales correspondantes aux racines r_1, r_2, r_3 dans l'équation (4). Et ainsi de suite.

Cette méthode s'appliquant aux racines imaginaires multiples aussi bien qu'aux racines réelles, si l'équation auxiliaire admet, par exemple, les racines doubles conjuguées $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, les termes correspondants dans

l'intégrale générale seront

$$e^{\alpha x}[(A_1 + A_2 x)\cos\beta x + (B_1 + B_2 x)\sin\beta x],$$

A_1, A_2, B_1, B_2 étant des constantes arbitaires.

351. Considérons maintenant l'équation linéaire avec second membre

$$(6) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_n y = X,$$

et examinons d'abord deux cas particuliers.

1° Les coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont nuls, et l'équation à intégrer est

$$\frac{d^n y}{dx^n} = X.$$

L'intégrale générale de l'équation sans second membre est évidemment

$$y = C_1 + C_2 x + \cdots + C_n x^{n-1};$$

on a une intégrale particulière Y de l'équation proposée en effectuant n intégrations successives sur la fonction X, sans introduire de constantes arbitraires. On aura donc

$$y = C_1 + C_2 x + \cdots + C_n x^{n-1} + \int dx \int dx \ldots \int X dx$$

pour l'intégrale générale cherchée.

2° Si le second membre X de l'équation (6) se réduit à une constante a, il suffira de poser

$$a_n y - a = a_n z,$$

pour avoir en z une équation linéaire sans second membre.

Revenant au cas général, appliquons la méthode de la variation des constantes. L'équation sans second membre aura pour intégrale générale, comme on sait,

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \cdots + C_n e^{r_n x},$$

$r_1, r_2, \ldots, r_n$ étant les racines, réelles et inégales, de l'équation auxiliaire $f(r) = 0$. Le système d'équations (5) du n° 345 devient ici, évidemment, en posant généralement $\frac{dC_i}{dx} e^{r_i x} = u_i$,

$$\left\{\begin{array}{l} u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 0, \\ r_1 u_1 + r_2 u_2 + \cdots + r_n u_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_1^{n-2} u_1 + r_2^{n-2} u_2 + \cdots + r_n^{n-2} u_n = 0, \\ r_1^{n-1} u_1 + r_2^{n-1} u_2 + \cdots + r_n^{n-1} u_n = X. \end{array}\right.$$

Or, on sait(1) qu'un tel système d'équations donne pour l'inconnue u_i la valeur

$$u_i = \frac{X}{(r_i - r_1)\cdots(r_i - r_{i-1})(r_i - r_{i+1})\cdots(r_i - r_n)} = \frac{X}{f'(r_i)},$$

d'où

$$\frac{dC_i}{dx} = \frac{1}{f'(r_i)} X e^{-r_i x},$$

d'où, en intégrant, et mettant en évidence la constante arbitraire H_i,

$$C_i = H_i + \frac{1}{f'(r_i)} \int X e^{-r_i x} dx.$$

L'intégrale générale de l'équation (6) s'obtiendra donc en remplaçant C_i par cette valeur dans l'intégrale de l'équation sans second membre, et sera

$$y = \sum_{i=1}^{i=n} e^{r_i x} \left[H_i + \frac{1}{f'(r_i)} \int X e^{-r_i x} dx \right].$$

Il est bon d'observer que, dans certains cas, on détermine facilement une intégrale particulière de l'équation (6), et qu'il suffit alors d'appliquer le théorème du n° 546, et d'ajouter cette intégrale à l'intégrale générale de l'équation sans second membre, pour avoir celle de l'équation (6).

Si l'équation auxiliaire présentait des racines imaginaires ou des racines égales, il faudrait appliquer la méthode de la variation des constantes, après avoir mis l'intégrale de l'équation sans second membre sous la forme qui convient à la nature des racines de l'équation $f(r) = 0$.

Exercices.

Equations à coefficients constants sans second membre :

1. $\frac{d^4y}{dx^4} - 10\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0.$ R. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + C_3 e^{x} + C_4 e^{-x}.$

2. $\frac{d^5y}{dx^5} - 12\frac{d^4y}{dx^4} + 60\frac{d^3y}{dx^3} - 156\frac{d^2y}{dx^2} + 212\frac{dy}{dx} - 120y = 0.$

R. $y = C_1 e^{2x} + e^{2x}(A \cos 2x + B \sin 2x) + e^{3x}(A_1 \cos x + B_1 \sin x).$

3. $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2 y = 0.$ R. $y = A \cos ax + B \sin ax.$

---

(1) Bertrand, loc. cit.

4. $\dfrac{d^3y}{dx^3} - a^3y = 0.$ R. $y = C_1e^{ax} + e^{-\frac{ax}{2}}\left(A\cos\dfrac{ax\sqrt{3}}{2} + B\sin\dfrac{ax\sqrt{3}}{2}\right).$

5. $\dfrac{d^4y}{dx^4} - 8\dfrac{d^3y}{dx^3} + 26\dfrac{d^2y}{dx^2} - 48\dfrac{dy}{dx} + 45y = 0.$

R. $y = (C_1 + C_2x)\,e^{3x} + e^x\,(A\cos 2x + B\sin 2x).$

6. $\dfrac{d^3y}{dx^3} - \dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} + y = 0.$ R. $y = (C_1 + C_2x)\,e^x + C_3e^{-x}.$

7. $\dfrac{d^4y}{dx^4} + 6\dfrac{d^2y}{dx^2} - 16y = 0.$

R. $y = C_1e^{x\sqrt{2}} + C_2e^{-x\sqrt{2}} + (A\cos 2x\sqrt{2} + B\sin 2x\sqrt{2}).$

8. $\dfrac{d^4y}{dx^4} + 2n^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + n^4y = 0.$ R. $y = (C_1 + C_2x)\cos nx + (C_3 + C_4x)\sin nx.$

Application de la méthode de variation des constantes :

9. $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 7a^2\dfrac{dy}{dx} + 6a^3y = x^2.$

R. $y = C_1e^{ax} + C_2e^{2ax} + C_3e^{-3ax} + \dfrac{1}{6a^3}\left(x^2 + \dfrac{7x}{3a} + \dfrac{49}{18a^2}\right).$

10. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + a\dfrac{dy}{dx} - 6a^2y = e^{mx}.$ R. $y = C_1e^{2ax} + C_2e^{-3ax} + \dfrac{e^{mx}}{(m+3a)(m-2a)}.$

Intégration des équations avec second membre par la recherche d'une intégrale particulière (346) :

11. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + 2y = x.$

R. On cherche une intégrale de la forme $Y = \alpha x + \beta$, ce qui conduit à l'équation

$$2\alpha + 2(\alpha x + \beta) = x,$$

d'où

$$2\alpha = 1, \qquad \beta = -\alpha = -\frac{1}{2},$$

en sorte que l'on a l'intégrale particulière

$$Y = \frac{x-1}{2},$$

qu'il suffit d'ajouter à l'intégrale générale de l'équation sans second membre. On trouve

$$y = e^{-x}(A\cos x + B\sin x) + \frac{x-1}{2}.$$

12. $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 3\dfrac{d^2y}{dx^2} + 7\dfrac{dy}{dx} - 5y = x^3.$

R. $y = C_1e^x + e^x(A\cos 2x + B\sin 2x) - \dfrac{x^3}{5} - \dfrac{21}{25}x^2 + \dfrac{6}{125}x + \dfrac{522}{625}.$

13. $\frac{d^2y}{dx^2}+y=2\cos mx+3\sin mx$. — On cherche une intégrale particulière de la forme $\alpha\cos mx+\beta\sin mx$; α et β sont déterminés par deux équations, et l'on trouve

$$y=\mathrm{A}\cos x+\mathrm{B}\sin x+\frac{2\cos mx+3\sin mx}{1-m^2}.$$

14. $\frac{d^ny}{dx^n}-na\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}-\cdots\pm na^{n-1}\frac{dy}{dx}\mp a^ny=e^{mx}$.

$$\text{R.}\quad y=e^{ax}(\mathrm{C}_1+\mathrm{C}_2x+\mathrm{C}_3x^2+\cdots+\mathrm{C}_nx^{n-1})+\frac{e^{mx}}{(m-a)^n}.$$

Équations à coefficients variables :

15. $(x+a)^2\frac{d^2y}{dx^2}-4(x+a)\frac{dy}{dx}+6y=0$.

Posant $y=(x+a)^r$, on trouve l'équation *auxiliaire*

$$r(r-1)-4r+6=0,\qquad \text{ou}\qquad r^2-5r+6=0,$$

donnant pour r deux valeurs convenables.

$$y=\mathrm{C}_1(x+a)^3+\mathrm{C}_2(x+a)^2.$$

Généraliser.

CHAPITRE XLI.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DES ORDRES SUPÉRIEURS PAR DES PROCÉDÉS PARTICULIERS.

352. En dehors des équations linéaires, on ne sait intégrer qu'un petit nombre d'équations différentielles de formes particulières. Nous allons indiquer les principales.

Équations où manque l'une des variables. — Lorsque l'une des variables x, y manque dans l'équation, l'ordre de celle-ci s'abaisse d'une unité. Ainsi, il suffit de poser $\mathrm{D}_xy=p$ pour ramener l'équation du second ordre

$$f\left(x,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}\right)=0\qquad \text{à}\qquad f\left(x,p,\frac{dp}{dx}\right)=0.$$

Cette équation, étant intégrée, donnera p en fonction de x avec une

constante arbitraire. On aura donc

$$p = \frac{dy}{dx} = \varphi(x, C), \qquad y = \int \varphi(x, C)\, dx + C_1,$$

ce qui sera l'intégrale générale.

Si l'équation proposée était

$$f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0,$$

la même substitution donnerait

$$\frac{dy}{dx} = p, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = p\frac{dp}{dy},$$

et en intégrant l'équation du premier ordre

$$f\left(y, p, \frac{pdp}{dy}\right) = 0,$$

on trouverait

$$p = \varphi(y, C), \qquad dx = \frac{dy}{p} = \frac{dy}{\varphi(y, C)}, \qquad x = C_1 + \int \frac{dy}{\varphi(y, C)}.$$

Soit, comme exemple, l'équation

$$y\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - my\frac{dy}{dx} = 0;$$

elle devient, par la substitution $dy = pdx$,

$$py\frac{dp}{dy} - p^2 - mpy = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{dp}{dy} - \frac{p}{y} = m,$$

en divisant par py. L'intégrale de cette équation linéaire étant

$$p = y(C + m\,\mathrm{l}.\,y) = my\,\mathrm{l}.\,C'y,$$

on a

$$\frac{dy}{dx} = my\,\mathrm{l}.\,C'y, \qquad mdx = \frac{dy}{y\,\mathrm{l}.\,C'y}, \qquad mx + C_1 = \mathrm{l}.\,\mathrm{l}.\,C'y,$$

d'où, enfin,

$$\mathrm{l}.\,C'y = e^{mx+C_1}.$$

352. *Équations qui ne renferment que deux dérivées consécutives.* — Cas particulier des précédentes. Soit l'équation du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}\right);$$

la substitution indiquée plus haut donnera

$$\frac{dp}{dx} = \mathrm{f}(p), \qquad dx = \frac{dp}{\mathrm{f}(p)}, \qquad x = \mathrm{C} + \int \frac{dp}{\mathrm{f}(p)}.$$

Intégrant et résolvant par rapport à p, on tirera de cette équation

$$p = \varphi(x, \mathrm{C}), \qquad y = \mathrm{C}_1 + \int \varphi(x, \mathrm{C})\, dx,$$

et l'on aura l'intégrale générale.

Ainsi, l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = 0$$

devient

$$\frac{dp}{dx} = \sqrt{1 + p^2}, \qquad \text{ou} \qquad dx = \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

On en déduit par l'intégration

$$x = \mathrm{C} + \mathrm{l.}(p + \sqrt{1 + p^2}), \;\; p + \sqrt{1 + p^2} = e^{x-\mathrm{C}}, \;\; 2p = e^{x-\mathrm{C}} - e^{-(x-\mathrm{C})},$$

et par suite,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{x-\mathrm{C}} - e^{-(x-\mathrm{C})}}{2}, \qquad y = \mathrm{C}_1 + \frac{e^{x-\mathrm{C}} + e^{-(x-\mathrm{C})}}{2}.$$

Remarque. Si l'on éprouvait trop de difficultés à tirer de l'équation entre x et p la valeur de p en x, on trouverait y en fonction de p par l'équation

$$dy = pdx = p\,\frac{dp}{\mathrm{f}(p)}, \qquad y = \mathrm{C}_1 + \int \frac{p\,dp}{\mathrm{f}(p)},$$

et l'élimination de p entre les expressions de x et de y conduirait à l'intégrale cherchée.

En général, l'équation

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \mathrm{f}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

s'abaissera au premier ordre, si l'on pose $z = \mathrm{D}^{n-1}{}_x y$, et, après avoir intégré, on exprimera z en fonction de x, puis on trouvera la valeur de y par $n - 1$ quadratures successives (351).

354. Considérons encore les équations de la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{f}(y),$$

et, désignant toujours par p la dérivée première de y, nous aurons (352)

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=\frac{pdp}{dy}=\mathrm{f}(y),\qquad pdp=\mathrm{f}(y)\,dy,$$

et, en intégrant,

$$p^2=2\int \mathrm{f}(y)\,dy+\mathrm{C}.$$

D'où nous tirerons, en remplaçant p par sa valeur,

$$\frac{dy^2}{dx^2}=\mathrm{C}+2\int \mathrm{f}(y)\,dy,\qquad dx=\pm\frac{dy}{\sqrt{\mathrm{C}+2\int \mathrm{f}(y)\,dy}},$$

et, au moyen d'une nouvelle quadrature,

$$x=\mathrm{C}_1\pm\int\frac{dy}{\sqrt{\mathrm{C}+2\int \mathrm{f}(y)\,dy}}.$$

De même, si l'on avait une équation telle que

$$\frac{d^ny}{dx^n}=\mathrm{f}\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right),$$

on commencerait par poser $z=\mathrm{D}^{n-2}{}_xy$, et par intégrer l'équation

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\mathrm{f}(z)$$

comme ci-dessus. La valeur de x en fonction de z étant connue, on en déduirait celle de z en fonction de x, puis la valeur de y en x s'obtiendrait par $n-2$ quadratures successives.

355. *Équations homogènes.* — Lorsqu'une équation du second ordre, multipliée par dx^2, est homogène par rapport à x, y, dx, dy, d^2y, considérés comme autant de variables, on élimine facilement x et dx de l'équation. Pour cela, on posera

$$\frac{y}{x}=u,\qquad \frac{dy}{dx}=p,\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{q}{x},$$

et comme y, dy, d^2y sont ainsi remplacés par des fonctions du premier degré en x, dx, il est clair que l'équation transformée sera homogène par rapport à x, dx. Mais la différentielle dx ayant évidemment disparu de l'équation, il faut nécessairement que x ait disparu en même temps, en sorte que l'équation ne renfermera plus que u, p, q. Ainsi, l'équation

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}-ny=0$$

satisfait à la condition proposée, et devient par la substitution indiquée

$$x^2 \frac{q}{x} - px - nux = 0, \qquad \text{ou} \qquad q = p + nu.$$

Cela posé, soit

$$q = \mathrm{f}(u, p)$$

l'équation entre u, p, q, résolue par rapport à q. Les équations

$$y = vx, \qquad dy = p\,dx$$

donnent facilement, comme on l'a vu (336),

$$(\alpha) \qquad \frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u};$$

et, d'autre part, on a évidemment

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{q}{x}, \qquad \frac{dx}{x} = \frac{dp}{q},$$

ou, en égalant les valeurs de dx, et mettant pour q sa valeur en u, p,

$$(\beta) \qquad \frac{dp}{\mathrm{f}(u, p)} = \frac{du}{p-u}.$$

Cette équation du premier ordre entre u et p pourra s'intégrer, dans certains cas, et conduire à une valeur de p en fonction de u, renfermant une constante arbitraire,

$$p = \varphi(u, \mathrm{C}).$$

Substituant cette valeur dans l'équation (α), on trouvera

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{\varphi(u, \mathrm{C}) - u}, \qquad \mathrm{l}.x + \mathrm{C}_1 = \int \frac{du}{\varphi(u, \mathrm{C}) - u},$$

et, en remplaçant u par sa valeur $y : x$ après l'intégration, on aura l'intégrale générale entre x et y.

Par exemple, l'équation indiquée plus haut nous donnera

$$\frac{dp}{p + nu} = \frac{du}{p - u} \qquad \text{ou} \qquad (p-u)\,dp - (p + nu)\,du = 0,$$

équation facile à intégrer, si on l'écrit

$$pdp - nudu - (udp + pdu) = 0.$$

L'intégrale est

$$p^2 - nu^2 - 2pu = \mathrm{C}, \qquad \text{ou} \qquad p = u \pm \sqrt{\mathrm{C} + (n+1)\,u^2},$$

et l'équation (α) devient, par la substitution de p,

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{\pm\sqrt{C + (n+1)u^2}}.$$

Intégrant de nouveau et remplaçant u par sa valeur $y : x$, on trouvera enfin

$$y = x\left(C_1 x^{\sqrt{n+1}} + C_2 x^{-\sqrt{n+1}}\right).$$

256. Lorsqu'une équation de l'ordre n est homogène par rapport à y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$,..., on peut abaisser d'une unité l'ordre de l'équation, en posant

$$\frac{dy}{dx} = uy, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = y\frac{du}{dx} + u\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{du}{dx} + u^2\right),\ldots$$

La variable y disparaît comme facteur à tous les termes de l'équation, et l'on a, entre u et x, une équation de l'ordre $n - 1$.

257. *Intégration par les séries.* — Le nombre des équations différentielles que l'on sait intégrer sous forme finie étant très-petit, on a dû recourir aux méthodes d'approximation. La marche que nous avons suivie pour établir l'existence de l'intégrale (voir les ch. XXXVII et XL) permet de calculer les valeurs de l'intégrale y, pour des valeurs données de x, avec autant d'approximation que l'on veut (1), mais cette méthode est très-pénible. Le développement de la fonction intégrale y en série convergente, lorsqu'il est possible, convient mieux au calcul de cette fonction. On peut employer pour cet objet la formule de Taylor ou celle de Maclaurin, l'équation différentielle de l'ordre n permettant de calculer toutes les dérivées de y, à partir de cet ordre, en fonction des $n-1$ premières, qui restent arbitraires, pour la valeur $x = x_0$ ou $x = 0$ de la variable. Mais on admet ainsi que l'intégrale est développable en série convergente suivant les puissances entières, positives et croissantes de x ou de $x - x_0$. La méthode des coefficients indéterminés est plus générale : voici en quoi elle consiste.

L'équation différentielle entre x et y étant supposée réduite à un polynôme rationnel et entier par rapport à y et à ses dérivées, égalé à zéro, on

(1) On peut voir le développement de cette méthode dans les *Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral* de M. l'abbé Moigno, t. II, 27e et 28e leçons.

cherche à satisfaire à l'équation par une expression de la forme

$$y = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + Dx^{\delta} + \cdots,$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ étant des exposants quelconques, mais croissants; A, B, C, D,... des coefficients constants. On forme les dérivées de y d'après cette équation, et, substituant leurs valeurs dans le premier nombre de l'équation donnée, on ramène ce premier membre à la forme d'une série ordonnée suivant des puissances *croissantes* de la variable x. Les coefficients des diverses puissances de x devant être nuls séparément, pour que l'équation soit satisfaite quelque soit x, on obtient ainsi une série de conditions qui déterminent les exposants $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, et les coefficients A, B, C,..., sauf un certain nombre d'entr'eux qui restent arbitraires et sont les constantes arbitraires de l'intégrale générale.

Il reste alors à vérifier si ces valeurs de $\alpha, \beta, \ldots$, A, B,..., substituées dans l'expression de y, donnent pour y et pour ses dérivées successives des séries convergentes, car cette condition est nécessaire (251). Appliquons cette méthode à l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{m}{x}\frac{dy}{dx} + ny = 0,$$

où m, n sont des constantes données. La substitution, dans le premier membre de cette équation, des valeurs

$$y = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \cdots,$$

$$\frac{dy}{dx} = A\alpha x^{\alpha-1} + B\beta x^{\beta-1} + C\gamma x^{\gamma-1} + \cdots,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + B\beta(\beta-1)x^{\beta-2} + C\gamma(\gamma-1)x^{\gamma-2} + \ldots,$$

donne, en groupant les termes en A, B, C,...,

$$[\alpha(m+\alpha-1)x^{\alpha-2}+nx^{\alpha}]+B[\beta(m+\beta-1)x^{\beta-2}+nx^{\beta}]+C[\gamma(m+\gamma-1)x^{\gamma-2}+nx^{\gamma}]+\ldots$$

L'exposant $\alpha - 2$ est moindre que tous les autres: il faut donc que le coefficient de $x^{\alpha-2}$ soit nul; donc, on doit avoir

$$\alpha = 0 \qquad \text{ou} \qquad m + \alpha - 1 = 0.$$

Adoptons d'abord la première valeur; le terme en x^{α} ne peut être nul, à moins qu'il ne se réduise avec l'un des suivants. Nous poserons donc

$$\beta - 2 = \alpha, \qquad \gamma - 2 = \beta, \qquad \delta - 2 = \gamma, \ldots,$$

et, égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de x, nous aurons

$$An + B\beta(m+\beta-1) = 0,\ Bn + C\gamma(m+\gamma-1) = 0,\ Cn + D\delta(m+\delta-1) = 0, \ldots$$

Nous déduisons, de ce double système d'équations,

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 2, \qquad \gamma = 4, \qquad \delta = 6, \ldots,$$

$$= -\frac{nA}{2\cdot(m+1)}, \quad C = +\frac{n^2A}{2\cdot4\,(m+1)(m+3)}, \quad D = -\frac{n^3A}{2\cdot4\cdot6\,(m+1)(m+3)(m+5)},$$

et la valeur de y devient, par la substitution,

$$y = A\left[1 - \frac{nx^2}{2(m+1)} + \frac{n^2x^4}{2\cdot4(m+1)(m+3)} - \frac{n^3x^6}{2\cdot4\cdot6\,(m+1)(m+3)(m+5)} + \cdots\right]$$

Le coefficient A reste seul arbitraire : ce n'est donc là qu'une intégrale particulière. Mais nous en obtiendrons une seconde en adoptant pour α la seconde valeur, et en admettant encore les mêmes relations entre α, β, γ... Nous aurons ainsi

$$\alpha = 1 - m, \qquad \beta = 3 - m, \qquad \gamma = 5 - m\ldots,$$

$$= \frac{nA}{2\,(m-3)}, \quad C = \frac{n^2A}{2\cdot4\,(m-3)(m-5)}, \quad D = \frac{n^3A}{2\cdot4\cdot6\,(m-3)(m-5)(m-7)},$$

et, par suite, nous obtiendrons l'intégrale particulière

$$y = Ax^{1-m}\left[1 + \frac{nx^2}{2(m-3)} + \frac{n^2x^4}{2\cdot4(m-3)(m-5)} + \frac{n^3x^6}{2\cdot4\cdot6(m-3)(m-5)(m-7)} + \cdots\right]$$

A peut désigner des constantes différentes dans les équations (2) et (3). L'équation proposée étant linéaire et sans second membre, la somme des deux intégrales particulières (2) et (3), renfermant chacune une constante arbitraire, donnera l'intégrale générale avec deux constantes arbitraires.

Le rapport d'un terme de rang $p + 1$ au précédent est, dans les deux séries respectivement,

$$-\frac{nx^2}{2p\,(m+2p-1)}; \qquad \frac{nx^2}{2p\,(m-2p-1)}.$$

Ces rapports tendant vers zéro pour les valeurs indéfiniment croissantes de p, les séries restent convergentes quelque soit x, et l'on voit facilement qu'il en est de même de leurs dérivées première et seconde. Ainsi, la solution trouvée répond bien à l'équation (1). Il y a exception lorsque m est un nombre impair négatif, car alors les termes de la série (2) deviennent infinis à partir d'un certain rang; et lorsque m est un nombre impair positif, la série (3) devenant alors illusoire. Dans l'un et l'autre cas, nos formules ne fournissent donc plus qu'une intégrale particulière de l'équation différentielle, et à l'aide de cet intégrale, on peut ramener l'équation au premier ordre comme nous l'avons expliqué (347).

Dans le cas particulier où $n = 2$, l'intégrale générale de l'équat revient à

$$y = A\left(1 - \frac{nx^2}{2\cdot 3} + \frac{n^2x^4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \cdots\right) + \frac{A'}{x}\left(1 - \frac{nx^2}{1\cdot 2} + \frac{n^2x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \right.$$

et l'on reconnaît sans peine que cette équation revient à celle-ci :

$$y = \frac{A \sin x\sqrt{n}}{x\sqrt{n}} + \frac{A' \cos x\sqrt{n}}{x}.$$

Si $n = 1$, l'intégrale y devient illusoire, et l'on n'a plus qu'une intégrale particulière

$$y = A\left(1 - \frac{nx^2}{2^2} + \frac{n^2x^4}{2^2\cdot 4^2} - \frac{n^3x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \cdots\right).$$

Exercices.

Équations ne renfermant pas y (352).

1. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = x + \sin x.$ R. $y = C_1 + C_2x + \dfrac{x^3}{6} - \sin x.$

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dx} = 0.$ R. $y = C\,\mathrm{L}\,x + C_1.$

3. $x\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2a\left(1 + \dfrac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} = 0.$ R. $y = C_1 \pm \displaystyle\int \frac{(x^2 - C)\,dx}{\sqrt{a^4 - (x^2 - C)^2}}.$

4. $\left(x^2 + a^2\dfrac{dy^2}{dx^2}\right)\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2x\dfrac{dy}{dx} = 0.$

R. $x^2 = \dfrac{C}{p} - \dfrac{a^2p^2}{3},\quad y = C_1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\displaystyle\int \frac{3C + 2a^2p^3}{\sqrt{3Cp - a^2p^4}}\,dp.$

Équations ne renfermant que deux dérivées consécutives (353) :

5. $a\dfrac{d^2y}{dx^2} \pm \left(1 + \dfrac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} = 0.$ R. $(x - C)^2 + (y - C_1)^2 = a^2.$

6. $a\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx}\left(1 + \dfrac{dy^2}{dx^2}\right) = 0.$ R. $x - C = a\,\mathrm{l.}\sin\left(\dfrac{y - C_1}{a}\right).$

7. $\dfrac{d^4y}{dx^4} = a\sqrt{\dfrac{d^3y}{dx^3}}.$ R. $y = \dfrac{a^2(x - C)^5}{3\cdot 4\cdot 4\cdot 5} + C_1x^2 + C_2x + C_3.$

8. $a\frac{d^3y}{dx^3}\frac{d^2y}{dx^2}=\sqrt{1+\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}$.

$$y=C_2+C_1x+\frac{1}{6a}[(x-C)^2-a^2]^{\frac{3}{2}}-\frac{a(x-C)}{2}\,\mathrm{l.}\left[\frac{x-C\pm\sqrt{(x-C)^2-a^2}}{a}\right]\pm\frac{a}{2}\sqrt{(x-C)^2-a^2}.$$

Équations appartenant au type du n° 353 :

9. $y^3\frac{d^2y}{dx^2}=a^2$. R. $C(x-C_1)^2=Cy^2-a^2$.

10. $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\sqrt{ay}}$. R. $36(x-C_1)^2=\sqrt{a}\,(C+4\sqrt{y})(4y-4C\sqrt{y}+C^2)$.

Equations homogènes (355, 356) :

11. $ax^3\frac{d^2y}{dx^2}-\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)^2=0$. R. $y=ax\,\mathrm{l.}\left(\frac{ax}{C_1+Cx}\right)$.

12. $y\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy^2}{dx^2}=1$. R. $y^2-x^2+2C_1x+C_2=0$.

13. $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}-3y=0$. R. $x^3=C_1(y+\sqrt{y^2+Cx^2})$.

14. $y\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy^2}{dx^2}-\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}=0$. R. $y=C_1e^{Cx^2}$.

Intégration par les séries :

15. $\frac{dy}{dx}+ay+bx^3=0$.

R. $y=A\left(1-ax+\frac{a^2x^2}{1\cdot2}-\frac{a^3x^3}{1\cdot2\cdot3}+\cdots\right)-b\left(\frac{x^4}{4}-\frac{ax^5}{4\cdot5}+\frac{a^2x^6}{4\cdot5\cdot6}-\cdots\right)$.

16. $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-y^2=0$.

R. $y=A+Bx+\frac{A^2+B}{2}x^2+\frac{A^2+(2A+1)B}{1\cdot2\cdot3}x^3+\frac{A^2+2A^3+(4A+1)B+2B^2}{1\cdot2\cdot3\cdot4}x^4+\cdots$

17. $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{y}{x}=0$. R. $y=A\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2^2\cdot3}-\frac{x^4}{2^2\cdot3^2\cdot4}+\cdots\right)$.

Ce n'est qu'une intégrale particulière.

19. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + ax^n y = 0.$

R. $$y = A\left[1 - \frac{ax^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{a^2x^{2n+4}}{1\cdot 2\cdot(n+1)(2n+3)(n+2)^2} - \frac{a^3x^{3n+6}}{1\cdot 2\cdot 3(n+1)(2n+3)(3n+5)(n+2)^3} + \dots\right]$$
$$+ Bx\left[1 - \frac{ax^{n+2}}{(n+3)(n+2)} + \frac{a^2x^{2n+4}}{1\cdot 2(n+3)(2n+5)(n+2)^2} - \frac{a^3x^{3n+6}}{1\cdot 2\cdot 3(n+3)(2n+5)(3n+7)(n+2)^3} - \dots\right].$$

CHAPITRE XLII.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES SIMULTANÉES.

358. Soient x, y, z,..., u, des fonctions, en nombre n, d'une même variable indépendante t, définies par un système d'équations du premier ordre, que nous supposerons d'abord résolues par rapport aux dérivées de x, y,..., u, et mises sous la forme

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(x, y, \dots, u, t),\\ \frac{dy}{dt} &= f_2(x, y, \dots, v, t),\\ &\dots\dots\dots\\ \frac{du}{dt} &= f_n(x, y, \dots, u, t). \end{aligned}\right.$$

Si l'on applique à ce système d'équations, en la généralisant, la méthode que nous avons indiquée au chapitre XL, § 1, pour un système de deux équations, on démontre qu'il existe toujours un système de valeurs pour x, y,... u, capables de satisfaire aux équations (1), et de recevoir, pour une valeur donnée t_0 de la variable, des valeurs données arbitrairement x_0, y_0,..., u_0. Il faut et il suffit, pour cela, que les fonctions f_i et leurs dérivées partielles du premier ordre en x, y,..., u, t, soient finies et continues dans le voisinage du système de valeurs x_0, y_0,..., u_0, t_0. Ces *intégrales*, renfermant n constantes arbitraires x_0, y_0,..., u_0, ou n autres constantes C_1, C_2,..., C_n qui permettent de choisir arbitrairement les valeurs de x, y,.. , u, pour une valeur donnée t_0 de la variable, se nomment les *intégrales générales* du système (1). Toutes celles qui en dérivent par

l'attribution de valeurs particulières aux constantes C_1, C_2,..., sont des *intégrales particulières*. La méthode rappelée permettrait d'ailleurs, étant donnés x_0, y_0,..., u_0 pour une valeur t_0 de t, de construire avec autant d'approximation qu'on le voudrait les courbes qui sont la représentation géométrique des intégrales.

359. L'une des méthodes les plus commodes, pour l'intégration d'un système d'équations de la forme (1), consiste à éliminer, par des différentiations successives, toutes les fonctions inconnues sauf une seule, dont la recherche dépend de l'intégration d'une équation de l'ordre n, à deux variables.

Différentions les deux membres de la première des équations (1), ce qui introduira dans le second membre les dérivées $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$,..., $\frac{du}{dt}$, multipliées par des fonctions connues de x, y,..., u, t. Remplaçons ces dérivées de y, z,..., u par leurs valeurs, données par les $n-1$ dernières équations (1); nous aurons évidemment un résultat de la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi_1\left(x, \frac{dx}{dt}, y, \ldots, u, t\right).$$

Dérivant de nouveau par rapport à t et éliminant les dérivées de y, z,..., u de la même manière, nous trouverons

$$\frac{d^3x}{dt^3} = \varphi_2\left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, y, \ldots, u, t\right),$$

et ainsi de suite, jusqu'à ce que nous arrivions à une équation

$$\frac{d^nx}{dt^n} = \varphi_{n-1}\left(x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}, y, \ldots, u, t\right).$$

Les $n-1$ équations que nous venons de former, jointes à la première équation (1), forment un système de n équations entre lesquelles on peut éliminer les $n-1$ variables y, z,..., u, qui n'y figurent plus par leurs dérivées, et cette élimination conduira à une équation de l'ordre n par rapport à x,

$$\frac{d^nx}{dt^n} = \varphi_n\left(x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}, t\right).$$

L'intégration de cette équation donnera x en fonction de t avec n constantes arbitraires C_1, C_2,..., C_n. Les valeurs de y, z,..., u se trouveront

ensuite sans nouvelle intégration, en résolvant, par rapport à ces variables, $n-1$ d'entre les équations

$$\frac{dx}{dt}=f_1,\qquad \frac{d^2x}{dt^2}=\varphi_1,\ldots,\qquad \frac{d^nx}{dt^n}=\varphi_{n-1},$$

après qu'on y aura remplacé x et ses dérivées par leurs valeurs en fonction de t. On aura donc y, z,... en fonction de t et des mêmes constantes arbitraires C_1, C_2,... qui figurent dans l'expression de x.

260. *Intégration des équations linéaires à coefficients constants.* — Lorsque le système (1) sera formé d'équations linéaires par rapport à x, $y,\ldots, u$, il est visible que toutes les équations que l'on en déduira par des différentiations successives seront aussi linéaires, et qu'il en sera encore de même de l'équation finale en x. L'intégration d'un système de n équations linéaires du premier ordre dépendra donc de l'intégration d'une équation linéaire de l'ordre n, et de plus, si les coefficients des premières sont constants, l'équation d'ordre n sera à coefficients constants et s'intégrera sans difficulté par les méthodes exposées précédemment. Appliquons cette méthode au système de deux équations

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}+2x+y=7t-9e^t,\\ &\frac{dy}{dt}+4x+5y=4e^t-3t.\end{aligned}\right.$$

Différentiant la première, et remplaçant $\frac{dy}{dt}$ par sa valeur fournie par la seconde, on a

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}-4x-5y=7+3t-13e^t;$$

puis, remplaçant y par sa valeur tirée de la première équation,

$$\frac{d^2x}{dt^2}+7\frac{dx}{dt}+6x=7+38t-58e^t.$$

Intégrant d'abord l'équation sans second membre, on trouve l'équation auxiliaire

$$r^2+7r+6=0,\qquad \text{d'où}\qquad r_1=-1,\quad r_2=-6,$$

et l'intégrale générale

$$x=C_1e^{-t}+C_2e^{-6t}.$$

Pour avoir une intégrale particulière de l'équation avec second membre, il suffit d'y substituer

$$x = \alpha + \beta t + \gamma e^t,$$

et les valeurs de α, β, γ, seront trouvées

$$\alpha = -\frac{56}{9}, \quad \beta = \frac{19}{3}, \quad \gamma = -\frac{29}{7}.$$

Ajoutant cette intégrale particulière à l'intégrale de l'équation sans second membre, on aura l'intégrale générale de l'équation en x, savoir

$$x = -\frac{56}{9} + \frac{19}{3}t - \frac{29}{7}e^t + C_1 e^{-t} + C_2 e^{-6t}.$$

On remplacera x et sa dérivée par leurs valeurs dans la première des équations proposées, et l'on aura

$$y = \frac{55}{9} - \frac{17}{3}t + \frac{22}{7}e^t - C_1 e^{-t} + 4C_2 e^{-6t}.$$

Si l'équation auxiliaire renfermait des racines imaginaires ou des racines égales, on appliquerait les règles qui ont été prescrites pour ces cas au chapitre XL.

361. Lorsque l'on suivra cette marche pour l'intégration d'un système d'équations de la forme (1), on sera généralement conduit, comme nous l'avons dit, à une équation différentielle de l'ordre n entre deux variables; mais il pourra arriver, dans certains cas particuliers, que l'équation finale en x soit d'ordre inférieur à n. Si, par exemple, il suffisait de différentier $n-2$ fois l'équation

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y, \ldots, u, t),$$

pour que les variables y, z,..., u disparaissent toutes, l'équation entre x et t serait de l'ordre $n-1$, et donnerait une valeur de x ne renfermant que $n-1$ constantes orbitraires. Mais alors aussi l'on n'aurait plus que $n-2$ équations distinctes pour exprimer les $n-1$ variables y, z,..., u en fonction de t et de ces $n-1$ constantes, et l'on devrait faire une nouvelle intégration. Ainsi, portant les valeurs de z,..., u dans la seconde des équations (1), et remplaçant x par son expression déjà connue, on aurait une équation du premier ordre entre y et t, équation dont l'intégration introduirait une nouvelle constante arbitraire, qui compléterait les n constantes nécessaires pour l'intégration complète du système (1).

362. Il est quelquefois plus simple de suivre une méthode différente, dans l'intégration du système (1). Cette méthode, qui s'applique aux équations linéaires à coefficients constants, a l'avantage d'être aussi parfois applicable à des équations linéaires à coefficients variables, et nous prendrons pour exemple un tel système. Soit

$$\frac{dx}{dt} + T(ax + by) = T_1,$$

$$\frac{dy}{dt} + T(a'x + b'y) = T_2,$$

T, T_1, T_2 étant des fonctions de t. Multipliant la seconde équation par un facteur indéterminé λ, et ajoutant les équations membre à membre, on obtient

$$\frac{dx}{dt} + \lambda\frac{dy}{dt} + T\left[(a + \lambda a')x + (b + \lambda b')y\right] = T_1 + \lambda T_2.$$

Or, si l'on pose $x + \lambda y = V$, et si l'on détermine la constante λ d'après la condition

$$b + \lambda b' = \lambda(a + \lambda a'),$$

l'équation différentielle deviendra une équation linéaire du premier ordre

$$\frac{dV}{dt} + (a + \lambda a')TV = T_1 + \lambda T_2,$$

dont l'intégrale générale sera

$$V = x + \lambda y = e^{-(a+\lambda a')\int Tdt}\left[C + \int (T_1 + \lambda T_2)\, e^{(a+\lambda a')\int Tdt} dt\right].$$

L'équation qui détermine λ est du second degré, et admet deux racines λ_1, λ_2. Substituant successivement ces deux racines dans l'intégrale ci-dessus, et désignant par C_1, C_2 les constantes arbitraires correspondantes, on aura, pour déterminer x et y en fonction de t, deux équations du premier degré.

363. Lorsque les équations (1) ne sont pas linéaires à coefficients constants, l'application de la méthode générale du nº 359 conduit rarement à une équation différentielle finale que l'on sache intégrer. Mais parfois l'introduction d'une nouvelle variable permet de rendre linéaire un système qui ne l'était pas. Par exemple, si l'on avait le système non-linéaire

$$\frac{dx}{ax + by + cz + l} = \frac{dy}{a'x + b'y + c'z + l'} = \frac{dz}{a''x + b''y + c''z + l''},$$

$a, b, \ldots l, a' \ldots$ étant des constantes, on introduirait une variable t, dont la différentielle dt serait égalée à l'un quelconque des rapports précédents, et l'on intégrerait sans difficulté le système linéaire

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + cz + l, \quad \frac{dy}{dt} = a'x + \cdots, \quad \frac{dz}{dt} = a''x + \cdots,$$

après quoi l'élimination de t donnerait deux équations entre x, y, z.

La forme particulière des équations que l'on a à intégrer suggère fréquemment d'autres transformations élégantes qui simplifient l'intégration, mais il n'y a pas de règle générale à donner.

364. *Équations simultanées des ordres supérieurs au premier.* — La méthode générale du n° 359 s'applique facilement à des équations simultanées d'ordres quelconques. Concevons, pour fixer les idées, deux équations entre x, y, t, dans lesquelles l'ordre de la plus haute dérivée soit marqué par 2 pour x, par 3 pour y, et supposons les deux équations résolues par rapport à $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^3y}{dt^3}$. On peut réduire ce système à un système de cinq équations du premier ordre : il suffit de poser

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{dy'}{dt} = y'',$$

et les équations données se réduisant à la forme

$$\frac{dx'}{dt} = f_1(x, y, x', y', y'', t), \quad \frac{dy''}{dt} = f_2(x, y, x', y', y'', t),$$

on aura, entre les six variables x, y, x', y', y'', t un système de 5 équations, semblable au système (1). On en conclut immédiatement que le système proposé admet comme intégrales générales deux fonctions x, y de t, renfermant *cinq* constantes arbitraires.

Si l'on avait trois équations du second ordre

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f_1(x, y, z, t), \quad \frac{d^2y}{dt^2} = f_2(x, y, z, t), \quad \frac{d^2z}{dt^2} = f_3(x, y, z, t),$$

on pourrait leur substituer le système de six équations du premier ordre

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{dz}{dt} = z',$$

$$\frac{dx'}{dt} = f_1(x, y, z, t), \quad \frac{dy'}{dt} = f_2(x, y, z, t), \quad \frac{dz'}{dt} = f_3(x, y, z, t).$$

L'intégration de ce système et l'élimination des variables auxiliaires x', y', z' donnerait un système d'intégrales générales en x, y, z, t, avec *six* constantes arbitraires.

En général, on voit par cette méthode que si le nombre des fonctions inconnues est désigné par k, si les ordres des plus hautes dérivées qui entrent dans les k équations sont respectivement m pour x, n pour y,..., r pour u, les équations données étant d'ailleurs résolubles par rapport à ces dérivées de l'ordre le plus élevé, on pourra satisfaire au système des équations données par des valeurs de x, y,..., u, fonctions de t et de $m+n+\cdots+r$ constantes arbitraires; et ces valeurs seront les *intégrales générales* du système.

Après avoir ainsi réduit le système d'équations proposé à la forme (1), par l'introduction de nouvelles variables, on peut lui appliquer sans difficulté la marche tracée au n° 359. Différentiant successivement un nombre suffisant de fois l'une des équations, et éliminant les dérivées premières de toutes les fonctions, sauf une, à mesure qu'elles s'introduisent, on parviendra à éliminer aussi ces fonctions, et à former une équation différentielle d'un certain ordre entre t et la fonction restante. L'intégration de cette équation fera connaître cette fonction, et par suite les autres.

Ainsi, le système de deux équations du 2me ordre en x et du 3me ordre en y, conduira à une équation finale du 5me ordre entre x et t; le système de k équations de l'ordre m en x, de l'ordre n en y,... de l'ordre r en u, conduira à une équation de l'ordre $m+n+\cdots+r$ entre x et t; si on sait l'intégrer, une simple résolution d'équations fera connaître les autres fonctions inconnues y, z,..., u.

365. C'est pour la clarté de l'exposition que nous avons admis que l'on réduisît d'abord le système proposé à un système d'équations du premier ordre; mais si l'on veut lui appliquer la méthode que nous venons de rappeler, cette réduction ne sera pas nécessaire. On se bornera à former, par des différentiations successives, de nouvelles équations entre lesquelles on éliminera les fonctions y, z,..., u, et leurs dérivées en t, jusqu'à ce que l'on arrive à une équation différentielle entre x et t seulement. Considérons, comme exemple, le système d'équations *linéaires et à coefficients constants*

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 3x - 4y + 3 = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + x + y + 5 = 0.$$

Différentiant deux fois de suite la première, puis remplaçant $D^2_t y$ par sa valeur déduite de la seconde, on a

$$\frac{d^4x}{dt^4} - 3\frac{d^2x}{dt^2} + 4x + 4y + 20 = 0,$$

d'où, par l'élimination de y entre cette équation et la première,

$$\frac{d^4x}{dt^4} - 2\frac{d^2x}{dt^2} + x + 23 = 0.$$

L'intégration de cette équation donne

$$x = (C_1 + C_2t)\,e^t + (C_3 + C_4t)\,e^{-t} - 23,$$

et la substitution de cette valeur de x dans la première égalité conduit à

$$2y = (C_2 - C_1 - C_2t)\,e^t - (C_3 + C_4 + C_4t)\,e^{-t} + 36.$$

On peut aussi, après avoir réduit le système proposé au premier ordre par l'introduction de nouvelles variables, appliquer la méthode indiquée au n° 362.

366. Nous avons supposé, dans les différents problèmes traités ci-dessus, que les équations différentielles fussent résolues par rapport aux plus hautes dérivées qu'elles contenaient. S'il en était autrement, on commencerait donc par opérer cette résolution, puis on appliquerait les méthodes convenables. Il pourra cependant se présenter des cas où une telle résolution serait impossible, l'élimination de certaines dérivées faisant disparaître en même temps quelques unes des autres. Par exemple, si l'on avait un système de trois équations du premier ordre entre x, y, z, t, et qu'en éliminant $\frac{dx}{dt}$, on fît disparaître en même temps $\frac{dy}{dt}$, il est clair que l'on serait conduit à deux équations renfermant seulement la dérivée de z et les variables. Si ces équations n'étaient ni identiques ni incompatibles, l'élimination de la dérivée de z conduirait à une équation entre les variables seulement, sans constante arbitraire; on en tirerait z en fonction de x, y, t, et l'on serait ramené à intégrer deux équations du premier ordre entre x, y et t. Les intégrales ne renfermeraient donc que *deux* constantes arbitraires.

Exercices.

1. $\frac{dx}{dt} + 3x + 4y = 0, \qquad \frac{dy}{dt} + 2x + 5y = 0.$

R. $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-7t}, \qquad 2y = - C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{-7t}.$

2. $\frac{dx}{dt} + 3x + y = 0, \qquad \frac{dy}{dt} - x + y = 0.$

R. $x = (C_1 + C_2 t) e^{-2t}, \qquad y = (C_2 - 2C_1 - 2C_2 t) e^{-2t}.$

3. $\frac{dx}{dt} + 5x + y = 7e^t - 27, \qquad \frac{dy}{dt} - 2x + 3y = 12 - 3e^t.$

R. $x = -\frac{93}{17} + \frac{31}{26} e^t + (C_1 \cos t + C_2 \sin t) e^{-4t},$

$$y = \frac{6}{17} - \frac{2}{13} e^t - [(C_1 + C_2) \cos t - (C_1 - C_2) \sin t] e^{-4t}.$$

4. $\frac{dx}{dt} + 5x + y = 7e^t - 9e^{2t}, \qquad \frac{dy}{dt} - x + 3y = 4e^{2t} - 3e^t.$

R. $x = (C_1 + C_2 t) e^{-4t} + \frac{31}{25} e^t - \frac{49}{36} e^{2t}.$

$$y = -(C_1 + C_2 + C_2 t) e^{-4t} - \frac{11}{25} e^t + \frac{19}{36} e^{2t}.$$

5. $\frac{dx}{\alpha(y+z)} = \frac{dy}{\beta(z+x)} = \frac{dz}{\gamma(x+y)}.$

R. Posant dt égal à la valeur commune de ces rapports, on trouve

$$x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + C_3 e^{r_3 t},$$

r_1, r_2, r_3 étant les racines de l'équation

$$r^3 - (\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) r - 2\alpha\beta\gamma = 0.$$

On trouve ensuite

$$\alpha(y+z) = C_1 r_1 e^{r_1 t} + C_2 r_2 e^{r_2 t} + C_3 r_3 e^{r_3 t},$$

$$\alpha(\beta z + \gamma y) - \alpha(\beta + \gamma) x = C_1 r_1^2 e^{r_1 t} + C_2 r_2^2 e^{r_2 t} + C_3 r_3^2 e^{r_3 t}.$$

L'élimination de t entre ces trois équations donnera deux équations entre x, y, z, qui seront les intégrales cherchées.

6. $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{u} = \frac{du}{x}.$

R. $(x+z)^2 - (y+u)^2 = C_1, \qquad (x-z)^2 + (y-u)^2 = C_2,$

$$\text{l.}\,(x + y + z + u) = C_3 + \text{arc tg}\,\frac{x-z}{y-u}.$$

$$= 0.$$

$$\sqrt{7}\Big) + C_4 e^{\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{t}{2}\sqrt{7}\right).$$

tions.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt} + 6y + 5x = \sin t.$$

$$C_1(\cos t\sqrt{2} + C_2) + C_3(\cos t\sqrt{3} + C_4).$$

$$x = 0.$$

$$y = C_3 + C_4 t - C_1 \cos mt - C_2 \sin mt.$$

$$+ z, \qquad \frac{dz}{dt} = y - x.$$

$$y = C_1 + C_2 e^t + C_3 e^{-t}, \qquad z = -C_1 - C_3 e^{-t}.$$

$$t\frac{dx}{dt} - t\frac{dy}{dt} + x\frac{dz}{dt} = y, \qquad y\frac{dx}{dt} - y\frac{dy}{dt} - t\frac{dz}{dt} = 0 \quad (366).$$

es de x et de y conduit à l'équation

$$x^2 + y^2 - txy - tx + ty - t^2 = 0.$$

ion y et sa dérivée par rapport à t, on a deux équations du pre- et t.

CHAPITRE XLIII.

S GÉOMÉTRIQUES DE L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

ıne courbe se trouve définie par une relation qui a lieu es points entre certains éléments géométriques, tels que le rayon de courbure, la longueur de l'arc, etc., cette e par une équation entre les coordonnées de la courbe elles, du premier ordre ou d'un ordre supérieur. Si l'on er cette équation différentielle, on trouvera l'équation bes qui vérifient la condition proposée.

Supposons, par exemple, que l'on demande *la courbe dans laquelle la sous-tangente est égale à l'abscisse du point de contact.* La condition s'exprime évidemment par l'équation différentielle

$$-y\frac{dx}{dy}=x, \qquad \text{ou} \qquad x\frac{dy}{dx}+y=0,$$

dont l'intégrale générale est

$$xy=\mathrm{C}.$$

Toute hyperbole qui a pour asymptotes les axes coordonnés répond donc à la question.

Si l'on demande que la *longueur de la normale soit égale à la distance de l'origine au point où cette normale coupe l'axe des x,* on aura l'équation différentielle

$$x+y\frac{dy}{dx}=y\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}},$$

ou

$$2xy\frac{dy}{dx}+x^2-y^2=0.$$

Cette équation s'intègre facilement par le procédé indiqué au n° 336. Posant $y=ux$, $dy=pdx$, on a

$$2pu-u^2+1=0, \qquad p=\frac{u^2-1}{2u},$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{du}{p-u}=-\frac{2u\,du}{1+u^2}, \qquad \mathrm{l}.x+\mathrm{l}.(1+u^2)=\mathrm{l}.\mathrm{C},$$

d'où enfin, en remplaçant u par sa valeur,

$$x^2+y^2-\mathrm{C}x=0,$$

équation qui représente un cercle de rayon quelconque, ayant son centre sur l'axe des x, et passant par l'origine.

368. On veut trouver *la courbe dans laquelle l'aire* S, *comptée à partir de l'axe des y, est proportionnelle à l'arc s compté du même axe.* On aura

$$\mathrm{S}=as, \qquad d\mathrm{S}=a\,ds, \qquad y\,dx=a\,dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}},$$

et l'équation différentielle de la courbe sera

$$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{\frac{y^2}{a^2}-1}, \qquad \text{ou} \qquad dx=\pm\frac{a\,dy}{\sqrt{y^2-a^2}}.$$

On en déduit, en négligeant le double signe qui correspond à un simple changement dans le sens des x positifs, et intégrant,

$$x - C = a \,\mathrm{l.}\left(\frac{y + \sqrt{y^2 - a^2}}{a}\right), \qquad y + \sqrt{y^2 - a^2} = ae^{\frac{x-c}{a}}.$$

Tirant de là la valeur de y, on trouve la chaînette

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x-c}{a}} + e^{-\frac{x-c}{a}}\right).$$

On sait en effet que cette courbe jouit de la propriété énoncée (ch. XVI, ex. 2).

369. L'un des problèmes les plus célèbres dans cet ordre de recherches est celui des *trajectoires*. Étant donné un système de courbes (C) dont l'équation renferme un paramètre variable α,

$$(1) \qquad F(x, y, \alpha) = 0,$$

il s'agit de trouver une courbe qui coupe toutes les courbes du système sous un angle constant, dont la tangente est m.

Soit M (x, y) le point où la trajectoire coupe l'une des courbes (C) du système, $\frac{dy}{dx}$ le coefficient angulaire de la tangente à la trajectoire en ce point; φ et ψ les angles que font respectivement les tangentes à la courbe (C) et à la trajectoire avec l'axe des x. On a évidemment, les axes étant rectangulaires,

$$\mathrm{tg}\,\varphi = -\frac{dF}{dx} : \frac{dF}{dy}, \qquad \mathrm{tg}\,\psi = \frac{dy}{dx}, \qquad \mathrm{tg}(\psi - \varphi) = m,$$

d'où l'on tire facilement la relation

$$(2) \qquad \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} - m\left(\frac{dF}{dy} - \frac{dF}{dx}\frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Cette équation renferme encore, en général, le paramètre α, mais si l'on élimine ce paramètre entre les équations (1) et (2), on aura entre x, y et $\frac{dy}{dx}$ une équation qui conviendra à chacun des points de la trajectoire. L'intégration de cette équation du premier ordre donnera toutes les courbes qui répondent à la question, et comme l'intégrale renfermera une constante arbitraire, on voit qu'elles seront en nombre infini, comme il était facile de le prévoir.

Supposons que les courbes (C) soient les *paraboles*

$$y - \alpha x^a = 0;$$

l'équation (2) deviendra

$$-\alpha a x^{a-1} + \frac{dy}{dx} - m\left(1 + \alpha a x^{a-1}\frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

ou, en multipliant par $x dx$ et remplaçant αx^a par y,

$$x\,dy - ay\,dx - m\,(x\,dx + ay\,dx) = 0,$$

équation homogène dont l'intégration n'offrira aucune difficulté. Suppos
$a = 1$; l'équation précédente se réduit à celle-ci :

$$x\,dy - y\,dx - m\,(x\,dx + y\,dy) = 0,$$

dont on obtient immédiatement l'intégrale générale en la divisant p
$x^2 + y^2$. On a

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} - \frac{m}{2}\,\mathrm{l.}\,(x^2 + y^2) = \mathrm{C},$$

ou

$$\mathrm{l.}\sqrt{x^2 + y^2} = \mathrm{C} + \frac{1}{m}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x},$$

ou enfin, en introduisant les coordonnées polaires r et θ,

$$r = \mathrm{C}e^{\frac{\theta}{m}}.$$

Ainsi les droites passant par l'origine des coordonnées,

$$y = \alpha x,$$

sont coupées sous un angle constant par les spirales logarithmiques comprises dans l'équation ci-dessus, C étant un paramètre arbitraire.

370. Le problème des trajectoires présente deux cas particuliers remarquables : 1° L'angle d'intersection est nul, et la courbe cherchée touche toutes les courbes (C). Il faut faire $m = 0$ dans l'équation (2), qui devient

$$\frac{d\mathrm{F}}{dx} + \frac{d\mathrm{F}}{dy}\frac{dy}{dx} = 0,$$

et l'élimination du paramètre (α) entre cette équation et l'équation (1) conduira précisément (316) à l'équation différentielle des courbes (C). L'intégrale générale de cette équation sera donc identique avec l'équation (1), et ne représentera que les courbes données elles-mêmes. Si donc il

existe une courbe tangente à toutes les courbes (C), elle ne pourra être fournie que par la solution singulière de l'équation différentielle résultant de l'élimination de α entre l'équation des courbes (C) et sa dérivée. Cela s'accorde avec les propriétés des solutions singulières exposées au n° 324.

2° L'angle d'intersection est droit, et les trajectoires sont *orthogonales.* L'équation (2), où l'on fait $m = \infty$, devient

$$(3) \qquad \frac{dF}{dx}\frac{dy}{dx} - \frac{dF}{dy} = 0.$$

Ainsi, s'il s'agit des courbes paraboliques $y = \alpha x^a$, on trouvera, pour l'équation des trajectoires orthogonales,

$$\alpha a x^{a-1}\frac{dy}{dx} + 1 = 0, \qquad \text{ou} \qquad ay\frac{dy}{dx} + x = 0,$$

d'où

$$x^2 + ay^2 = C.$$

Les trajectoires sont des lignes du second ordre, ayant l'origine pour centre : ellipses si $a > 0$, hyperboles si $a < 0$. Le cas $a = 1$ donne des cercles ; $a = -1$ donne le système orthogonal

$$xy = \alpha, \qquad x^2 - y^2 = C;$$

les courbes du premier système sont des hyperboles équilatères ayant pour asymptotes les axes coordonnés; celles du second des hyperboles équilatères ayant pour axes les axes coordonnés.

371. Cherchons *une courbe telle que les rayons vecteurs menés d'un point* (x, y) *de la courbe à deux points fixes* F *et* F′ *fassent avec la droite* FF′ *deux angles dont la somme est une constante* α, *et les trajectoires orthogonales du système obtenu par la variation de* α.

Prenant pour axe des x la droite FF′, pour axe des y la perpendiculaire en son milieu O, FF′ $= 2c$, on a

$$\text{arc tg}\,\frac{y}{x-c} + \text{arc tg}\,\frac{y}{x+c} = \alpha,$$

ou

$$(\alpha) \qquad x^2 - y^2 - 2xy\cot\alpha = c^2$$

pour l'équation des courbes cherchées; α est le paramètre variable. Ces courbes sont des hyperboles équilatères passant toutes par les points F et

F′, et ayant leur centre en O. L'équation (3) devient

$$(x - y \cot \alpha) \frac{dy}{dx} + y + x \cot \alpha = 0,$$

ou, en éliminant cot α au moyen de l'équation ci-dessus,

$$(x^2 + y^2 + c^2) y \frac{dy}{dx} + (x^2 + y^2 - c^2) x = 0.$$

On peut donner à cette équation la forme

$$(x^2 + y^2 + c^2)(y\,dy + x\,dx) - 2c^2 x\,dx = 0,$$

et le premier membre devient une différentielle exacte.

L'intégrale générale est donc

$$(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2 x^2 = \beta,$$

β étant la constante arbitraire. Les courbes représentées par cette équation sont des *cassinoïdes,* dont chaque point est tel que le produit de ses distances aux deux foyers F et F′ est constant, car l'équation peut s'écrire

$$(\beta) \qquad [y^2 + (x + c)^2][y^2 + (x - c)^2] = \beta.$$

Les hyperboles (α) et les cassinoïdes (β) forment donc un système orthogonal (1).

372. Lorsque les courbes (C) dont on cherche les trajectoires orthogonales, sont définies seulement par leur équation différentielle, on obtient immédiatement l'équation différentielle des trajectoires en remplaçant, dans celle des courbes données, $\frac{dy}{dx}$ par $-\frac{dx}{dy}$. Il résulte de là un second moyen, parfois plus commode, pour trouver l'équation différentielle des trajectoires orthogonales du système (1) : il consiste à éliminer d'abord α entre l'équation (1) et sa dérivée par rapport à x, pour former l'équation différentielle des courbes (C), puis à opérer comme il vient d'être dit.

373. La courbe dont la recherche fait l'objet d'un problème proposé n'est pas toujours donnée par l'intégrale générale de l'équation différentielle ; elle peut être représentée par la solution singulière. C'est ce qui a lieu, par exemple, lorsque la courbe est définie par une propriété de

---

(1) On trouvera une étude complète de ce système orthogonal dans l'ouvrage de Lamé (*Leçons sur les coordonnées curvilignes*, 13me *leçon*).

ses tangentes, et que chaque tangente, considérée isolément, est une ligne qui satisfait à la condition donnée. Ainsi, si l'on demande *la courbe telle que le produit des segments compris, sur deux axes rectangulaires, entre l'origine et une tangente quelconque soit égal à un carré k^2*, on est conduit à l'équation

$$\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)\left(x - y\frac{dx}{dy}\right) = k^2, \quad \text{ou} \quad \left(y - x\frac{dy}{dx}\right)^2 = -k^2\frac{dy}{dx}.$$

Mise sous la forme

$$y = px \pm k\sqrt{-p},$$

cette équation rentre dans celle de Clairaut; elle admet 1° une intégrale générale

$$y = Cx \pm k\sqrt{-C},$$

qui représente simplement l'une quelconque des tangentes à la courbe; 2° une solution singulière, résultant de l'élimination de p entre l'équation différentielle et celle-ci :

$$x \mp \frac{k}{2\sqrt{-p}} = 0.$$

On en déduit, en éliminant $\sqrt{-p}$,

$$xy = \frac{k^2}{4}:$$

c'est l'équation d'une hyperbole dont les asymptotes coïncident avec les axes coordonnés.

374. La recherche d'une courbe d'après une propriété donnée conduit souvent à une équation différentielle d'un ordre supérieur au premier : c'est ce qui a lieu, par exemple, lorsque le rayon de courbure figure parmi les éléments du problème. Soit à trouver *la courbe dans laquelle le rayon de courbure est à la normale dans un rapport constant.* La relation

$$R = \frac{N}{a},$$

a étant une constante *positive ou négative,* donne l'équation

$$1 + \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{y}{a}\frac{d^2y}{dx^2},$$

équation qui rentre dans le cas du n° 332. On a donc

$$1+p^2=\frac{y}{a}\frac{dp}{dx}=\frac{y}{a}\frac{p\,dp}{dy},$$

d'où

$$\frac{2a\,dy}{y}=\frac{2p\,dp}{1+p^2},$$

d'où, par l'intégration,

$$\mathrm{l}\,(1+p^2)=\mathrm{l}.\,y^{2a}+\mathrm{l}.\,\mathrm{C}, \qquad 1+p^2=\mathrm{C}y^{2a},$$

et, par suite,

$$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{\mathrm{C}y^{2a}-1}, \qquad x=\mathrm{C}_1\pm\int\frac{dy}{\sqrt{\mathrm{C}y^{2a}-1}}.$$

L'intégration donnera l'équation de la courbe, avec deux constantes arbitraires C, C_1.

Supposons que le rayon de courbure soit égal à la normale, et dirigé dans le même sens : il faut prendre $a=-1$, d'où

$$x=\mathrm{C}_1\pm\int\frac{y\,dy}{\sqrt{\mathrm{C}-y^2}}=\mathrm{C}_1\mp\sqrt{\mathrm{C}-y^2},$$

ou

$$y^2+(x-\mathrm{C}_1)^2=\mathrm{C},$$

ce qui représente un cercle dont le centre est sur l'axe des x.

Si $a=1$, $\mathrm{R}=\mathrm{N}$, mais R et N sont dirigés en sens opposé. On a, en posant $\mathrm{C}=\alpha^{-2}$,

$$x=\mathrm{C}_1\pm\int\frac{\alpha\,dy}{\sqrt{y^2-\alpha^2}}=\mathrm{C}_1\pm\alpha\,\mathrm{l}.\left(\frac{y+\sqrt{y^2-\alpha^2}}{\alpha}\right),$$

d'où l'on tire facilement

$$y=\frac{\alpha}{2}\left(e^{\frac{x-\mathrm{C}_1}{\alpha}}+e^{-\frac{x-\mathrm{C}_1}{\alpha}}\right),$$

équation d'une chaînette.

L'hypothèse $\mathrm{R}=2\mathrm{N}$ conduirait, suivant que

$$a=\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad a=-\frac{1}{2},$$

aux équations

$$y=\frac{1}{\mathrm{C}}+\frac{\mathrm{C}}{4}(x-\mathrm{C}_1)^2, \qquad x=\mathrm{C}_1\pm\int\frac{y\,dy}{\sqrt{\mathrm{C}y-y^2}},$$

dont la première représente une parabole à axe parallèle à l'axe des y ; la seconde une cycloïde ayant pour base l'axe des x, le diamètre du cercle générateur étant la constante arbitraire C. Il est facile de vérifier que ces courbes jouissent de la propriété d'avoir le rayon de courbure double de la normale.

375. On tombe encore sur une équation du second ordre, lorsque l'on veut tirer l'équation d'une courbe en coordonnées rectangles, d'une relation donnée

$$s = f(\varphi),$$

entre l'arc s et l'inclinaison φ de la tangente à cette courbe sur l'axe des x. Cette relation, différentiée, donne en effet

$$\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} = f'\left(\text{arc tg}\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Mais il est plus simple de ramener le problème à deux quadratures en prenant φ pour variable indépendante. Les équations connues

$$\frac{dx}{ds} = \cos\varphi, \qquad \frac{dy}{ds} = \sin\varphi$$

donnent en effet, si l'on remplace ds par sa valeur en φ, $d\varphi$, et si l'on intègre,

$$x = C + \int f'(\varphi)\cos\varphi\, d\varphi, \qquad y = C_1 + \int f'(\varphi)\sin\varphi\, d\varphi.$$

On peut négliger les constantes C et C_1, parce que cela revient à déplacer l'origine des coordonnées, et n'introduit aucun changement de forme dans la courbe. L'élimination de φ entre ces deux équations conduira à l'équation de la courbe entre x et y, avec deux constantes arbitraires. Ainsi, de l'équation $s = a\varphi$, on tirerait

$$x = a\int\cos\varphi\, d\varphi = a\sin\varphi, \qquad y = -a\cos\varphi,$$

et, par l'élimination de φ,

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

équation qui représente un cercle de rayon a, dont le centre est en un point quelconque du plan.

Le problème de trouver une courbe définie par une équation $R = F(\varphi)$, entre le rayon de courbure et l'inclinaison de la tangente, se ramène au précédent par la relation $ds = R d\varphi$. On aura donc

$$(\gamma) \qquad x = \int F(\varphi)\cos\varphi\, d\varphi, \qquad y = \int F(\varphi)\sin\varphi\, d\varphi.$$

Ainsi, l'équation $R = a\varphi$ donnerait

$$x = a(\varphi \sin\varphi + \cos\varphi), \qquad y = a(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi),$$

d'où

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = a, \qquad x\sin\varphi - y\cos\varphi = a\varphi,$$

d'où, en élevant au carré et ajoutant,

$$x^2 + y^2 = a^2(1 + \varphi^2).$$

Éliminant enfin φ, on trouvera

$$x\cos\frac{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}{a} + y\sin\frac{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}{a} = a,$$

ce qui est l'équation d'une développante de cercle.

376. La recherche des développantes, la développée étant donnée, se ramène encore à ce qui précède, si l'on suppose connue l'équation $\sigma = f(\theta)$ de la développée, entre l'arc et l'inclinaison de la tangente. Soient, en effet, (x, y) les coordonnées d'un point de la développante, R son rayon de courbure, φ l'inclinaison de sa tangente sur l'axe des x. Les relations connues (154) conduiront à celles-ci :

$$R = \sigma + C = f(\theta) + C, \qquad \varphi = \theta \pm \frac{\pi}{2},$$

et les équations (γ) deviendront

$$x = \pm C\cos\theta \mp \int f(\theta)\sin\theta\, d\theta, \qquad y = \pm C\sin\theta \pm \int f(\theta)\cos\theta\, d\theta,$$

La constante C reste arbitraire. — Supposons, par exemple, que la développée ait pour équation

$$\sigma = f(\theta) = a^2b^2(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)^{-\frac{3}{2}}.$$

Nous trouverons sans difficulté, en négligeant les doubles signes puisque cela revient à changer le sens des axes positifs,

$$x = C\cos\theta + \frac{a^2\cos\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}, \qquad y = C\sin\theta + \frac{b^2\sin\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}.$$

L'élimination de θ entre ces deux équations conduira à l'équation des développantes. On en déduit sans peine

$$\frac{(x - C\cos\theta)^2}{a^2} + \frac{(y - C\sin\theta)^2}{b^2} = 1.$$

Si l'on suppose $C = 0$, cette équation devient celle de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

qui est conséquemment une des développantes de la courbe donnée. On peut remplacer les deux équations ci-dessus par celles-ci :

$$x = C\cos\theta + \frac{a^2\cos\theta}{x\cos\theta + y\sin\theta - C}, \quad y = C\sin\theta + \frac{b^2\sin\theta}{x\cos\theta + y\sin\theta - C}.$$

En considérant θ comme une variable auxiliaire, et C comme un paramètre arbitraire, ces deux équations représenteront toutes les courbes *parallèles* à l'ellipse ci-dessus.

377. *Courbe de poursuite.* — On appelle ainsi la courbe plane décrite par un point M (x, y) qui se dirige, avec une vitesse constante, vers un autre point M' (x', y') qui décrit une courbe donnée avec une vitesse également constante. Les axes étant rectangulaires, les conditions que la tangente à la courbe tracée par le point M passe à chaque instant par le point M', et que le rapport de la vitesse du premier à celle du second soit égal à une constante n, s'expriment par les équations

$$(\delta) \quad y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x), \qquad \sqrt{dx^2 + dy^2} = n\sqrt{dx'^2 + dy'^2}.$$

Supposons, pour fixer les idées, que le point M' décrive une droite $x' = a$, parallèle à l'axe des y, et que le point M parte de l'origine à l'instant où M' quitte l'axe des x. Les équations (δ) deviennent

$$y' = y + (a - x)\frac{dy}{dx}, \qquad \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = n\,\frac{dy'}{dx};$$

éliminant dy' par la différentiation de la première, on a

$$\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = n(a - x)\frac{d^2y}{dx^2}.$$

On fera (n° 352) $dy = p\,dx$, et l'on aura

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{dx}{n(a - x)}, \qquad \text{l.}\left(p + \sqrt{1 + p^2}\right) = -\frac{1}{n}\,\text{l.}(a - x) + \text{l.}C,$$

d'où

$$p + \sqrt{1 + p^2} = C(a - x)^{-\frac{1}{n}}.$$

Au départ, la vitesse du point M est dirigée suivant l'axe des x; on a donc à la fois $x=0$, $p=0$, d'où $C=a^{\frac{1}{n}}$, et par suite

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{a}{a-x}\right)^{\frac{1}{n}}-\left(\frac{a-x}{a}\right)^{\frac{1}{n}}\right].$$

Une nouvelle intégration donnera, si n n'est pas égal à 1,

$$y=C_1+\frac{a-x}{2}\left[\frac{n}{1-n}\left(\frac{a}{a-x}\right)^{\frac{1}{n}}+\frac{n}{1+n}\left(\frac{a-x}{a}\right)^{\frac{1}{n}}\right],$$

et comme x et y sont nuls ensemble,

$$C_1=-\frac{an}{1-n^2},$$

Si n était égal à l'unité, c'est-à-dire si les mobiles avaient des vitesses égales, on trouverait

$$y=a\,\mathrm{l.}\left(\frac{a}{a-x}\right)+\frac{(2a-x)x}{2a}$$

pour l'équation de la courbe de poursuite.

Exercices.

1. Chercher la courbe dont la sous-tangente est une fonction $f(x)$ de l'abscisse.

$$\text{R.}\qquad y=Ce^{-\int\frac{dx}{f(x)}}.$$

Cas particuliers : $f(x)=x$; $f(x)=x^2$.

2. Chercher la courbe telle que la portion de l'axe des y entre l'origine et la tangente soit proportionnelle au rayon mené de l'origine au point de contact.

$$\text{R.}\qquad y=\frac{x}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{\pm m}-\left(\frac{a}{x}\right)^{\pm m}\right];\quad a=\textit{const. arbitr.}$$

3. Les distances de l'origine aux points où la tangente coupe l'axe des y et où la normale coupe l'axe des x sont dans un rapport constant a. Trouver la courbe.

R. L'équation différentielle est $ydx-xdy=a(xdx+ydy)$. On trouve la spirale logarithmique

$$\mathrm{l.}\sqrt{x^2+y^2}=C-a\,\mathrm{arc\,tg}\frac{y}{x}\qquad\text{ou}\qquad r=Ce^{-\frac{\theta}{a}}.$$

4. Les inclinaisons φ et θ de la tangente et du rayon vecteur sur l'axe des x sont liées par l'équation $2\varphi-4\theta=\pi$; trouver la courbe.

R. $x^2+y^2-Cx=0$; (cercle passant par l'origine et ayant son centre sur l'axe des x).

5. La distance de l'origine au point où la tangente coupe l'axe des x est $\sqrt{ax}$, ou $\frac{x^2}{a}$, x étant l'abscisse du point de contact; trouver la courbe.

$$\text{R.}\quad 1^\circ \quad \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \pm \left(\frac{y}{C}\right)^{\frac{1}{2}} = 1;\ \text{parabole.}$$

$$2^\circ \quad (x-a)(y-C) = aC;\ \text{hyperbole.}$$

6. L'aire de la courbe, comptée de l'axe des y jusqu'à l'ordonnée du point (x, y), a pour expression $ay - bx$, a et b étant constants; trouver la courbe.

$$\text{R.}\quad y = b\left(e^{\frac{x}{a}} - 1\right).$$

7. Le rayon vecteur est proportionnel au cube de la distance du centre à la tangente $(r = aP^3)$; trouver la courbe.

R. Elle a pour équation, en coordonnées polaires,

$$a^{\frac{1}{3}} r^{\frac{2}{3}} \cos\frac{2}{3}\theta = 1.$$

8. L'arc et l'ordonnée sont liés par la relation $s = \sqrt{y^2 - a^2}$; trouver la courbe.

R. On trouve la chaînette

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x-C}{a}} + e^{-\frac{x-C}{a}}\right).$$

9. L'arc et l'abscisse sont liés par l'une des relations suivantes :

$$s = a\,\mathrm{l}.x; \qquad s^2 = 4ax; \qquad 8s^3 = 27ax^2;$$

trouver la courbe.

$$\text{R.}\quad 1^\circ \quad y = C + \sqrt{a^2 - x^2} + a\,\mathrm{l}.\frac{x}{a + \sqrt{a^2 - x^2}}.$$

$$2^\circ \quad x = \frac{a}{2}(1 - \cos\omega), \qquad y = \frac{a}{2}(\omega + \sin\omega)\ \text{(cycloïde).}$$

$$3^\circ \quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}\ \text{(ch. XIII, ex. 2).}$$

10. La projection de la normale terminée à l'axe des x, sur le rayon vecteur, est une constante a; trouver la courbe.

$$\text{R.}\quad r = \frac{a}{1 - C\cos\theta}\ \text{(sections coniques).}$$

11. Trouver les trajectoires orthogonales des paraboles

$$x^2 = \alpha^2 - 2\alpha y.$$

R. On obtient

$$x^2 = \beta^2 + 2\beta y,$$

β étant un paramètre variable. On en conclut que les trajectoires font partie du système donné, les paraboles pour lesquelles α est positif coupant à angle droit les paraboles pour lesquelles α est négatif.

12. Trouver les trajectoires orthogonales des coniques *homofocales*

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\alpha^2-c^2}=1,$$

c étant donné.

R. On trouve, pour l'équation différentielle des coniques données,

$$\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{x^2-y^2-c^2}{xy}\,\frac{dy}{dx}-1=0.$$

Par un même point du plan, passent deux courbes correspondantes aux deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$, et comme le produit de celles-ci est -1, ces courbes se coupent à angle droit. Le système des coniques données comprend donc ses propres trajectoires orthogonales : $\alpha^2>c^2$ donne des ellipses, $\alpha^2<c^2$ des hyperboles; ces ellipses et ces hyperboles se coupent à angle droit, ce qu'il est facile de vérifier géométriqnement.

13. Trajectoires orthogonales des hyperboles

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\alpha^2}=1.$$

R. $\quad y^2+x^2-2a^2\,\mathrm{l}.\,x=\mathrm{C}.$

14. Trajectoires orthogonales des paraboles $y^2=2p(x-\alpha)$.

R. $\quad y=\mathrm{C}e^{-\frac{x}{p}}.$

15. Trouver la courbe dont la tangente est à une distance constante a de l'origine.

R. L'équation différentielle de la courbe est

$$y-px=a\sqrt{1+p^2},$$

p étant la dérivée de y. La réponse est donnée par la solution singulière

$$x^2+y^2=a^2 \text{ (cercle de rayon } a).$$

16. Trouver la courbe telle que la portion de sa tangente comprise entre deux axes rectangulaires soit constante.

R. L'équation différentielle est

$$y=px\pm\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}};$$

la réponse au problème est donnée par la solution singulière

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}} \text{ (ch. XIII, ex. 2).}$$

17. Trouver la courbe telle que le produit des distances de sa tangente à deux points fixes F et F′ est une constante b^2.

R. Posant $\mathrm{FF'}=2c$, $a^2=\pm b^2+c^2$, on trouve

$$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1,$$

ellipse ou hyperbole ayant pour foyers F et F′.

18. Le rayon de courbure R est une fonction $f(x)$ de l'abscisse; trouver la courbe.

R. $$y = C_1 \pm \int \frac{C \pm \varphi(x)}{\sqrt{1 - [C \pm \varphi(x)]^2}} dx, \qquad \varphi(x) \text{ désignant } \int \frac{dx}{f(x)}.$$

19. On a entre le rayon de courbure R, la normale N et la sous-normale S_n, la relation

$$\left(\frac{N}{y}\right)^3 = \frac{2R}{x}\left(\frac{S_n}{y} - \frac{y}{x}\right).$$

Trouver la courbe.

R. $$y = Cx + C_1 x^2, \qquad \text{ou} \qquad y = Cx + \frac{C_1}{x^2}.$$

20. L'équation d'une courbe étant $s \cos\varphi = a$, trouver l'équation sous la forme ordinaire.

R. Cette équation résultera de l'élimination de φ entre

$$x = C - a\,\mathrm{l.}\cos\varphi, \qquad y = C_1 + a(\operatorname{tg}\varphi - \varphi).$$

21. Trouver la courbe définie par l'équation $R = a \sin\varphi$.

R. C'est la cycloïde

$$x = \frac{a}{4}(1 - \cos 2\varphi), \qquad y = \frac{a}{4}(2\varphi - \sin 2\varphi).$$

22. Trouver la développante de la chaînette.

R. L'équation de cette courbe pouvant être mise sous la forme $\sigma = a \operatorname{tg}\theta$, on trouvera pour les équations de la développante

$$x = C\cos\theta + a\sin\theta - a\,\mathrm{l.}\frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta},$$

$$y = C\sin\theta - a\cos\theta.$$

Lorsque l'on suppose nulle la constante C, et que l'on élimine θ, on obtient la développante particulière

$$x = \sqrt{a^2 - y^2} - a\,\mathrm{l.}\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{-y}.$$

FIN DU PREMIER VOLUME.

NOTE I.

SUR LA CONVERGENCE DES SÉRIES.

Considérons deux séries à termes positifs

$$(1)\qquad u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots,$$

$$(2)\qquad v_0 + v_1 + \cdots + v_n + \cdots;$$

si, à partir d'une certaine valeur de n, on a constamment

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} < \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

et si la série (1) *est convergente, la série* (2) *sera convergente.* En effet, on aura visiblement

$$v_{n+1} < \frac{v_n}{u_n} u_{n+1}, \qquad v_{n+2} < \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} u_{n+2} < \frac{v_n}{u_n} u_{n+2}, \ldots,$$

et la série (2) aura tous ses termes, à partir du $n+1^{me}$, inférieurs aux termes correspondants de la série convergente

$$\frac{v_n}{u_n}(u_0 + u_1 + \cdots + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots);$$

elle sera donc convergente (20, III). On démontrerait de même que, *si la série* (1) *est divergente, et si l'on a constamment*

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} > \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

la série (2) *sera aussi divergente.*

Théorème I. — *Soit* $u_n = \mathrm{f}(n)$ *le terme général d'une série; si, à partir d'une valeur entière a de x, la fonction* $\mathrm{f}(x)$ *est positive et décroît constamment et indéfiniment quand x devient infini, la série sera convergente ou divergente selon que l'intégrale*

$$(\alpha)\qquad \int_a^\infty \mathrm{f}(x)\,dx$$

aura une valeur finie ou infinie.

Construisons la courbe $y = f(x)$, et menons les ordonnées correspondantes aux abscisses $x = a$, $x = a + 1$, $x = a + 2$,..., $x = n$. La somme des aires des rectangles *intérieurs* qui ont pour bases les portions de l'axe des x comprises entre ces ordonnées, et pour hauteurs respectives les ordonnées $f(a+1)$, $f(a+2)$,..., $f(n)$, savoir

$$f(a+1) + f(a+2) + \cdots + f(n),$$

est évidemment plus petite que l'aire de la courbe comprise entre les ordonnées $f(a)$ et $f(n)$. Or, dans la première hypothèse, cette aire tend vers une limite finie, exprimée par l'intégrale définie (α), quand n croît indéfiniment : donc la somme ci-dessus, qui n'est autre que $u_{a+1} + u_{a+2} + \cdots + u_n$, tend vers une limite finie.

Si, au contraire, l'intégrale (α) est infinie, on considérera la somme des rectangles *extérieurs*, qui ont les mêmes bases, et qui ont pour hauteurs $f(a)$, $f(a+1)$,..., $f(n-1)$. Cette somme $u_a + u_{a+1} + \cdots + u_{n-1}$ sera évidemment plus grande que l'aire de la courbe comprise entre les ordonnées $f(a)$ et $f(n)$, et puisque celle-ci croît indéfiniment avec n, il en sera de même de la somme des termes de la série.

COROLLAIRE. — *La série*

$$1 + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \cdots + \frac{1}{n^\mu} + \cdots$$

est convergente si la constante μ est > 1, divergente si $\mu = 1$ ou si μ est < 1. — En effet, on a ici

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_a^\infty \frac{dx}{x^\mu} = -\frac{1}{\mu - 1}\left[\frac{1}{x^{\mu-1}}\right]_a^\infty,$$

expression qui est finie ou infinie selon que $\mu - 1$ est $>$ ou < 0. Si $\mu = 1$, on a

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x} = \Big[\mathrm{l}.\,x\Big]_a^\infty = \infty.$$

On ferait voir, par le même raisonnement, que les séries qui ont respectivement pour termes généraux

$$\frac{1}{n\,(\mathrm{l}.\,n)^\mu}, \quad \frac{1}{n\,\mathrm{l}.\,n\,(\mathrm{l}.\mathrm{l}.\,n)^\mu}, \ldots$$

sont convergentes si $\mu > 1$, divergentes si $\mu = 1$ ou $\mu < 1$.

THÉORÈME II. — *Si, dans la série à termes positifs*

$$(1) \qquad u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots$$

le rapport d'un terme au précédent tend vers l'unité, en restant inférieur à cette limite, de sorte que l'on ait, α tendant vers zéro,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\alpha},$$

la série (1) sera convergente ou divergente suivant que la limite de $n\alpha$ sera supérieure ou inférieure à l'unité.

Posons, z désignant une quantité qui varie avec n,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+\alpha}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^z,$$

d'où

$$z=\frac{\text{l.}(1+\alpha)}{\text{l.}\left(1+\frac{1}{n}\right)},\qquad lim\ z=lim\frac{\alpha}{\left(\frac{1}{n}\right)}=lim\ n\alpha\ \ (26).$$

Dans la première hypothèse, $lim\ n\alpha$ est supérieur à l'unité; z sera donc, à partir d'une certaine valeur de n, constamment plus grand qu'une constante $\mu>1$. On aura donc

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^z<\left(\frac{n}{n+1}\right)^\mu=\frac{1}{(n+1)^\mu}:\frac{1}{n^\mu}.$$

Mais la série qui a pour terme général $n^{-\mu}$ est convergente, μ étant >1; donc, d'après le théorème énoncé au commencement de cette *Note*, la série (1) sera aussi convergente.

Dans le second cas, on aura au contraire $lim\ z<1$, z sera donc constamment inférieur à une quantité $\mu<1$, donc on aura

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}>\left(\frac{n}{n+1}\right)^\mu,$$

et la série qui a pour terme général $n^{-\mu}$ étant divergente puisque $\mu<1$, la série (1) sera aussi divergente.

Théorème III. — *Si, dans le cas du théorème précédent, on a précisément* $lim\ n\alpha=1$, *on posera* $n\alpha=1+\beta$, β *tendant vers zéro. La série* (1) *sera convergente ou divergente, suivant que* $\beta\,\text{l.}\,n$ *tendra vers une limite supérieure ou inférieure à l'unité.*

Posons d'abord, α' et ε désignant des quantités qui tendent évidemment vers zéro,

$$1+\alpha=\left(1+\frac{1}{n}\right)(1+\alpha'),\qquad \frac{\text{l.}(n+1)}{\text{l.}\,n}=1+\varepsilon,$$

et faisons encore, z étant variable avec n,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+\alpha}=\frac{n}{n+1}\left[\frac{\text{l.}\,n}{\text{l.}(n+1)}\right]^z.$$

Nous tirerons de là

$$1+\alpha=\left(1+\frac{1}{n}\right)(1+\varepsilon)^z,\qquad z=\frac{\text{l.}(1+\alpha')}{\text{l.}(1+\varepsilon)},\qquad lim\ z=lim\frac{\alpha'}{\varepsilon}.$$

Mais on a d'ailleurs

$$\alpha'=\frac{n\alpha-1}{n+1},\qquad \varepsilon=\frac{\text{l.}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\text{l.}\,n},$$

d'où

$$\frac{\alpha'}{\varepsilon}=\frac{n\alpha-1}{n+1}\cdot\frac{\text{l}.\,n}{\text{l}.\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{\beta\,\text{l}.\,n}{(n+1)\,\text{l}.\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

On voit facilement que le dénominateur de cette expression tend vers l'unité, n croissant indéfiniment, d'où l'on a

$$\lim\frac{\alpha'}{\varepsilon}=\lim z=\lim\beta\,\text{l}.\,n.$$

Cela posé, si $\beta\,\text{l}.\,n$ tend vers une limite supérieure à l'unité, z finira par dépasser constamment une certaine quantité $\mu>1$; on aura donc

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{n\,(\text{l}.\,n)^{\mu}}{(n+1)\,[\text{l}.\,(n+1)]^{\mu}},$$

et comme la série dont le terme général est

$$\frac{1}{n\,(\text{l}.\,n)^{\mu}}$$

est convergente, μ étant >1, la série (1) sera convergente. On montrerait, par un raisonnement semblable, que si $\lim\beta\,\text{l}.\,n$ est <1, la série (1) sera divergente.

Ce théorème laisse indécise la question de convergence si $\lim\beta\,\text{l}.\,n=1$; mais on démontrerait, par une série de raisonnements analogues aux précédents, que si l'on fait

$$\beta\,\text{l}.\,n=1+\gamma,$$

la série (1) sera convergente ou divergente suivant que l'on aura

$$\lim\gamma\,\text{l}.\,\text{l}.\,n>1 \qquad \text{ou} \qquad \lim\gamma\,\text{l}.\,\text{l}.\,n<1.$$

Prenons pour application du théorème II la série

$$1+\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{1}{7}+\cdots$$

dont le terme général est

$$u_n=\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots2n}\,\frac{1}{2n+1}.$$

On a ici

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(2n+1)^2}{(2n+2)\,(2n+3)},\qquad 1+\alpha=\frac{(2n+2)\,(2n+3)}{(2n+1)^2},$$

$$n\alpha=\frac{6n^2+5n}{(2n+1)^2}=\frac{6+\frac{5}{n}}{4+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}.$$

Donc

$$\lim n\alpha = \frac{3}{2} > 1,$$

la série est convergente.

On déduit facilement des théorèmes II et III un beau théorème de Gauss sur la convergence des séries (1).

(La *Note II*, concernant l'existence de la dérivée dans les fonctions continues et la continuité de cette dérivée, exigerait des développements étendus, dépassant les limites qui nous sont imposées, pour être traitée avec la rigueur convenable. Nous la supprimerons donc, nous bornant à renvoyer au mémoire de M. Lamarle sur cette question (2), tout en pensant que sa démonstration pourrait être complétée sur certains points et simplifiée sur d'autres.)

(1) *Commentationes Societatis regiæ Gottingensis recentiores*, t. II. — *Gauss' Werke*, t. III.

(2) *Mémoires de l'Académie royale de Belgique*, t. XXIV, 1855.

